

CAD/CAM/CAE工程应用丛书 MATLAB系列

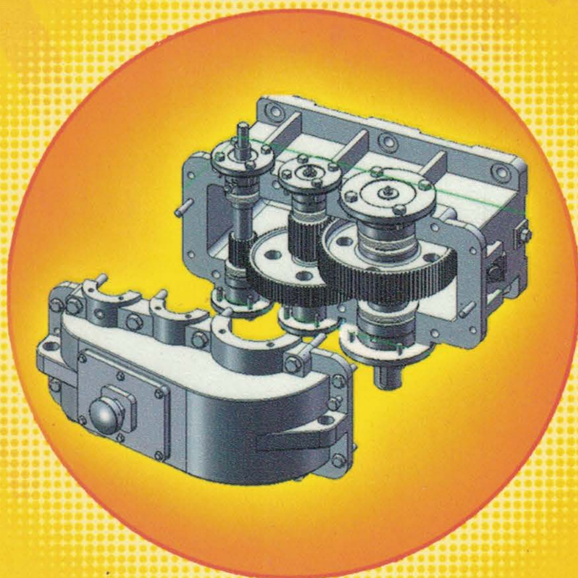
机械工程设计分析和MATLAB应用

第4版

◎郭仁生 等编著

本书核心内容包含

- MATLAB基础和常用科学计算
- 连杆机构的运动设计和运动分析
- 间歇运动机构和轮系的运动分析
- 凸轮机构运动分析和设计计算
- 挠性传动设计计算
- 齿轮、蜗杆和螺旋传动的设计计算
- 轴系设计计算和分析
- 机械联接设计计算
- 优化设计分析和曲线拟合



MATLAB中文论坛鼎力支持

为读者提供全面、系统、超值的配套服务









网上提供源代码下载

www.cmpbook.com



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

VISIT…

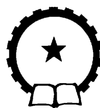
LANZAROTE Caliente.com

CAD/CAM/CAE 工程应用丛书 · MATLAB 系列

机械工程设计分析和 MATLAB 应用

第 4 版

郭仁生　等编著



机 械 工 业 出 版 社

本书共分两篇。第 1 篇介绍 MATLAB 操作基础、矩阵和数组及其运算、符号运算基础、M 文件和流程控制结构、数据可视化等基础知识，以及运用 MATLAB 提供的平台，在解决工程实际问题时经常用到的多项式运算和数据插值、函数的导数和积分、代数方程和最优化问题等常用数学计算函数的功能和科学计算方法。第 2 篇介绍 MATLAB 在机械工程设计分析中的应用，包括连杆机构的运动设计和运动分析、间歇运动机构和轮系的运动分析、凸轮机构运动分析和设计计算、齿轮、蜗杆和螺旋传动的设计计算、轴系设计计算和分析、机械联接设计计算，以及优化设计分析和曲线拟合等方面，结合 30 多个机械工程设计分析课题，进行数学建模、编制 M 文件、运用计算机数学方法、运算求解和结果分析等，力图体现出计算机数学方法、MATLAB 功能和实际工程技术问题三者的有机结合。

本书可作为工科院校制造类专业相关课程教学和课题设计用书，也可作为工程技术人员基于 MATLAB 平台，运用计算机数学方法，分析和求解机械工程问题的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

机械工程设计分析和 MATLAB 应用/郭仁生等编著. —4 版. —北京：机械工业出版社，2014.10
（CAD/CAM/CAE 工程应用丛书）
ISBN 978 - 7 - 111 - 48334 - 2

Ⅰ. ①机…　Ⅱ. ①郭…　Ⅲ. ①Matlab 软件 - 应用 - 机械设计　Ⅳ. ①TH122

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 244844 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
策划编辑：张淑谦　　　　责任校对：张艳霞
责任编辑：张淑谦
责任印

2014 年 11 月第 4 版・第 1 次印刷
184mm × 260mm・26.75 印张・660 千字
0001—3000 册
标准书号：ISBN 978 - 7 - 111 - 48334 - 2
定价：68.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
社服务中心：(010)88361066	教材网：http://www.cmpedu.com
销售一部：(010)68326294	机工官网：http://www.cmpbook.com
销售二部：(010)88379649	机工官博：http://weibo.com/cmp1952
读者购书热线：(010)88379203	**封面无防伪标均为盗版**

出 版 说 明

随着信息技术在各领域的迅速渗透，CAD/CAM/CAE 技术已经得到了广泛的应用，从根本上改变了传统的设计、生产、组织模式，对推动现有企业的技术改造、带动整个产业结构的变革、发展新兴技术、促进经济增长都具有十分重要的意义。

CAD 在机械制造行业的应用最早，使用也最为广泛。目前其最主要的应用涉及机械、电子、建筑等工程领域。世界各大航空、航天及汽车等制造业巨头不但广泛采用 CAD/CAM/CAE 技术进行产品设计，而且投入大量的人力、物力及资金进行 CAD/CAM/CAE 软件的开发，以保持自己技术上的领先地位和国际市场上的优势。CAD 在工程中的应用，不但可以提高设计质量，缩短工程周期，还可以节省大量建设投资。

各行各业的工程技术人员也逐步认识到 CAD/CAM/CAE 技术在现代工程中的重要性，掌握其中的一种或几种软件的使用方法和技巧，已成为他们在竞争日益激烈的市场经济形势下生存和发展的必备技能之一。然而，仅仅知道简单的软件操作方法是远远不够的，只有将计算机技术和工程实际结合起来，才能真正达到通过现代的技术手段提高工程效益的目的。

基于这一考虑，机械工业出版社特别推出了这套主要面向相关行业工程技术人员的“CAD/CAM/CAE 工程应用丛书”。本丛书涉及 AutoCAD、Pro/ENGINEER、Cre0、UG、SolidWorks、Mastercam、ANSYS 等软件在机械设计、性能分析、制造技术方面的应用，以及 AutoCAD 和天正建筑 CAD 软件在建筑和室内配景图、建筑施工图、室内装潢图、水暖、空调布线图、电路布线图以及建筑总图等方面的应用。

本套丛书立足于基本概念和操作，配以大量具有代表性的实例，并融入了作者丰富的实践经验，使得本丛书内容具有专业性强、操作性强、指导性强的特点，是一套真正具有实用价值的书籍。

机械工业出版社

前　言

计算机辅助设计 CAD（Computer Aided Design）和 CIMS 计算机集成制造系统（Computer Integrated Manufacturing System）是国家大力推进制造业信息化进程中的两项核心技术。随着科学技术的不断发展和计算机技术应用的日益广泛深入，我国的计算机辅助技术逐步与国际同类技术接轨，且已经在制造业的各个领域获得巨大的成功，取得了显著的社会经济效益。

CAD 的含义已从最初的计算机辅助绘图（Computer Aided Drafting）发展到当今的计算机辅助设计（Computer Aided Design），它已经涵盖了工程设计的整个过程。CAD 将设计者的创新思维、决策判断能力与计算机高速运算、信息储存处理等功能有机地结合起来，在工程应用软件、工程数据库和信息系统的支撑下，运用设计方法学进行计算分析，以获得最佳的设计方案，为实现产品在设计、制造、装配、检验、销售、使用和回收等整个生命周期的数字化信息共享和集成奠定基础。

MATLAB 是美国 MathWorks 公司推出的以集数值计算和图形处理为一体的 21 世纪科学计算语言。它具有功能强大、集成度高、易于扩充开发和使用方便的特点，已经在高等院校、科研院所和工程部门的设计分析、自动控制、数理统计等许多领域中获得广泛的应用，成为最为普遍的计算工具和桌面工程师系统之一。

本书的作者长期从事机械设计和计算机辅助设计的教学和科研，在机械工程领域的机构运动分析和设计、机械零部件设计、机械可靠性设计、机械优化分析和计算、机械制造工艺参数优化、实验数据的曲线拟合和多项式拟合等方面，结合教学、科研和工程应用实际，通过建立数学模型，在 MATLAB 系统平台上，编制 M 程序文件，运用计算机数学方法，进行分析研究和设计计算，取得了许多应用成果。这些科研成果发表在《机械设计》《机械设计与制造》《现代制造工程》和《机械研究与应用》等机械工程专业期刊上，其中一些已经成功地应用于企业生产，并且多次获得佛山市科协自然科学优秀学术论文奖励。本书是作者对多年来在机械工程领域进行教学科研，以及运用 MATLAB 进行分析研究和设计计算的成果的总结和提炼。

本书内容丰富，工程实用性强，既包括 MATLAB 的基本操作、常用计算方法、数据可视化和 M 文件编制等工程应用基本内容，又介绍了许多机械工程设计分析实例。每个实例包括了数学建模、计算机数学方法、M 文件和运算结果分析等内容，有助于读者熟练地运用 MATLAB 提供的功能，去分析和解决相关领域中的工程实际问题。因而不但可以显著提高工作效率和质量，还可以激发读者的学习兴趣，培养独立思考问题的能力，真正让读者掌握一些现代化的设计手段和思想方法。

本书自 2006 年 8 月第 1 版、2008 年 7 月第 2 版和 2012 年 1 月第 3 版面世以来，受到了读者的喜爱和支持，在 2008 年被佛山市科学技术协会评选为佛山市自然科学优秀学术著作。作者根据教学和工程实践，结合新技术的发展应用，新编了第 4 版。对第 1 篇“MATLAB 基础和常用科学计算”，按照 MATLAB7. 1 版本进行梳理，更新和充实了一些实用内容，有助于读者尽快深入浅出地掌握 MATLAB 工程应用的基础知识和常用科学计算

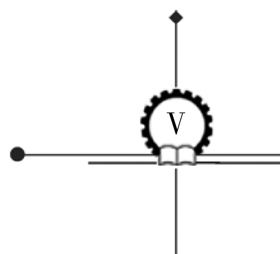
方法。在第 2 篇“机械工程设计分析应用”中，增加和更新了多个课题的应用实例。书中所有的 M 文件主要语句后面对其功能和含义都有注释说明，有助于读者在课题设计、工程应用和技术研究时参考和借鉴。

为方便教学和工程应用，本书配有第 1 篇的 PPT 教学课件，以及第 2 篇的 M 文件，读者可以从网站 www. cmpbook. com 下载。

本书主要由郭仁生编著，汤平平对第 1 篇的实例进行了审校。

由于作者水平有限，书中难免有不足和疏漏之处，敬请读者批评指正。

作　者



目　　录

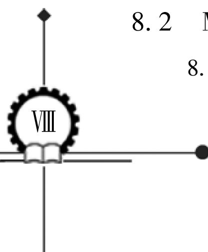
出版说明
前言

第 1 篇　MATLAB 基础和常用科学计算

第 1 章　MATLAB 操作基础 …… 2
1.1　MATLAB 概述 …… 2
1.1.1　MATLAB 的主要模块 …… 2
1.1.2　MATLAB 的主要特点 …… 3
1.2　MATLAB 的系统界面和菜单功能 …… 3
1.2.1　MATLAB 系统界面 …… 3
1.2.2　主窗口的菜单功能 …… 6
1.3　运算符和标点符 …… 7
1.3.1　运算符 …… 7
1.3.2　标点符 …… 10
1.4　数据类型 …… 10
1.4.1　数值量 …… 10
1.4.2　字符量 …… 12
1.4.3　变量 …… 12
1.5　基本数学函数 …… 13
1.5.1　三角函数 …… 13
1.5.2　指数和对数函数 …… 14
1.5.3　取整和取余函数 …… 14
1.5.4　通用数学分析函数 …… 15
第 2 章　矩阵和数组及其运算 …… 17
2.1　矩阵的建立及变换 …… 17
2.1.1　矩阵的建立 …… 17
2.1.2　矩阵的转置和变换 …… 19
2.2　矩阵元素和子矩阵的提取 …… 20
2.2.1　矩阵元素的提取 …… 20
2.2.2　子矩阵的提取 …… 22
2.3　矩阵的运算 …… 23
2.3.1　矩阵的加法和减法 …… 23

2.3.2 矩阵的乘法 …… 24
2.3.3 矩阵的求逆 …… 25
2.3.4 向量的范数和矩阵行列式的值 …… 25
2.3.5 矩阵的除法 …… 26
2.4 数组的运算 …… 28
2.4.1 数组的加法和减法 …… 28
2.4.2 数组的乘法 …… 28
2.4.3 数组的除法 …… 29
2.4.4 数组的乘方 …… 29
第3章 符号运算基础 …… 30
3.1 建立符号对象 …… 30
3.1.1 建立符号量 …… 30
3.1.2 建立符号表达式 …… 31
3.1.3 符号表达式中变量的确定 …… 31
3.2 符号表达式的基本运算 …… 31
3.2.1 符号表达式的四则运算 …… 31
3.2.2 符号表达式分子和分母的提取 …… 32
3.2.3 符号表达式的处理 …… 33
3.3 符号函数的复合函数和反函数 …… 34
3.3.1 符号函数的复合函数 …… 34
3.3.2 符号函数的反函数 …… 35
3.4 符号表达式与数值表达式之间的转换和运算精度控制 …… 36
3.4.1 符号表达式与数值表达式之间的转换 …… 36
3.4.2 符号和数值运算精度控制 …… 36
第4章 M文件和流程控制结构 …… 38
4.1 M文件的分类 …… 38
4.1.1 命令文件（Script File） …… 38
4.1.2 函数文件 …… 39
4.2 流程控制结构 …… 41
4.2.1 顺序结构 …… 41
4.2.2 循环结构 …… 42
4.2.3 选择结构 …… 45
第5章 数据可视化 …… 48
5.1 绘制二维曲线 …… 48
5.2 图形格式设定和修饰 …… 49
5.2.1 设置图形窗口 …… 49
5.2.2 系统坐标控制 …… 49

5.2.3 标注图形 …… 49
5.2.4 特殊符号的标注 …… 50
5.3 在极坐标系中绘制曲线 …… 52
5.4 符号函数绘图 …… 52
5.5 填充图形 …… 54
5.6 绘制三维图形 …… 55
5.6.1 绘制三维曲线 …… 55
5.6.2 绘制三维曲面 …… 57
第6章 多项式运算和数据插值 …… 61
6.1 多项式运算 …… 61
6.1.1 符号多项式的生成 …… 61
6.1.2 求多项式的值和根 …… 61
6.1.3 多项式的乘法和除法运算 …… 62
6.1.4 多项式的导数和积分 …… 63
6.2 数据插值 …… 64
6.2.1 一维数据插值 …… 64
6.2.2 二维数据插值 …… 67
第7章 函数的导数和积分 …… 70
7.1 函数的导数 …… 70
7.1.1 函数导数的解析解 …… 70
7.1.2 二维函数和参数方程的偏导数 …… 71
7.1.3 n维函数的偏导数 …… 73
7.1.4 数值微分 …… 75
7.1.5 函数的梯度和范数 …… 76
7.2 函数的积分 …… 77
7.2.1 不定积分的解析解 …… 78
7.2.2 定积分 …… 78
7.2.3 数值积分 …… 79
7.2.4 函数的重积分 …… 81
第8章 代数方程求解和最优化问题 …… 83
8.1 代数方程求解 …… 83
8.1.1 代数方程图解法 …… 83
8.1.2 代数方程的解析解 …… 84
8.1.3 线性方程组的数值解 …… 85
8.1.4 非线性方程的数值解 …… 86
8.2 MATLAB优化工具箱的应用 …… 88
8.2.1 线性规划问题 …… 89

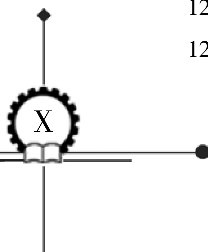


8.2.2　二次规划问题 …… 91
8.2.3　无约束非线性规划问题 …… 92
8.2.4　约束非线性规划问题 …… 97
8.2.5　多目标规划问题 …… 100

第2篇　机械工程设计分析应用

第9章　连杆机构的运动设计和运动分析 …… 104
9.1　连杆机构的运动设计 …… 104
9.1.1　给定极限位置和最小传动角的设计问题 …… 104
9.1.2　给定连架杆对应位置的设计问题 …… 106
9.2　连杆机构实现预定函数和轨迹的优化设计 …… 109
9.2.1　实现预定函数的优化设计 …… 109
9.2.2　实现连杆轨迹的优化设计 …… 113
9.3　曲柄摇杆机构的运动分析 …… 118
9.3.1　机构运动分析的数学模型和求解方法 …… 119
9.3.2　机构运动方程的求解方法 …… 120
9.3.3　机构运动误差分析 …… 120
9.4　导杆机构的运动分析 …… 125
9.4.1　转动导杆机构的运动分析 …… 125
9.4.2　摆动导杆机构设计 …… 128
9.4.3　计算实例的M文件和运算结果 …… 129
9.5　曲柄滑块机构的运动精度综合 …… 132
9.5.1　机构的尺度参数和运动参数分析 …… 132
9.5.2　曲柄滑块机构等影响法精度综合 …… 133
9.5.3　计算实例和M文件 …… 134
第10章　间歇运动机构和轮系的运动分析 …… 141
10.1　槽轮机构的运动分析和动力计算 …… 141
10.1.1　槽轮机构的运动方程和运动参数 …… 142
10.1.2　槽轮机构的动力学计算 …… 142
10.1.3　计算实例的M文件和运算结果 …… 143
10.2　针轮机构的设计计算和运动分析 …… 153
10.2.1　针轮机构的设计计算 …… 154
10.2.2　针轮机构的运动分析 …… 156
10.2.3　M文件和计算结果 …… 157
10.3　面粉搅拌机工作头旋轮轨迹分析和仿真 …… 161
10.3.1　搅拌机的传动系统 …… 161
10.3.2　内外啮合圆锥齿轮行星传动的运动分析 …… 162

10.3.3 行星机构运动模拟分析的 M 文件和运算结果 …… 163
第 11 章 凸轮机构运动分析和设计计算 …… 169
11.1 对心直动凸轮机构压力角的计算 …… 169
11.1.1 凸轮机构压力角的图解 …… 170
11.1.2 凸轮机构压力角的计算 …… 171
11.1.3 计算实例 M 文件和运算结果 …… 172
11.2 凸轮机构的设计计算和运动分析 …… 174
11.2.1 凸轮设计和运动分析的步骤和数学模型 …… 174
11.2.2 凸轮设计计算实例和 CAD 基本方法 …… 175
11.2.3 编制 M 文件的基本方法和运算结果 …… 175
11.3 共轭平面分度凸轮机构的设计计算 …… 185
11.3.1 凸轮机构主要运动参数分析 …… 185
11.3.2 凸轮机构主要几何尺寸计算 …… 188
11.3.3 凸轮轮廓直角坐标计算 …… 190
11.3.4 凸轮机构工作情况分析 …… 192
11.3.5 设计计算实例、M 文件和运算结果 …… 193
11.4 圆柱分度凸轮机构设计和运动分析 …… 203
11.4.1 凸轮机构的主要运动参数分析 …… 204
11.4.2 凸轮机构主要几何尺寸计算 …… 206
11.4.3 圆柱分度凸轮工作轮廓计算 …… 208
11.4.4 圆柱分度凸轮机构的结构设计要点 …… 209
11.4.5 M 文件和计算结果 …… 209
第 12 章 挠性传动设计计算 …… 223
12.1 V 带传动的多目标优化设计 …… 223
12.1.1 V 带传动多目标优化设计数学模型 …… 223
12.1.2 M 文件和运算结果 …… 225
12.1.3 使用最大最小化函数求解多目标优化问题的讨论 …… 227
12.2 同步带传动的设计计算 …… 229
12.2.1 同步带传动设计计算步骤和内容 …… 229
12.2.2 M 文件和运算结果 …… 234
12.3 多楔带传动设计计算 …… 237
12.3.1 多楔带传动的特点 …… 237
12.3.2 多楔带传动设计计算实例 …… 237
12.3.3 M 文件和运算结果 …… 242
12.4 滚子链传动的优化设计 …… 245
12.4.1 滚子链传动设计计算的有关公式和曲线拟合 …… 246
12.4.2 滚子链传动优化设计实例 …… 247
12.4.3 M 文件与计算结果 …… 248



第 13 章　齿轮、蜗杆和螺旋传动的设计计算 …… 253
13.1　齿轮传动参数测定和公法线公差计算 …… 253
13.1.1　变位齿轮传动参数的测定和计算 …… 253
13.1.2　斜齿圆柱齿轮公法线长度及其偏差的计算 …… 257
13.2　圆柱齿轮传动的设计计算 …… 259
13.2.1　齿轮传动设计计算的简化方法 …… 259
13.2.2　M 文件基本流程和主要处理方法 …… 260
13.2.3　设计计算实例的 M 文件和运算结果 …… 261
13.3　齿轮传动的几何规划 …… 269
13.3.1　构造几何规划的数学模型 …… 269
13.3.2　几何规划算法分析 …… 270
13.3.3　几何规划实例 …… 271
13.3.4　M 文件和运算结果 …… 272
13.4　两级圆柱齿轮减速器优化设计 …… 276
13.4.1　两级圆柱齿轮传动的设计理论 …… 276
13.4.2　优化设计实例和数学模型 …… 277
13.4.3　M 文件和运算结果 …… 279
13.5　螺旋齿轮传动的设计计算 …… 282
13.5.1　螺旋齿轮传动原理 …… 282
13.5.2　螺旋齿轮传动设计计算实例 …… 284
13.5.3　M 文件和运算结果 …… 286
13.6　圆柱蜗杆传动的优化设计 …… 288
13.6.1　建立优化设计的数学模型 …… 288
13.6.2　设计实例 M 文件和计算结果 …… 290
13.7　螺旋传动的设计计算 …… 294
13.7.1　螺旋传动设计计算主要内容 …… 295
13.7.2　螺旋起重器设计计算实例 …… 298
13.7.3　M 文件和运算结果 …… 299
第 14 章　轴系设计计算和分析 …… 304
14.1　轴系部件设计计算 …… 304
14.1.1　机械传动装置的运动和动力参数计算 …… 305
14.1.2　V 带传动设计计算 …… 306
14.1.3　圆柱齿轮传动设计计算 …… 307
14.1.4　轴的设计计算 …… 309
14.1.5　滚动轴承的工作寿命计算 …… 313
14.1.6　平键联接选用计算 …… 315
14.1.7　M 文件和运算结果 …… 315
14.2　机床主轴优化设计 …… 331
14.2.1　建立优化设计数学模型 …… 331

14.2.2 计算实例和 M 文件 …… 332
14.3 主轴支承静不定结构的计算 …… 334
14.3.1 主轴支承静不定结构分析 …… 334
14.3.2 轴承径向反力位置 – 载荷关系曲线的分段拟合 …… 335
14.3.3 建立主轴力矩平衡方程 …… 336
14.3.4 计算主轴前支承的径向反力 …… 337
14.3.5 计算流程图 …… 338
14.3.6 计算实例和 M 文件 …… 338
14.4 转轴的可靠性分析与设计 …… 343
14.4.1 机械零件的可靠度计算 …… 344
14.4.2 转轴的可靠性设计 …… 344
14.4.3 M 文件和运算结果 …… 347
第 15 章 机械联接设计计算 …… 353
15.1 螺栓联接选用计算 …… 353
15.1.1 受轴向静载荷的螺栓联接计算 …… 353
15.1.2 受轴向变载荷的螺栓联接计算 …… 354
15.1.3 M 文件和运算结果 …… 356
15.2 螺栓组联接的优化设计 …… 358
15.2.1 螺栓单价与直径的关系 …… 358
15.2.2 计算实例与数学模型 …… 358
15.2.3 M 文件和计算结果 …… 359
15.3 圆柱螺旋弹簧的设计计算 …… 361
15.3.1 圆柱螺旋弹簧设计计算原理 …… 361
15.3.2 计算实例和 M 文件 …… 362
第 16 章 优化设计分析和曲线拟合 …… 368
16.1 优化设计模型的几何描述 …… 368
16.1.1 设计空间的几何描述方法 …… 368
16.1.2 应用实例 M 文件和描述图形 …… 368
16.2 人字架结构尺寸的优化设计 …… 377
16.2.1 人字架的力学分析和优化设计数学模型 …… 377
16.2.2 M 文件和运算结果 …… 378
16.2.3 优化问题的几何描述 …… 381
16.3 梯形截面管道结构尺寸的优化设计 …… 382
16.3.1 计算实例和优化设计数学模型 …… 382
16.3.2 无约束非线性优化函数的运用 …… 383
16.3.3 M 文件运算结果分析和几何描述 …… 383
16.4 多目标优化问题的理想有效解 …… 386
16.4.1 多目标优化的策略 …… 386
16.4.2 计算实例和优化设计数学模型 …… 387

16.4.3 M 文件的主要特点 …… 388
16.4.4 运算结果分析 …… 391
16.5 无心磨削工艺参数的优化 …… 392
16.5.1 无心磨削工艺参数分析 …… 392
16.5.2 建立工艺参数优化的数学模型 …… 393
16.5.3 M 文件和运算结果 …… 394
16.5.4 优化结果的分析和处理 …… 398
16.6 曲线拟合和多项式拟合 …… 398
16.6.1 直线拟合 …… 399
16.6.2 曲线拟合 …… 400
16.6.3 多项式拟合 …… 401
16.6.4 计算实例和 M 文件 …… 401
参考文献 …… 412

第 1 篇　MATLAB 基础和常用科学计算

本篇介绍 MATLAB 操作基础、矩阵和数组及其运算、符号运算基础、M 文件和流程控制结构、数据可视化等基础知识；以及运用 MATLAB 提供的平台，在解决工程实际问题时经常用到的多项式运算和数据插值、函数的导数和积分、代数方程求解和最优化问题等各种常用的数学计算函数的功能和科学计算方法。



第 1 章　MATLAB 操作基础

MATLAB（Matrix Laboratory，原意是矩阵实验室）由美国 MathWorks 公司在 20 世纪 80 年代中期推出，它的最初版本是一种专门用于矩阵数值计算的数学软件。随着 MATLAB 的逐步市场化和功能扩展强化，为科学研究和工程设计以及必须进行数值计算的众多科学领域，提供了用于算法开发、数据可视化、数据分析以及数值计算的高级技术计算语言和交互式环境的一种全面的解决方案。MATLAB 的应用范围非常广，包括信号和图像处理、通信、控制系统设计、测试和测量、财务建模和分析，以及计算生物学等众多应用领域。它附带的几十种面向不同科技应用领域的工具箱扩展了 MATLAB 环境，以解决这些应用领域内特定类型的问题。MATLAB 以它卓越的数值和符号计算、数据可视化、控制系统设计仿真和财务金融工程分析等功能，成为国际公认的优秀工程应用开发平台。

1.1　MATLAB 概述

MATLAB 包含了丰富的函数资源，它使用直观、简洁、实用和更加符合人的思维习惯的代码，将编程人员从繁重的程序代码中解放出来，备受用户的关注和欢迎。

1.1.1　MATLAB 的主要模块

MATLAB 是一种面向科学与工程计算的 21 世纪科学计算语言，它包括 MATLAB 和 Simulink 两大部分，主要功能模块有：

1）MATLAB 是数值分析和图形处理的基础平台。

2）MATLAB Toolbox 是解决特定领域问题的、开放的、可扩展的函数库。

3）MATLAB Compiler 可将 M 文件自动转换成 C/C ++ 文件，配合 Math Works 提供的 C/C ++ 数学库和图形库，可以开发功能强大的独立应用软件。

Simulink 是以 MATLAB 的数值分析、图形处理和语言为基础平台，进行具有框图界面和交互仿真能力的非线性动态系统仿真的工具。与该模块配合使用的还有：Stateflow 可以与 Simulink 框图模型结合描述复杂驱动系统的逻辑行为，驱动在不同模式之间进行转换；Real -Time Workshop 直接从 Simulink 框图自动生成 C/ADA 代码，用于快速原型和硬件的回路仿真；Simulink Blockset 是专门为特定领域设计的 Simulink 功能块的集合。

1.1.2　MATLAB 的主要特点

1. 编程容易和调试方便

MATLAB 具有程序流程控制结构、数据结构、输入输出和面向对象等程序设计语言特征，包含丰富的库函数可供直接调用，避免了对大量算法的重复编程；并且允许用户使用数学形式的语言编写程序，更加符合科技人员对数学表达式的书写格式，被誉为“高级数学演算纸和图形显示器”。它在很大程度上摆脱了传统非交互式程序设计语言（如 Fortran、C 和 Qbasic 等）的编辑模式，编程更加简明易用，它的语法规则与一般结构化高级编程语言基本相同。MATLAB 是一种解释执行语言，它将其他语言使用过程的编辑、编译、联接、执行和调试等步骤融为一体，并且能够在同一个窗口上处理程序中可能出现的语法错误，并进行出错原因分析。因此程序调试比 Visual Basic 等更加简单方便。

2. 扩充性和交互性好

MATLAB 的库函数与用户文件在形式上是一样的，所以用户文件可以作为库函数进行调用，用户也可以根据需要建立和扩充新的库函数。MATLAB 为科学研究和工程应用的许多专门领域都开发了功能强大的模块集和工具箱。MATLAB 的核心文件和工具箱文件都是可读写的源文件，用户可以根据需要对其进行修改或编制新的工具箱。

MATLAB 对于用户原有的 Fortran 和 C 语言程序，可以通过建立 M 文件形式的混合编程的方法进行调用；在 Fortran 和 C 语言的平台上也可以方便地使用 MATLAB 的数值计算功能。MATLAB 可以利用 MATLAB 编译器和 C/C ++ 数学库和图形库，将自己的 MATLAB 程序自动转换为独立于 MATLAB 运行的 C 和 C ++ 代码，允许用户编写可以和 MATLAB 进行交互的 C 或 C ++ 语言程序。

3. 强大的计算功能

MATLAB 具有丰富的基本内部函数，是一个包含大量计算算法的集合。这些函数所能解决的问题大致包括矩阵运算和线性方程组的求解、微分方程及偏微分方程组的求解、符号运算、傅里叶变换和数据的统计分析、工程中的优化问题、稀疏矩阵运算、复数的各种运算、三角函数和其他初等数学运算、多维数组操作以及建模动态仿真等，它采用了先进、可靠和优化计算方法，可用于解决数学和工程领域的绝大多数问题。

4. 出色的数据可视化功能

MATLAB 将向量和矩阵用图形表现出来，提供了一系列简单明了、功能齐全的绘图函数和命令，包括二维和三维的可视化、图像处理、动画和表达式作图。对一些工程特性较强的特殊图形进行光照和色度处理、修饰和控制，以及四维数据的表现等，MATLAB 同样表现出了出色的处理能力。

1.2　MATLAB 的系统界面和菜单功能

1.2.1　MATLAB 系统界面

在 Windows 环境中双击 MATLAB 图标，启动 MATLAB 后，弹出 MATLAB，系统界面如

图 1-1 所示。MATLAB 系统采用集命令输入、执行、修改和调试于一体的集成界面，在默认的情况下系统界面包括下面 4 个窗口：

（1）命令窗口（Command Window）是 MATLAB 的主要交互窗口（图 1-1 的右侧），用于输入命令、函数、数组和表达式等信息，并且显示输出结果。其中“>>”是命令提示符。用户可以通过主窗口顶部的菜单栏选择“Edit/Clear Command Window”命令清除窗口显示的信息。在菜单栏中选择“Desktop/Command Window”命令调出或隐藏该窗口。

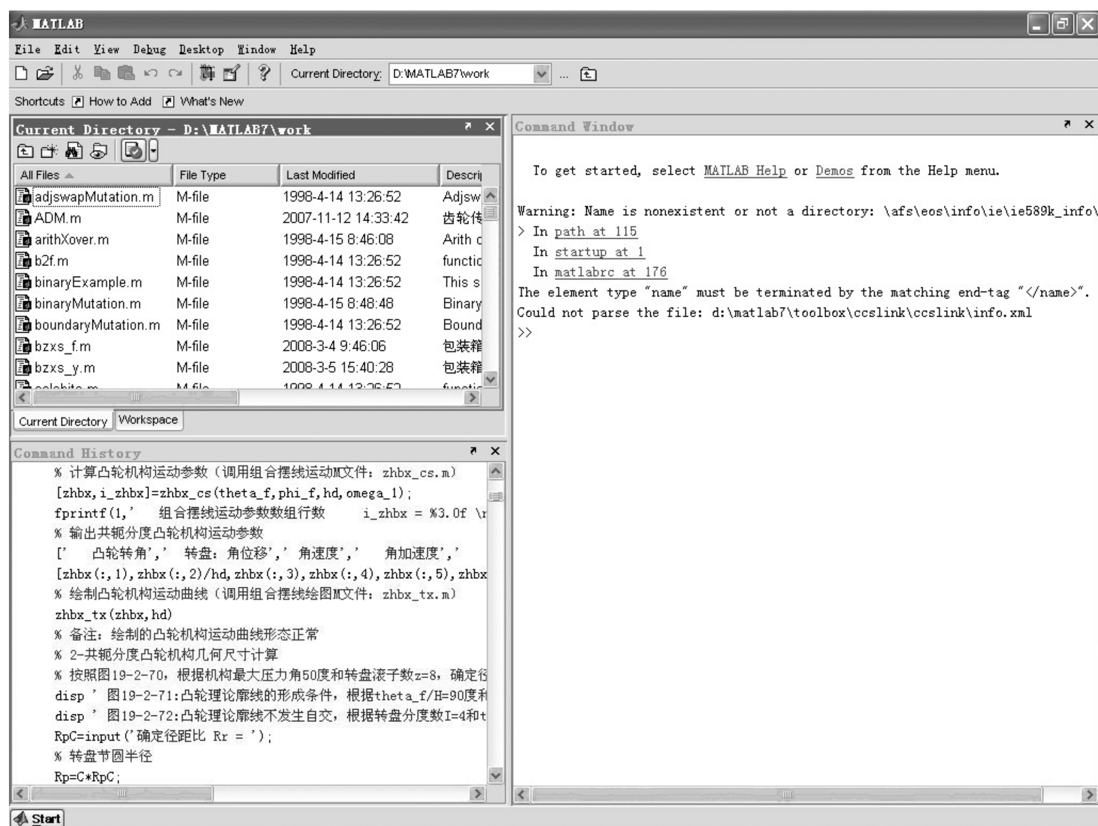


图 1-1　MATLAB 系统界面

（2）工作空间管理窗口（Workspace）用于显示 MATLAB 在内存空间中存储的所有变量的名称、大小和类型，可以对它们进行编辑和保存，也可以通过主窗口顶部的菜单栏选择命令“Edit/Clear Workspace”删除内存空间中存储的数据。在菜单栏中选择“Desktop/Workspace”命令调出或隐藏该窗口。

（3）历史命令窗口（Command History）用于记录已经运行过的命令、函数和表达式等信息，可以在该窗口中对它们进行重复运行或复制，也可以通过菜单“Edit/Clear Command History”命令清除这些历史记录。在主窗口顶部的菜单栏中选择“Desktop/Command History”命令调出或隐藏该窗口。

（4）当前路径窗口（Current Directory）用于显示和设置当前工作目录，同时显示当前

工作目录下的文件名、文件类型和目录的修改信息等。在主窗口顶部的菜单栏中选择"Desktop/Current Directory"命令调出或隐藏该窗口。

在命令窗口中输入"cd"命令，并且按〈Enter〉键确认，即显示 MATLAB 工作所在的目录：

```
>> cd
D:\MATLAB\work
```

上面每个窗口的右上角的按钮用于使该窗口成为独立窗口，按钮用于关闭该窗口。

通常情况下，可以使用窗口右上角的按钮，关闭工作空间、历史命令和当前路径 3 个不常用的窗口，保留主窗口下面的命令窗口。

（5）在 MATLAB 系统中还有两个常用窗口

1）编辑窗口（Editor）：当通过主窗口顶部的菜单栏选择 File/New（建立新文件）命令，或是进行 File/Open…（打开文件）等操作时，MATLAB 启动编辑/调试器窗口，如图 1-2 所示。

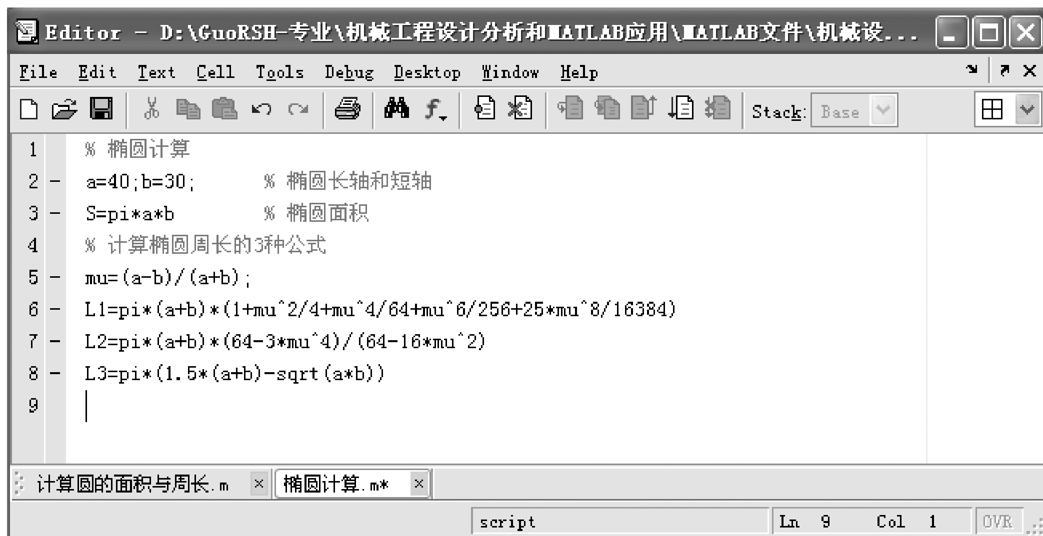


图 1-2　MATLAB 系统的编辑/调试器窗口

编辑窗口又称为程序编辑器，在窗口菜单栏和工具栏下面的最左侧区域，用于自动显示行号，右侧区域用于编辑/调试程序。如果程序语句是可执行的（即不包括空行、注释行和函数定义行等非可执行语句），则该行的左侧命令窗口之间的区域会显示横线"-"。进行程序调试时，可以在这些横线上单击鼠标以设置或去掉断点。

2）图形窗口（figure）：在"file"菜单的次级菜单"new"中执行"figure"选项，可以打开图形窗口，利用其中菜单和工具栏中的选项，可以对图形进行线型、颜色、标记、三维视图、光照和坐标轴等内容的设置。如图 1-3 所示，在图形窗口中显示绘制的 $z=xe^{(-x^2-y^2)}$ 三维曲面图，同时标注 x、y、z 三个坐标轴和图形名称，十分直观形象。

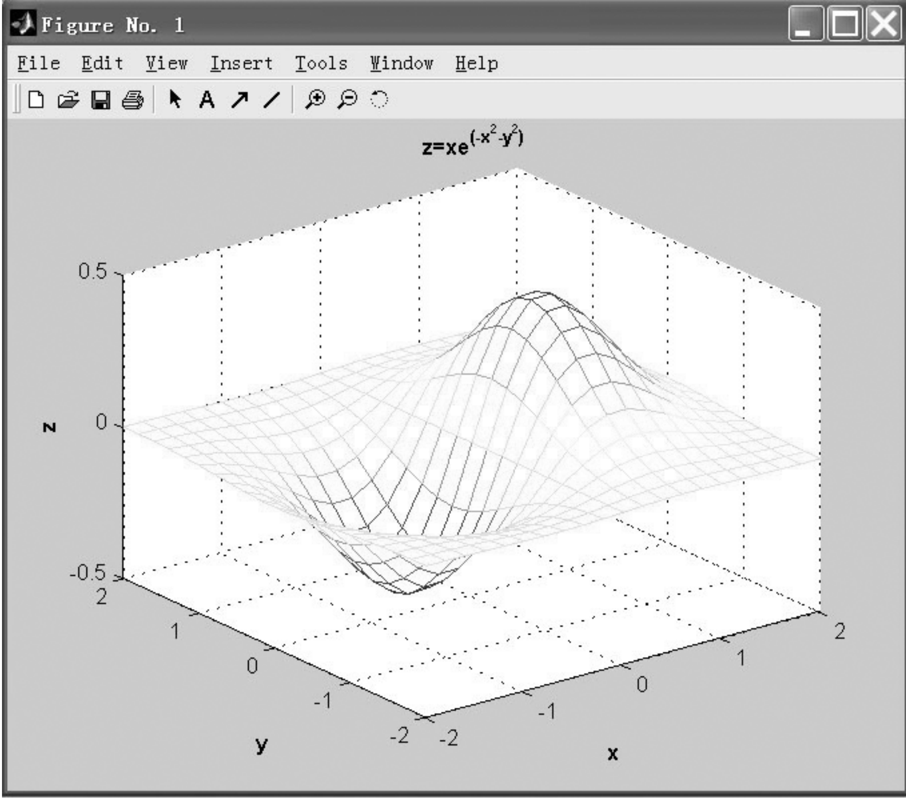


图 1-3　图形窗口

1.2.2　主窗口的菜单功能

在主窗口顶部的菜单栏主要包括“File”“Edit”“Debug”“Desktop”“Window”“Help”等子菜单项。其中常用的 file、Edit 和 Debug 子菜单的功能选项见表 1-1。

表 1-1　file、Edit 和 Debug 子菜单的功能选项

file（文件操作）	Edit（编辑操作）	Debug（调试操作）
New （建立新文件）	Undo （撤销上一步的操作）	Open M - Files when Debugging （打开 M 文件的调试工具）
Open （打开旧文件）	Redo （重复上一步的操作）	Step （调试程序的步进）
Close Command Window （关闭命令窗口）	Cut （剪切选中的内容）	Step in （进入调试程序的子函数）
Import Data （向工作空间导入数据）	Copy （复制选中的内容）	Step out （从调试程序的子函数中跳出）
Save Workspace As （保存工作空间数据）	Paste （粘贴剪贴板上内容到光标处）	Continue （继续执行程序到下一个断点）
Set path （设定搜索路径）	Paste special （粘贴剪贴板上内容到工作空间）	Clear Breakpoints in All Files （清除文件中的所有断点）

（续）

file（文件操作）	Edit（编辑操作）	Debug（调试操作）
Preferences （设置系统的属性参数）	Select All （选中当前窗口中的所有内容）	Stop if Errors/Warnings （在程序出错后提示警告信息）
Page Setup （打印页面设置）	Delete （删除选中的内容）	Exit Debug Mode （退出程序的调试模式）
Print （打印文档）	Find （查找所需的内容）	
Exit MATLAB （退出 MATLAB 系统）	Clear Command Window （清除命令窗口中的内容）	
	Clear Command History （清除历史窗口中的内容）	
	Clear Workspace （清除工作空间中的变量）	

另外，在菜单栏中还有以下子菜单。

- Desktop 子菜单：用于设置 MATLAB 用户界面的窗口。
- Window 子菜单：用于激活 MATLAB 当前活动窗口。
- Help 子菜单：用于控制 MATLAB 帮助的使用。

1.3　运算符和标点符

1.3.1　运算符

MATLAB 运算符包括算术运算符、关系运算符和逻辑运算符 3 类。

1. 算术运算符

算术运算符用于相关的数学基本运算见表 1-2。

表 1-2　算术运算符

运　算　符	功　　能	运　算　符	功　　能
+	相加	-	相减
*	矩阵相乘	.*	数组相乘
^	矩阵乘方	.^	数组乘方
\	左除	.\	数组左除
/	右除	./	数组右除

说明：

1） MATLAB 运算是定义在矩阵的基础上的，单个数据的运算只是矩阵运算的特例。

2）数组的乘、乘方、左除和右除运算需要在相应的运算符前面加点符号“.”，又称为点运算。

3）在 MATLAB 表达式中，算术运算从高到低的优先次序是：括号运算→指数运算→乘除运算→加减运算。

例 1-1　某学生的各科学习成绩分别为：语文 86、英语 91、数学 89、物理 74、化学

82，试计算该生成绩的总分和平均分。

在MATLAB命令窗口中运算提示符“>>”后面依次输入命令，并且按〈Enter〉键确认。

```
>> a=86;b=91;c=89;d=74;e=82;          % 分别用变量a、b、c、d、e储存各科成绩
>> z=a+b+c+d+e                         % 计算该生成绩的总分
z=
   422
>> p=z/5                               % 计算该生成绩的平均分
p=
   84.4000
```

说明：

1）MATLAB允许用户在一行中输入多个命令语句，它们之间用分号隔开时，命令语句的运算结果被隐藏（多个命令语句之间也可以用逗号隔开，这时命令语句的运算结果会被显示）。

2）百分号“%”后面的文本是用户自行注释内容，MATLAB不予运行。

2. 关系运算符

关系运算符见表1-3，用于比较两个对象（数、字符串、矩阵）之间的大小或不等关系，当比较的两个对象关系为真时，返回值为1；关系为假时，返回值为0。

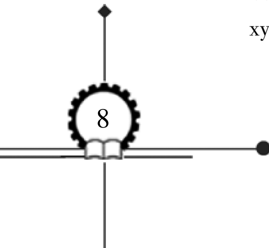
表1-3 关系运算符

运算符	功能	运算符	功能
>	大于	>=	大于等于
<	小于	<=	小于等于
==	等于	~=	不等于

说明：通常在数学表达式上使用的等于符号“=”，在MATLAB运算中的含义是赋值号，例如，$A=3.52$，是表示将数值3.52赋值给变量A。而关系运算符“==”是用于表示两个对象的相等关系。

例1-2 有两组数据：A=12、23、45、60、88和B=11、23、51、65、87，试对它们各对应元素进行关系比较。

```
>> A=[12,23,45,60,88];                % 用向量A存储数据
>> B=[11,23,51,65,87];                % 用向量B存储数据
>> dy=A>B                             % 比较向量A各对应元素是否大于向量B
dy=
     1     0     0     0     1
>> xd=A==B                            % 比较向量A各对应元素是否等于向量B
xd
     0     1     0     0     0
>> xy=A<=B                            % 比较向量A各对应元素是否≤向量B
xy=
     0     1     1     1     0
```



可见，当比较的两个对象关系为真（关系条件成立）时，返回值为 1；关系为假（关系条件不成立）时，返回值为 0。

3. 逻辑运算符

MATLAB 提供了 4 种逻辑运算符，见表 1–4。

表 1–4　逻辑运算符

运　算　符	功　　能	运　算　符	功　　能
&	与	~	非
|	或	xor	异或

逻辑表达式或逻辑函数的值是一个逻辑量，真时值为 1，假时值为 0。

例 1–3　建立 2 个数组 $a = [0\ 2\ 0\ 2]$ 和 $b = [0\ 0\ 2\ 2]$，对它们进行逻辑运算。

打开 MATLAB 程序编辑器，在编辑窗口中输入以下 7 行语句：

```
%逻辑运算
a = [0 2 0 2]
b = [0 0 2 2]
a & b                   % 2 个数组的与运算
a | b                   % 2 个数组的或运算
 ~ a                    % a 数组的非运算
xor(a,b)                % 2 个数组的异或运算
```

将编辑窗口中建立的 7 行语句复制到 MATLAB 命令窗口中运算提示符“ >> ”后面，然后将光标移动到最后 1 条语句的末尾，按〈Enter〉键运算，得到结果见表 1–5。

表 1–5　两个数组的逻辑运算结果比较

数组 a	0	2	0	2
数组 b	0	0	2	2
与（&）	0	0	0	1
或（|）	0	1	1	1
非（~）	1	0	1	0
异或（xor）	0	1	1	0

结论：

1）对于数组 a 和 b 的“与”运算，当 a 和 b 都是“0”，或者 a 和 b 其中之一是“0”时，结果为“0”；当 a 和 b 都是非“0”时，结果为“1”；

2）数组 a 和 b 的“或”运算，当 a 和 b 都是“0”时，结果为“0”；a 和 b 其中之一是非“0”，或者 a 和 b 都是非“0”时，结果为“1”；

3）对于数组 a 的“非”运算，当 a 是非“0”时结果为“0”；当 a 是“0”时，结果为“1”；

4）对于数组 a 和 b 的“或非”运算，当 a 和 b 相同时，结果为“0”；a 和 b 不同时，结果为“1”。

例 1–4　两个学生的语文、英语、数学、物理、化学等五科学习成绩分别为：$A = [68,$

77,93,80,91]和 B=[72,81,90,83,75]，试判别是否满足条件：每个学生的文科（语文、英语）平均成绩不小于75分，同时理科（数学、物理、化学）平均成绩不小于80分。

```
A=[68,77,93,80,91];
B=[72,81,90,83,75];
WA=((A(1)+A(2))/2)>=75 & ((A(3)+A(4)+A(5))/3)>=80
WB=((B(1)+B(2))/2)>=75 & ((B(3)+B(4)+B(5))/3)>=80
```

运算结果：

```
WA =
     0
WB =
     1
```

说明：其中 **A**（1）、**A**（2）、**A**（3）、**A**（4）和 **A**（5）分别表示向量 **A** 的各维元素，**B**（1）、**B**（2）、**B**（3）、**B**（4）和 **B**（5）分别表示向量 **B** 的各维元素。从运算结果可见，学生A的文科和理科成绩不满足逻辑关系条件，所以得到的逻辑量 $WA=0$；学生B的文科和理科成绩满足逻辑关系条件，所以得到的逻辑量 $WB=1$。

1.3.2 标点符

MATLAB语言中一些标点符有特殊的功能，常用的标点符见表1-6。

表1-6 常用的标点符

标点符	功能	标点符	功能
:	冒号，产生数组，或是指定矩阵行、列元素	.	小数点，或是域访问符等
;	分号，区分行，或是取消运行显示等	…	省略号，续行符
,	逗号，区分列，或是函数参数分割符等	%	百分符，注释符
()	括号，指定运算过程中的先后次序等	!	惊叹号，调用操作系统运算
[]	方括号，矩阵定义标志等	=	等号，赋值标记
{}	大括号，用于构成单元数组等	'	单引号，字符串的标示符等

应当指出，表1-6中标点符必须在键盘设置英文状态下输入。

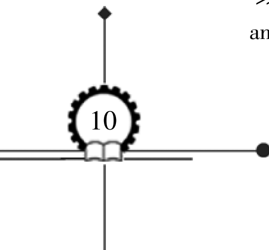
1.4 数据类型

1.4.1 数值量

MATLAB的数值量默认以双精度格式进行计算并保存在内存中，其显示格式可以通过“format”命令改变。如：

1）format short 短格式（系统默认），显示小数点后面4位有效数字，如“pi（π）”显示：

```
>> pi
ans =
      3.1416
```



说明：由于省略变量名和赋值标记“ = ”，则系统自动产生一个用作结果的默认变量“ans”。

2）format long 长格式，显示 15 位数字，如用长格式显示“1/7”：

```
>> format long
    >> 1/7
ans =
   0.14285714285714
```

3）format short e 短格式 e 方式，对非整数值按照 e 方式显示 5 位数字，如：

```
>> format short e
>> 1/7
ans =
1.4286e-001
```

4）format long e 长格式 e 方式，对非整数值按照 e 方式显示小数点后 15 位数字，如：

```
>> format long e
>> 1/7
ans =
     1.428571428571429e-001
```

5）format hex 按照 16 进制显示，如：

```
>> format hex
>> 1/7
ans =
   3fc2492492492492
```

6）format rat 用近似的有理数显示，如：

```
>> format rat
>> 0.7092
ans =
     1773/2500
```

MATLAB 语言中有一些特定的数值常量，见表 1-7。

表 1-7　MATLAB 语言中的常量

常量符号	常 量 含 义
i，j	虚数单位，定义为 $\sqrt{-1}$
pi	圆周率 π 的双精度表示
eps	容差变量（浮点运算相对精度 2.2204×10^{-16}），当某数的绝对值小于它时，可认为是 0
NaN	不定式，表示非数字量，产生在 0/0，∞/∞，0 * ∞ 等运算
Realmin	最小的正浮点数，2^{-1022}
Realmix	最大的正浮点数，2^{1023}
inf	正无穷大∞，用 0 做除数时引入此常量

MATLAB 的数据都是以双精度数值来表示的，它们在系统内部又是按照计算机通常处理方法以二进制来表示。这样，造成某些实数不能被精确地表示，而且对能够表示的实数有一个限制，存在浮点运算的相对误差，但是这些误差是小于误差上限 $eps = 2.2204 \times 10^{-16}$ 的，在 MATLAB 的命令窗口中输入“eps”值就可以得到结果。

1.4.2 字符量

字符量可用于公式推导和数学解析运算。

1）MATLAB 的字符量一般是 ASCII 值的数值数组，必须用单引号进行赋值，如

```
>> String = 'AB C'
String =
AB C
```

字符数组 String 中的每个字符（包括空格）都是字符数组的一个元素。如：

```
>> s = '1.50 3.20 5.63 7.81 9.04'
s =
  1.50 3.20 5.63 7.81 9.04
```

s 是一个浮点格式的字符数组。

2）将字符数组 *s* 转换为数值，此功能可由函数 str2num 实现，如：

```
>> str2num(s)
ans =
    1.5000    3.2000    5.6300    7.8100    9.0400
```

s 变成浮点格式的数值数组。

3）将浮点数或数组转换为字符数组，此功能可由函数 num2str 实现。

4）将符号表达式转换为数值表达式，此功能可由函数 eval 实现。如：

```
>> s = 'cos(pi/6) + sinh(3) + sqrt(2)';          % sinh()是双曲正弦函数
vs = eval(s)
vs =
   12.2981
```

1.4.3 变量

变量的表达格式是：

变量 = 表达式

1. 变量的规则

1）变量可以由数字、字母或下画线“_”组成，但是第 1 个字符必须是英文字母。

2）变量名的长度不超过 31 位。

3）不能使用函数名（如表 1-8 ~ 表 1-11 的数学函数名等）和系统保留字（如 for、input、disp、fprintf 和 end 等）作为变量名。

4）任何变量均视为一个矩阵（单一的数是矩阵的最简单形式）。

5）凡是以“i”或“j”结尾的变量作为复变量处理。如：

```
>> b = 8i
b =
     0 + 8.0000i
```

如果对“i”或“j”作一般变量赋值时，它们将不再是复数的虚数部分。

6）变量名区分大小写。如：

```
>> A = 3;a = 4;
>> A
A =
     3
>> a
a =
     4
```

可见，同一字母的大写和小写字母代表不同的变量。

2. 变量类型

1）局部变量（Local）：是在函数文件内部定义的变量。当函数运行时，它保留在自己的工作区中，只能在该函数文件内部被访问；一旦函数文件退出运行，内存变量不复存在。局部变量不需要专门进行定义。

2）全局变量（Global）：是多个函数文件共享的变量。每个使用它的函数文件都必须用“global”语句声明它为全局变量。全局变量的作用域是整个 MATLAB 工作空间，所有的函数文件都可以对它进行存取和修改。因此，定义全局变量是函数文件之间传递信息的一种手段。

需要指出，在程序设计中，全局变量固然可以带来某些方便，但破坏了函数对变量的封装，降低了程序的可读性。

1.5　基本数学函数

在 MATLAB 中常用的基本数学函数见表 1-8 ~ 表 1-11。

1.5.1　三角函数

表 1-8　三角函数

sin(x)	正 弦 函 数	sinh(x)	双曲正弦函数
asin(x)	反正弦函数	asinh(x)	反双曲正弦函数
cos(x)	余弦函数	cosh(x)	双曲余弦函数
acos(x)	反余弦函数	acosh(x)	反双曲余弦函数
tan(x)	正切函数	tanh(x)	双曲正切函数
atan2(y,x)	四象限反正切函数	atanh(x)	反双曲正切函数

（续）

cot(x)	余切函数	coth(x)	双曲余切函数
acot(x)	反余切函数	acoth(x)	反双曲余切函数
sec(x)	正割函数	sech(x)	双曲正割函数
asec(x)	反正割函数	asech(x)	反双曲正割函数
csc(x)	余割函数	csch(x)	双曲余割函数
acsc(x)	反余割函数	acsch(x)	反双曲余割函数
atan（x）	反正切函数		

应当指出，MATLAB 系统中三角函数的自变量和反三角函数值是以弧度为单位的。

例 1-5　计算正弦函数 sin 35°、反正切函数 atan0. 8204 和渐开线函数 inv 20°的值。

```
>> zx = sin(35 * pi/180)                 % 先将35°转换为弧度值,再计算其正弦值
zx =
    0.5736
>> alpha = atan(0.8204) * 180/pi         % 将计算的反正切值转换为度
alpha =
    39.3655
>> format long                           % 定义按长格式显示
>> theta = tan(20 * pi/180) - 20 * pi/180   % 渐开线函数的数学表达式
theta =
    0.01490438386734
```

1.5.2　指数和对数函数

表 1-9　指数和对数函数

exp(x)	指数函数	nextpow2(x)	最靠近 2 的幂次
log(x)	自然对数函数	pow2(x)	以 2 为底的指数函数
log2(x)	以 2 为底的对数函数	sqrt(x)	平方根函数
log10(x)	以 10 为底的对数函数		

例 1-6　计算$\log_2 \sqrt[3]{24}$和 $e^{3.8}$。

```
>> log2(24^(1/3))
ans =
      1.5283
>> exp(3.8)
ans =
       44.7012
```

1.5.3　取整和取余函数

表 1-10　取整和取余函数

fix（x）	朝零方向取整函数	round（x）	四舍五入函数
floor（x）	朝负方向取整函数	mod（y，x）	（带符号）取余函数
ceil（x）	朝正方向取整函数	rem（y，x）	（无符号）取余函数

说明：

1）fix(x)是截尾取整函数，如：

```
>> fix( [3.52  -3.52])
ans =
     3      -3
```

2）round（x）是四舍五入函数，如：

```
>> round([5.43 3.62])
ans =
     5      4
```

说明：使用函数 roundn（x，$-n$）可以将数 x 四舍五入到指定的第 n 位小数，如：

```
>> a=3.24506;roundn(a,-4)
ans =
    3.2451
```

3）mod(y,x)和 rem(y,x)都是取余函数，返回结果都是余数。rem 和 mod 的区别在于：当除数 x 和被除数 y 的正负号一样的时候，两个函数结果是等同的；当除数 x 和被除数 y 的符号不同时，mod 函数结果的符号和除数 x 的一样，而 rem 和被除数 y 一样。如：

```
>> mod( -10,4)              % 被除数 -10,除数 4
ans =
     2
>> rem( -10,4)
ans =
    -2
```

1.5.4　通用数学分析函数

表 1-11　通用数学分析函数

max(x)	求最大元素函数	sum(x)	求元素和函数
min(x)	求最小元素函数	prod(x)	求元素积函数
mean(x)	求元素平均值函数	sort(x)	按升序对元素排序函数
median(x)	求元素中值函数	std(x)	求元素标准差函数

此外，常用的基本数学函数还有阶乘函数 factorial(x)、绝对值函数 abs(x)和符号函数 sign(x)（$x>0$ 时为 $+1$，$x<0$ 时为 -1）等。

例 1-7　已知数组 A=[78 93 65 42 83 21 49 59 76 62]，找出它的最小和最大元素，并计算数组元素的平均值和标准差。

```
>>A=[78 93 65 42 83 21 49 59 76 62];
A_max=max(A)                  % 求数组元素的最大值
A_min=min(A)                  % 求数组元素的最小值
A_mean=mean(A)                % 求数组元素的平均值
```

```
A_std = std(A)                    % 求数组元素的标准差
```

运算结果：

```
A_max =
    93
A_min =
    21
A_mean =
   62.8000
A_std =
   21.3843
```

说明：标准差用来度量一组数据的离散程度。要计算一组数据的标准差，首先计算其平均值，再计算每一个元素与数组元素平均值差值的平方，最后计算平方差均值的平方根。

例1-8 使用计算式 $e=1+1/1!+1/2!+...+1/n!$ 计算当 $n=5$ 时的 e 值，试与实际自然对数底 e 的值进行比较。

```
ej = 1 + 1/factorial(1) + 1/factorial(2) + 1/factorial(3) + 1/factorial(4) + 1/factorial(5)
ee = exp(1)
es = sign(ej - ee)                    % 符号函数 sign 用于判断(ej - ee)的正负
```

运算结果：

```
ej =
    2.7167
ee =
    2.7183
es =
    -1
```



第 2 章　矩阵和数组及其运算

从数的角度看，数组和矩阵都是数的集合，在形式上没有区别，在建立、输入和保存方法上是相同的。一维数组相当于向量，二维数组相当于矩阵，所以矩阵是数组的子集。

2.1　矩阵的建立及变换

矩阵是线性代数的基本运算单元，MATLAB 的所有数值运算功能都是以矩阵为基本单位来实现的。

2.1.1　矩阵的建立

一个 m 行 n 列的矩阵由 $m \times n$ 个元素 a_{ij}组成，其中，$i=1, 2, \cdots, m$，$j=1, 2, \cdots, n$，表示为如下阵列

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以简写为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$。

1. 直接输入法

1) 矩阵可在方括号“[ ]”中以直接列出元素的方式建立，列元素之间用空格或逗号“,”隔开，行与行之间用分号“;”或〈Enter〉键隔开。例如，以下几种方式建立矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$的结果是相同的：

```
>>A=[1 2 3;4 5 6;7 8 9]          % 每个元素之间用空格分隔,行与行之间用分号分隔
>> A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]         % 每个元素之间用逗号分隔
>> A=[1 2 3                      % 行与行之间用〈Enter〉键分隔
4 5 6
7 8 9]
```

以上 3 种方式建立矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的显示结果是：

```
A =
     1     2     3
     4     5     6
     7     8     9
```

2）只有一行或一列的矩阵，分别称为行向量或列向量。如：

```
>> H = [2,4,6,8,10]
H =
     2     4     6     8    10
>> L = [3;6;9]
L =
     3
     6
     9
```

说明：上述命令语句中建立的 ***H*** 是一个 5 维行向量，***L*** 是一个 3 维列向量。

2. 建立线性分割的行向量

行向量也是一维数组。

1）利用冒号“:”表达式建立线性分割的行向量，它的格式是：

```
e1:e2:e3
```

其中，*e*1 是初始值，*e*2 是步长（*e*2 = 1 时可以省略），*e*3 是终止值。如：

```
>> x = 0:pi/5:pi
x =
     0    0.6283    1.2566    1.8850    2.5133    3.1416
```

2）利用函数 linspace（*e*1，*e*3，*n*）建立线性分割的行向量，其中 *e*1 和 *e*3 含义同上，*n* 是行向量元素的总数，*n* 省略时函数运行时自动产生 100 个元素。如：

```
>> linspace(5,20,6)
ans =
     5     8    11    14    17    20
```

3）利用函数来建立某些特定矩阵。

① 函数 zeros（*m*，*n*）可以创建 *m* 行 *n* 列各个元素为零的零矩阵。如：

```
>> zeros(2,3)
ans =
     0     0     0
     0     0     0
```

② 函数 ones（*m*，*n*）可以创建 *m* 行 *n* 列各个元素为 1 的矩阵。如：

```
>> ones(3,2)
ans =
     1     1
     1     1
```

```
        1        1
```

③ 函数 eye（m，n）可以创建 m 行 n 列主对角元素全为 1、其他元素全为 0 的单位矩阵。如：

```
>> eye(3,3)
ans =
        1        0        0
        0        1        0
        0        0        1
```

④ 函数 rand（m，n）可以创建 m 行 n 列的随机矩阵。如：

```
>> rand(2,3)
ans =
      0.9501      0.6068      0.8913
      0.2311      0.4860      0.7621
```

可见，随机矩阵中的元素是在 0 ~ 1 区间内均匀分布的随机数。每运行一次函数 rand，所得到的随机矩阵中的元素是不相同的。

2.1.2　矩阵的转置和变换

1. 矩阵的转置

矩阵的转置用单引号“′”来实现。例如，求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{bmatrix}$的转置矩阵 $\boldsymbol{B}$：

```
>> A = [1 2 3;4 5 6;7 8 9]
A =
        1        2        3
        4        5        6
        7        8        9
>> B = A'
B =
        1        4        7
        2        5        8
        3        6        9
```

可见，矩阵的转置就是将它的行与列互换。

2. 矩阵的旋转

使用函数 rot90（$\boldsymbol{A}$，K）可以将 $\boldsymbol{A}$ 矩阵逆时针方向旋转 90°的 K 倍，$K=1$ 时可以省略。例如：

```
>> A = [1 2 3;4 5 6;7 8 9]
B = rot90(A)
```

运算结果：

```
A =
     1     2     3
     4     5     6
     7     8     9
B =
     3     6     9
     2     5     8
     1     4     7
```

3. 矩阵的翻转

使用函数 flipud(***A***)可以将 ***A*** 矩阵上下翻转，即第 1 行与最后 1 行调换，第 2 行与倒数第 2 行调换，以此类推。例如：

```
>> A = [1 2 3;4 5 6;7 8 9;10 11 12]
B = flipud(A)
```

运算结果：

```
A =
     1     2     3
     4     5     6
     7     8     9
    10    11    12
B =
    10    11    12
     7     8     9
     4     5     6
     1     2     3
```

2.2 矩阵元素和子矩阵的提取

2.2.1 矩阵元素的提取

1. 通过下标提取矩阵元素

A(i,j)表示 ***A*** 矩阵第 *i* 行第 *j* 列的元素。例如，提取 ***A*** 矩阵第 3 行第 3 列元素 ***A*** (3，1)

```
>> A = [1 2 3;4 5 6;7 8 9]
A(3,1)
```

运算结果：

```
A =
     1     2     3
     4     5     6
     7     8     9
ans =
7
```

2. 通过元素序号提取矩阵元素

在 MATLAB 中，矩阵元素按列存储，首先是第 1 列，其次是第 2 列，以此类推，一直到矩阵的最后 1 列元素；每列元素按照自上而下的顺序存储。例如，通过元素序号提取 ***A*** 矩阵第 6 个元素

```
>> A = [1 2 3 4;5 6 7 8;9 10 11 12]
A(6)
```

运算结果：

```
A =
     1     2     3     4
     5     6     7     8
     9    10    11    12
ans =
    10
```

可见，矩阵元素序号与它的存储顺序是一一对应的。

3. 使用函数 find（*c*）查找符合条件的矩阵元素的行和列

函数 find(*c*)的使用格式：

```
[row,col] = find(c)
```

其中，*c* 一般为逻辑表达式；row 返回满足条件的元素的行号，col 返回满足条件的元素的列号。

例 2-1　查找矩阵 *a* = [12 34 26 17 21;61 50 89 12 8;25 62 91 23 47]中大于或等于 20、小于或等于 60 的矩阵元素。

```
a = [12 34 26 17 21;61 50 89 128;25 62 91 23 47]
[r,c] = find(a >= 20 & a <= 60);
b = find(a >= 20 & a <= 60);
disp ('符合条件的矩阵元素的行号和列号:'),[r,c]
disp ('符合条件的矩阵元素的序号:'),b'    % 向量 b 存放符合条件的矩阵元素序号
```

运算结果：

```
a =
    12    34    26    17    21
    61    50    89    12     8
    25    62    91    23    47
```

符合条件的矩阵元素的行号和列号：

```
ans =
     3     1
     1     2
     2     2
     1     3
     3     4
     1     5
```

```
     3     5
```

符合条件的矩阵元素的序号：

```
ans =
     3     4     5     7    12    13    15
```

2.2.2 子矩阵的提取

可以利用冒号表达式提取子矩阵，方法是：

1）**A**(:,j)表示 **A** 矩阵第 j 列的全部元素；**A**(i,:)表示 **A** 矩阵第 i 行的全部元素。

2）**A**(i:$i+m$,:)表示 **A** 矩阵第 $i\sim i+m$ 行的全部元素；**A**(:,k:$k+m$)表示 **A** 矩阵第 $k\sim k+m$ 列的全部元素；**A**(i:$i+m$,k:$k+m$)表示 **A** 矩阵第 $i\sim i+m$ 行内、并且是第 $k\sim k+m$ 列中的全部元素。

例 2–2 已知 5 行 4 列矩阵 **A** = [1 2 3 4;5 6 7 8;9 10 11 12;13 14 15 16;17 18 19 20]，提取子矩阵。

```
A = [1 2 3 4;5 6 7 8;9 10 11 12;13 14 15 16;17 18 19 20]
A1 = A(:,3)
A2 = A(2,:)
A3 = A(2:3,:)
A4 = A(1:3,3:4)
A5 = A(2:3,2:4)
```

运算结果：

```
A =
     1     2     3     4
     5     6     7     8
     9    10    11    12
    13    14    15    16
    17    18    19    20
A1 =                                   % 第 3 列所有行的元素
     3
     7
    11
    15
    19
A2 =                                   % 第 2 行所有列的元素
     5     6     7     8
A3 =                                   % 第 2 ~ 3 行所有列的元素
     5     6     7     8
     9    10    11    12
A4 =                                   % 第 1 ~ 3 行、第 3 ~ 4 列的元素
     3     4
     7     8
    11    12
```

```
A5 =                                    % 第2~3行、第2~4列的元素
     6     7     8
    10    11    12
```

可以利用“end”运算符表示矩阵的下标。例如，对于上述 **A** 矩阵，提取最后 1 行所有列的元素：

```
>> A = [1 2 3 4;5 6 7 8;9 10 11 12;13 14 15 16;17 18 19 20];
A6 = A(end,:)
```

运算结果：

```
A6 =    17    18    19    20
```

2.3　矩阵的运算

矩阵运算是 MATLAB 的核心，从运算的角度来看，数组和矩阵代表完全不同的两种变量，数组运算是针对数组元素之间进行运算；矩阵运算是从矩阵的整体出发，是按照线性代数法则进行运算。

2.3.1　矩阵的加法和减法

同阶（行、列数分别相等）的两个矩阵之间可以进行加法或减法运算，是指它们对应元素之间的运算。

如果矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 都是 $m\times n$ 阶矩阵，则 **A** 与 **B** 加法或减法的定义是 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}$，即矩阵 **C** 的各个元素是 $\boldsymbol{c}_{ij}=(a_{ij}\pm b_{ij})$，$(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$。

例 2–3　有两个 2 行 3 列的矩阵 $\boldsymbol{A}=[1,2,3;4,5,6]$ 和 $\boldsymbol{B}=[7,8,9;10,11,12]$，试对它们进行加法和减法运算。

```
A = [1,2,3;4,5,6]
B = [7,8,9;10,11,12]
C = A + B                               % 矩阵C存储A+B的数据
D = A - B                               % 矩阵D存储A-B的数据
```

运算结果：

```
A =
     1     2     3
     4     5     6
B =
     7     8     9
    10    11    12
C =
     8    10    12
    14    16    18
D =
```

```
   -6     -6     -6
   -6     -6     -6
```

2.3.2 矩阵的乘法

矩阵乘（*）是指两个维数相同（前矩阵的列数与后矩阵行数相等，称为两个矩阵的维数相同）的矩阵进行乘法运算。

如果 **A** 是 $m\times p$ 阶矩阵，**B** 是 $p\times n$ 阶矩阵，则矩阵 **A** 与 **B** 进行乘法运算得到的矩阵 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$ 是一个 $m\times n$ 阶矩阵，其各个元素是

$$\boldsymbol{c}_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj},(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

例 2-4 有一个 2 行 3 列的矩阵 **A** = [1,2,3;4,5,6] 和一个 3 行 4 列的矩阵 **B** = [7,8,9,10;11,12,13,14;15,16,17,18]，试对它们进行乘法运算。

```
A=[1,2,3;4,5,6]
B=[7,8,9,10;11,12,13,14;15,16,17,18]
C=A*B
```

运算结果：

```
A =
     1      2      3
     4      5      6
B =
     7      8      9     10
    11     12     13     14
    15     16     17     18
C =
    74     80     86     92
   173    188    203    218
```

可见，矩阵 **A** 和 **B** 相乘得到 2 行（矩阵 **A** 行数）4 列（矩阵 **B** 列数）的矩阵 **C**。

应当指出，矩阵乘法没有交换律。

说明：标量与矩阵相乘，是指标量与矩阵中的每个元素相乘，标量可以是乘数，也可以是被乘数。例如：

```
>> A=[1,0,1;2,1,1;1,2,1]
A =
     1      0      1
     2      1      1
     1      2      1
>> B=5*A
B =
     5      0      5
    10      5      5
     5     10      5
```

2.3.3　矩阵的求逆

根据线性代数理论，矩阵可逆的充分与必要条件是矩阵的行列式不为零。求矩阵的逆矩阵，可以使用函数 inv( )来实现。例如：

```
>> H=[2,1,2;1,2,1;3,2,1]
H =
     2     1     2
     1     2     1
     3     2     1
>> nh = inv(H)                               % 计算方阵 H 的逆矩阵
nh =
   -0.0000   -0.5000    0.5000
   -0.3333    0.6667         0
    0.6667    0.1667   -0.5000
```

例 2-5　试判定两个 2 行 2 列的方阵 $\boldsymbol{A}$ = [1 2;3 4] 和 $\boldsymbol{B}$ = [-2.0,1.0;1.5, -0.5] 是否互为逆矩阵？

```
>> A=[1,2;3,4]
A =
     1     2
     3     4
>> B=[-2.0,1.0;1.5,-0.5]
B =
   -2.0000    1.0000
    1.5000   -0.5000
>> A*B
ans =
     1     0
     0     1
>> B*A
ans =
     1     0
     0     1
```

说明：如果两个方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 满足条件 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}$ 或 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$，其中 $\boldsymbol{I}$ 是单位矩阵，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 互为逆矩阵。

2.3.4　向量的范数和矩阵行列式的值

1. 向量的范数

一个 n 维向量 $\boldsymbol{X}$ 的范数表示为

$$\|\boldsymbol{X}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

使用 MATLAB 中的函数 norm($\boldsymbol{X}$)可以计算 n 维向量 $\boldsymbol{X}$ 的范数。例如：

```
>> X=[12 23 41 96 82 34 87];
norm(X)
ans =
  164.3746
```

2. 矩阵行列式的值

如果某个矩阵是一个方阵（行数与列数相同），可以使用函数 det( )来计算矩阵行列式的值。例如：

```
>> H=[2,1,2;1,2,1;3,2,1];
det(H)
ans =
     -6
```

2.3.5 矩阵的除法

因为矩阵乘法并没有交换律，所以 $B^{-1}A$ 和 AB^{-1} 一般而言并不相等。因此 MATLAB 提供两种除法（左除运算符号“\”和右除运算符号“/”）。凡是按矩阵规则可以和逆矩阵 B^{-1} 相乘的矩阵（两个矩阵的维数相同），都可以根据左乘或右乘进行除“\”或除以“/”的计算。

1. 矩阵的左除（运算符号“\”）

在矩阵 A 的左边乘 B^{-1}，即 $B^{-1}A$，称为矩阵 B 除矩阵 A，运算符号是 $B\backslash A$。如果矩阵 A 是一个非奇异方阵，矩阵的左除 $A\backslash B$ 等于矩阵 A 的逆与 B 的左乘 $inv(A)\ B$。

应当指出：

1）如果矩阵 A 是一个方阵，表示矩阵方程 $AX=B$ 的解是 $X=A\backslash B$，或 $X=\mathrm{inv}(A)B$，这里的 X 具有与矩阵 B 相同的维数。

2）如果矩阵 A 是一个 $m\times n$ 矩阵（$m>n$），$X=A\backslash B$ 得到矩阵方程 $AX=B$ 的最小二乘解 $\mathrm{inv}(A)B$。

3）如果矩阵 B 是一个列向量 b，则 $X=A\backslash B$ 是线性系统 $AX=b$ 的解。

2. 矩阵的右除（运算符号“/”）

在矩阵 A 的右边乘 B^{-1}，即 AB^{-1}，称为矩阵 A 除以矩阵 B，运算符号是 A/B。如果矩阵 A 是一个非奇异方阵，矩阵的右除 A/B 等于矩阵 A 的逆与 B 的右乘 B inv（A）。

矩阵方程 $XA=B$ 的解是 $X=B/A$，或 $X=B$ inv（A）。

例 2-6 试对两个 3 行 3 列的方阵 $A=[2,2,3;3,4,5;6,4,3]$ 和 $B=[1,2,3;2,2,3;2,3,4]$ 进行除法运算。

```
>> A=[2,2,3;3,4,5;6,4,3]
A =
     2     2     3
     3     4     5
     6     4     3
>> B=[1,2,3;2,2,3;2,3,4]
B =
```

```
     1     2     3
     2     2     3
     2     3     4
>> L = A\B                                  % 矩阵左除
L =
          0    1.0000    1.4000
     0.5000   -1.5000   -2.3000
          0    1.0000    1.6000
>> Lv = inv(A) * B                          % 矩阵 A 的逆与矩阵 B 的左乘
Lv =
     0.0000    1.0000    1.4000
     0.5000   -1.5000   -2.3000
          0    1.0000    1.6000
>> R = A/B                                  % 矩阵右除
R =
          0    1.0000         0
    -1.0000    0.0000    2.0000
    -8.0000    1.0000    6.0000
>> Rv = A * inv(B)                          % 矩阵 B 的逆与矩阵 A 的右乘
Rv =
     0     1     0
    -1     0     2
    -8     1     6
```

线性联立方程组的矩阵形式可以写成 $\boldsymbol{A}x=\boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 维可逆方阵，$\boldsymbol{b}$ 是一个 n 维列向量。从矩阵除法可知，$x=\boldsymbol{A}\setminus\boldsymbol{b}$ 就是线性联立方程组的一组解。

例 2-7　利用矩阵除法求解 3 维线性方程组

$$\begin{cases}4x_1+6x_2-x_3=1\\5x_1-8x_2+3x_3=0\\x_1+4x_2+x_3=0\end{cases}$$

```
A = [4,6,-1;5,-8,3;1,4,1];          % 线性方程组的系数矩阵
b = [1;0;0];                        % 线性方程组的常数列向量
x = A\b                             % 运用矩阵左除求解线性方程组
r = A * x - b                       % 计算残量
R = norm(r)                         % 计算残量的向量的模
```

运算结果：

```
x =
     0.1667
     0.0167
    -0.2333
r =
   1.0e-015 *
    -0.1110
0.0555
```

```
              0
R =
1.2413e-016
```

说明：理论上残量应该是零向量，但是因为数值计算产生误差无可避免，它未必真的是零。命令语句中函数 norm($\boldsymbol{X}$)是计算 3 维向量 $\boldsymbol{X}$ 的模，通常只要残量的向量长度（范数）在 10^{-14} 以下，就认为数值解是十分精确的。

2.4 数组的运算

数组可以具有不同的维数，有一维、二维乃至高维，例如，将三维数组看作是一本有多页的书，将书的每一页数据视为一个二维数组，则数组的第 3 维用来描述该书各页的序号。因此，数组直接扩展了矩阵的功能，在图像处理和多维系统控制等问题上有所应用。

数组的运算也称为点运算，它实质上是针对数组中的每个元素进行运算。

2.4.1 数组的加法和减法

数组的加法和减法运算与矩阵的加法和减法运算，都是指两个同维的矩阵（数组）对应元素的相加和相减。因此，数组的加法运算符号“+”和减法运算符号“-”前面不需要加圆点“.”。

2.4.2 数组的乘法

数组乘“.*”是指两个同维的矩阵对应元素相乘。如果矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 都是 $m\times n$ 阶矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 数组乘法 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{A}.*\boldsymbol{B}$ 的定义是 $\boldsymbol{d}_{ij}=(\boldsymbol{a}_{ij}*\boldsymbol{b}_{ij})$。

例 2-8 计算数组 $A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]$ 和数组 $B=[1,0,0;0,1,0;0,0,1]$ 的乘积。

```
>> A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]
A =
     1     2     3
     4     5     6
     7     8     9
>> B=[1,0,0;0,1,0;0,0,1]
B =
     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1
>>C=A.*B
C =
     1     0     0
     0     5     0
     0     0     9
>> D=B.*A
D =
     1     0     0
```

```
        0     5     0
        0     0     9
```

可见，数组的乘法符合交换律。

2.4.3　数组的除法

数组除是指两个同维的矩阵对应元素相除。数组的左除运算“.\”和右除运算“./”的关系是 $a.\backslash b = b./a$。

例 2-9　计算数组 $a = [1,3,4;2,6,5;3,2,4]$ 和数组 $b = [2,3,1;4,1,2;4,5,3]$ 相除。

```
>> a = [1,3,4;2,6,5;3,2,4]
a =
        1     3     4
        2     6     5
        3     2     4
>> b = [2,3,1;4,1,2;4,5,3]
b =
        2     3     1
        4     1     2
        4     5     3
>> c = a.\b
c =
      2.0000    1.0000    0.2500
      2.0000    0.1667    0.4000
      1.3333    2.5000    0.7500
>> d = b./a
d =
      2.0000    1.0000    0.2500
      2.0000    0.1667    0.4000
      1.3333    2.5000    0.7500
```

可见，数组的除法符合交换律。

2.4.4　数组的乘方

数组乘方的运算符号是“.^”。

例 2-10　计算数组 $X = [1,3,5]$ 和数组 $Y = [2,4,6]$ 之间的乘方，计算数组 X 的 3 次方。

```
>> X = [1,3,5];Y = [2,4,6];
A = X.^Y                          % 计算数组 X 和数组 Y 之间的乘方
B = X.^3                          % 计算数组 X 的 3 次方
```

运算结果：

```
A =
             1           81         15625
B =
        1      27     125
```



第 3 章　符号运算基础

数值计算与符号计算是计算机科学中各有特点的两类计算方法。

由于计算机所有运算都基于二进制数据，所以数值计算以数值数组作为运算对象给出数值解，具有计算速度快和占用资源少的特点。但是受到计算机的存储空间和运算时间的限制，使得任何数值计算都有可能产生累积误差，结果是一个被截断的近似值。

符号计算以符号对象和符号表达式作为运算对象，得到的解析表达式永远都是精确的，但是符号计算需占用大量的系统资源和消耗较多的时间，计算耗时长。

数值计算的常用运算单元是数值矩阵，必须事先赋值才能进行计算；参与符号运算的符号表达式，也必须事先对其中的基本对象进行符号定义，才能进行相应的符号计算。

3.1　建立符号对象

3.1.1　建立符号量

1. 函数 sym 用来建立单个符号量

一般调用格式是：

```
符号量名 = sym(符号字符串)
```

其中，符号字符串可以是常量、变量、矩阵、函数或表达式。例如：

```
f1 = sym('a * x^2 + b * x + c')          % 二次三项式
f2 = sym('Dy + y^2 = 1')                 % 微分方程
A = sym('[ ]')                           % 符号矩阵
```

其中，f1 和 f2 是符号变量名；“' '”是符号标识符，其中内容可以是符号表达式，如：'a * x^2 + b * x + c'，也可以是符号方程，如 Dy + y^2 = 1'；应当指出，符号矩阵的每一行的两端都有方括号，这是与数值矩阵的一个重要区别。

2. 函数 syms 用来建立多个符号量

一般调用格式是：

```
syms 变量 1 变量 2 ... 变量 n
```

其中，各个变量之间只能使用空格分隔。例如：

```
>> syms a b c x                    % 定义 4 个符号变量
f = a * x^2 + b * x + c            % 组成符号表达式
f =
a * x^2 + b * x + c
```

3.1.2　建立符号表达式

建立一个符号表达式有 3 种方法。例如，对于二次多项式 $f = ax^2 + bx + c$，有：

1）利用单引号建立：f = 'a * x^2 + b * x + c'；

2）利用函数 sym 建立：f = sym（'a * x^2 + b * x + c'）；

3）利用函数 syms 已经定义的符号变量建立：syms a b c x；f = a * x^2 + b * x + c

3.1.3　符号表达式中变量的确定

1）在上面的符号表达式中只有 1 个变量时，系统会自动将 x 作为自变量，将 a、b、c 等作为常量处理。

2）如果符号表达式中有多个变量，系统会自动将除了 i 和 j 之外，在字母位置上最接近 x 的小写字母作为自变量，例如，…u、v、w、x、y、z。

3）利用函数 findsym 可以查找符号表达式中的变量。例如：

```
syms a b c d x y                          % 定义 6 个符号变量
fun = a * x^2 + b * x * y + c * y^2 + d;  % 定义符号表达式
findsym(fun)                              % 查找符号表达式中的变量
```

运算结果：

```
ans =
a, b, c, d, x, y
```

4）利用函数 whos 可以查看内存变量的情况，运行显示情况见例 3-1 的运算结果。

3.2　符号表达式的基本运算

3.2.1　符号表达式的四则运算

利用运算符 +、-、*、/、^实现符号表达式的四则运算，其结果是一个符号表达式。

例 3-1　比较符号常数与数值在代数运算时的差别。

```
k1 = sym(8);k2 = sym(2);          % 定义符号变量并赋值
r1 = 8;r2 = 2;                    % 数值变量赋值
fun_k = exp(k1) + sqrt(k2)        % 计算符号表达式值
fun_r = exp(r1) + sqrt(r2)        % 计算数值表达式值
whos                              % 查看内存变量的名称、字节数和类型等信息
```

运算结果：

```
fun_k =
exp(8) +2^(1/2)
fun_r =
  2.9824e +003
  Name          Size                    Bytes   Class
  fun_k         1x1                     152     sym object
  fun_r         1x1                     8       double array
  k1            1x1                     126     sym object
  k2            1x1                     126     sym object
  r1            1x1                     8       double array
  r2            1x1                     8       double array
Grand total is 22 elements using 428 bytes
```

可见，k1、k2 和 fun_ k 是符号量，r1、r2 和 fun_ r 是数值量。符号运算是进行数学演算，得到精确的解析表达式；数值计算得到近似的有限数值。

3.2.2 符号表达式分子和分母的提取

如果符号表达式是一个有理分式或可以展开为有理分式，利用函数 numden 可以提取其中的分子和分母。其一般调用格式是：

```
[n,d] = numden(s)
```

其中，s 是符号表达有理分式；n 是其分子；d 是其分母。

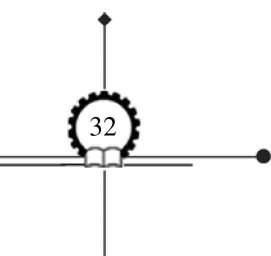
例 3-2 提取符号量 $a=0.9452$ 和符号表达式 $g=x^2+3/5x-1+4x/x-1$ 的分子和分母。

```
a = sym(0.9452);                              % 定义符号量 a
[na,da] = numden(a)                           % 提取符号量 a 的分子和分母
g = sym('(x^2 +3)/(5 * x -1) +4 * x/(x -1)'); % 定义符号表达式 g
[ng,dg] = numden(g)                           % 提取符号量 g 的分子和分母
```

运算结果：

```
na =
2363                                          % 符号量 a 的分子
da =
2500                                          % 符号量 a 的分母
ng =
x^3 +19 * x^2-x -3                            % 符号表达式 g 的分子
dg =
(5 * x -1) * (x -1)                           % 符号表达式 g 的分母
```

可见，符号量 $a=2363/2500$；符号表达式 $g=x^2+3/5x-1+4x/x-1=x^3+19x^2-x-3/(5x-1)(x-1)$。



3.2.3　符号表达式的处理

1. 符号表达式的因式分解和展开

1）函数 factor(*s*)：对符号表达式 *s* 进行因式分解。

2）函数 expand(*s*)：对符号表达式 *s* 进行展开。

3）函数 collect(*s*)：对符号表达式 *s* 进行合并同类项。

4）函数 collect(*s*，*v*)：对符号表达式 *s* 按变量 *v* 进行合并同类项。

例 3-3　有两个表达式：$f_1=(e^x+x)(x+2)$ 和 $f_2=a^3-1$，试进行因式分解和合并同类项。

```
f1 = sym('(exp(x) + x) * (x + 2)');          % 定义符号表达式 1
f2 = sym('a^3-1');                           % 定义符号表达式 2
f1_c = collect(f1)                           % 对符号表达式 1 合并同类项
f1_e = expand(f1)                            % 对符号表达式 1 进行展开
f2_f = factor(f2)                            % 对符号表达式 2 进行因式分解
```

运算结果：

```
f1_c =
x^2 + (exp(x) + 2) * x + 2 * exp(x)
f1_e =
exp(x) * x + 2 * exp(x) + x^2 + 2 * x
f2_f =
(a - 1) * (a^2 + a + 1)
```

可见，符号表达式 1 合并同类项的结果是：$f_{1_c}=x^2+(e^x+2)x+2e^x$，展开运算的结果是：$f_{1_e}=e^x x+2e^x+x^2+2x$；符号表达式 2 因式分解的结果是：$f_{2_f}=(a-1)(a^2+a+1)$。

2. 符号表达式的化简

1）函数 simplify(*s*)：应用函数规则（大量的代数恒等式：包括求和、整数幂、开方、分数幂，以及大量的函数恒等式：包括三角函数、指数函数、对数函数、贝塞尔函数、超几何分布函数、伽马函数等）对符号表达式 *s* 进行化简。

2）函数 simple(*s*)：调用其他函数对符号表达式 *s* 进行综合化简（找到包含最小字符数的表达式），并且显示化简过程。其调用格式是：

```
[r,how] = simple(s);
```

其中，输出参数 *r* 为返回的简化形式，how 为显示化简过程中使用的一种方法，它主要有以下几种形式：

① simplify 函数对表达式进行化简；

② radsimp 函数对含根式的表达式进行化简；

③ combine 函数将表达式中以求和、乘积、幂运算等形式出现的项进行合并；

④ collect 函数合并同类项，得到一个低阶有理多项式的乘积；

⑤ factor 函数实现因式分解；

⑥ expand 函数展开表达式的形式；

⑦ convert 函数完成表达式形式的转换。

多次运用 simple 能够得到最简形式。

例 3-4 运用函数 simplify(y)和 simple(y)对表达式 $y=\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}+\frac{6}{x^2}+\frac{12}{x}+8}$进行化简。

```
syms x y
y = (1/x^3 +6/x^2 +12/x +8)^(1/3);
y1 = simplify(y)
[y2,how] = simple(y)
[y3,how] = simple(y2)
```

运算结果：

```
y1 =
((2 * x +1)^3/x^3)^(1/3)
y2 =
(2 * x +1)/x
how =
radsimp
y3 =
2 +1/x
how =
expand
```

可见，运用函数 simplify 化简的结果是 $y_1=\sqrt[3]{\frac{(2x+1)^3}{x^3}}$；运用函数 simple 的 radsimp 函数功能，对含根式的表达式进行化简的结果是 $y_2=\frac{2x+1}{x}$，再次运用函数 simple 的 expand 函数功能，展开表达式 y_2 化简的结果是 $y_3=2+\frac{1}{x}$。

3.3 符号函数的复合函数和反函数

3.3.1 符号函数的复合函数

使用函数 compose 进行符号函数的合成，其方法是：

1）compose(f,g)：返回复合函数 $f(g(y))$，其中 $f=f(x)$ 和 $g=g(y)$。例如：

```
syms x y;
f = 1/x^3;
g = tan(y);
fg = compose(f,g)
```

运算结果：

```
fg =
1/tan(y)^3
```

2）compose(f,g,z)：返回自变量为 z 的复合函数 $f(g(z))$，其中 $f=f(x)$，$g=g(y)$。

例如：

```
syms x y z;
f = 1/x^3;
g = tan(y);
fgz = compose(f,g,z)
```

运算结果：

```
fgz =
1/tan(z)^3
```

3）compose(f,g,x,z)：返回复合函数$f(g(z))$，并且使 x 成为函数f 的独立变量。例如，$f=\cos(x/t)$，则 compose(f,g,x,z)返回 $\cos(g(z)/t)$；compose(f,g,t,z)返回 $\cos(x/g(z))$。

```
syms x y t z;
f = cos(x/t);
g = tan(y);
fgxz = compose(f,g,x,z)
fgtz = compose(f,g,t,z)
```

运算结果：

```
fgxz =
cos(tan(z)/t)
fgtz =
cos(x/tan(z))
```

4）compose(f,g,x,y,z)：返回复合函数$f(g(z))$，并且使 x 与 y 分别成为函数f 与 g 的独立变量。例如，$f=\cos(x/t)$，$g=\sin(y/u)$，compose(f,g,x,t,z)返回 $\cos(\sin(z/u)/t)$；而 compose(f,g,x,u,z)返回 $\cos(\sin(y/z)/t)$。

```
syms x y t u z;
f = cos(x/t);
k = sin(y/u);
fkxuz = compose(f,k,x,u,z)
```

运算结果：

```
fkxuz =
cos(sin(y/z)/t)
```

3.3.2 符号函数的反函数

使用函数 finverse 求符号函数的反函数。其调用格式是：

```
finverse(f,v)
```

表示对变量 v 求符号函数 f 的反函数；变量 v 省略时，对默认变量求符号函数 f 的反函数。

```
>> syms x y
```

```
fx = finverse(1/tan(x))            % 求反函数,自变量为 x
fx =
atan(1/x)
>> f = x^2 + y;
fy = finverse(f,y)                 % 求反函数,自变量为 y
fy =
-x^2 + y
```

3.4 符号表达式与数值表达式之间的转换和运算精度控制

3.4.1 符号表达式与数值表达式之间的转换

1）利用函数 sym 可以将数值表达式转换为它的符号表达式。例如：

```
>> a = 13.72;
as = sym(a)
as =
343/25                  % 数值 a 的分数形式(符号形式)
>> c = 6.5^3 + tan(pi/9);
cs = sym(c)
cs =
4837657124523585 * 2^(-44)
```

可见，$c = 6.5^3 + \tan 20^\circ = \dfrac{4837657124523585}{2^{44}}$。

2）利用函数 eval 可以将符号表达式转换为它的数值表达式。例如：

```
>> s = ' sqrt(5) * sin(pi/3) + exp(4)';
vs = eval(s)
vs =
   56.5346                     % 符号表达式 s 转换的数值
```

可见，符号表达式 $s = \sqrt{5}\sin 60^\circ + e^4 \approx 56.5346$。

3）利用函数 subs（fun，x，xt）可以将符号表达式 fun 中的符号变量 x 替换为数值变量 xt。例如：

```
>> syms x y
f = x^2 + 2 * x * y + 3 * y^2;
fs = subs(f,x,2)
```

运算结果：

```
fs =
4 + 4 * y + 3 * y^2
```

3.4.2 符号和数值运算精度控制

1）函数 vpa（s，n）作用是控制表达式或变量 s 的运算精度为设定的有效数字位数 n。应

当指出，表达式和变量 s 无论是哪种类型，vpa 返回的值都是符号表达式或符号量，它只能进行初等运算，不能进行关系运算等。

2）函数 double(s) 将符号表达式或变量 s 转换为双精度型浮点数。

例 3-5　计算字符表达式 $f=\sqrt{25.6}+\pi e^{3.4}$ 的字符解和数值解，计算精度为 15 位有效数字，并且判定其值是否不小于 100。

```
f = sym('sqrt(25.6) + pi * exp(3.4)');
fs = vpa(f,15)                          % 表达式 f 的 15 位有效数字的字符解
fv = double(fs)                         % 字符解 fv 转换为数值解
format long;fvl = fv                    % 使用长格式显示数值解
whos                                    % 查看内存变量情况
```

计算结果：

```
fs =
99.1946408366013
fv =
    99.1946
fvl =
   99.19464083660130

  Name      Size         Bytes   Class
  f         1x1          168     sym object
  fs        1x1          156     sym object
  fv        1x1            8     double array
  fvl       1x1            8     double array
Grand total is 42 elements using 340 bytes
```

可见，表达式 f 和变量 fs 是字符型，变量 fv 和 fvl 是数值型。



第 4 章　M 文件和流程控制结构

用户在进行 MATLAB 操作时，经常需要输入较多的命令语句，而且有些还需要重复地输入，如果仍然按照上述在 MATLAB 命令窗口（Command Window）进行直接交互式命令操作方式，就显得比较烦琐和费时。为了改进这种情况，MATLAB 提供了文件编程操作方式。

MATLAB 中所有的文件和函数都分别对应一个 M 文件（以 . m 为后缀的文本文件），它可以在任何文本编辑器中进行显示和编辑，最方便的是可在 MATLAB 程序编辑器窗口中进行（图 1–2）。M 文件的代码是纯 ASCII 码字符，可以在 MATLAB 命令窗口（Command Window）键入命令：“type function_name”来查看。

MATLAB 初次运行 M 文件时，会将它编成代码并且存储到计算机内存中，当用户再次运行同一个 M 文件时，系统将直接从计算机内存中读取 M 文件的代码，会极大地加快运行速度。

4.1　M 文件的分类

M 文件有命令文件（Script File）和函数文件（Function File）两种形式。

4.1.1　命令文件　（Script File）

命令文件也称为脚本文件，通常只是一系列命令语句的组合，没有输入参数，也不返回参数，运行时只需要在命令窗口键入文件名即可。

例 4–1　试编制一命令文件，计算圆的面积与周长。

```
%计算圆的面积与周长的命令文件(rsc.m)
r = input('请输入圆的半径(mm)r = ');            % 使用键盘输入圆的半径 r
s = pi * r^2;                                   % 计算圆的面积
c = 2 * pi * r;                                 % 计算圆的周长
fprintf('圆的半径   r = %3.4f mm \n',r)          % 使用格式化命令输出数据
fprintf('圆的面积   s = %3.4f mm^2 \n',s)
fprintf('圆的周长   c = %3.4f mm \n',c)
```

将上述命令文件以文件名“rsc. m”存储在 MATLAB7.0 系统所在的工作目录：D:\MATLAB7\work 中。然后在命令窗口键入文件名“rsc”再按〈Enter〉键，即可以运行该文件。

说明：命令文件中使用键盘输入函数 input 和格式化输出函数 fprintf 的方法见 4.2.1 节。

```
>> rsc
请输入圆的半径(mm)r = 35
圆的半径    r = 35.0000 mm
圆的面积    s = 3848.4510 mm^2
圆的周长    c = 219.9115 mm
>> rsc
请输入圆的半径(mm)r = 58
圆的半径    r = 58.0000 mm
圆的面积    s = 10568.3177 mm^2
圆的周长    c = 364.4247 mm
```

应当指出，命令文件在运行过程中可以调用 MATLAB 系统工作域内的所有数据，所产生的变量也是全局变量，并且一直保存在工作域内，直到用户执行命令“clear”或“quit”时为止。

4.1.2　函数文件

MATLAB 函数或函数文件是系统中已经设计好的完成某一种特定的运算或实现某一种特定的功能的子程序，MATLAB 系统几十种工具箱中提供了丰富的函数库，它们是 MATLAB 系统的重要组成部分。在使用这些函数或函数文件时，系统是将其作为命令来对待的，所以函数又称为函数命令。

函数文件常用于需要反复调用和不断改变参数的场合，它可以接受参数，也可以返回参数，它的运行必须通过语句调用。函数文件的特点是：

1）函数文件的第一条可执行的语句必须是函数文件定义语句：

```
function [输出参数] = 函数名(输入参数)
```

2）函数文件可以带有多个输出参数和输入参数，也可以没有输出参数。当输入参数或输出参数多于一个时，参数之间一般用逗号隔开。

3）函数文件的命名规则与变量名的规则相同。两个函数的函数名即使相同，但是输入参数或输出参数的数目不同，它们的含义也不同。

4）函数文件运行时，自动创建其独自的函数工作空间（function workspace），过程变量都存储这个工作空间中。函数文件执行之后只保留最后结果，不保留任何过程，所定义的变量也只在函数内部起作用，并且随着该函数文件调用的结束而自动被清除。

5）应当指出，以 function 开头的函数文件是一个独立的 M 文件，必须单独储存在 MATLAB 系统所在的工作目录：D:\MATLAB\work 中。将函数文件存盘时，默认状态下系统自动储存为“函数名 . m”的函数文件（即函数文件名与函数名相同）。如果函数文件名与函数名不同，MATLAB 在调用时将以函数文件名为准（忽略函数名）。

例 4-2　试使用调用函数文件方法，计算渐开线齿轮的齿廓函数值。

```
% 1-建立计算渐开线函数的函数文件(jkxhs.m)
function [theta,rk] = jkxhs(alpha,rb)
hd = pi/180;                                    % 将角度转换为弧度的自定义变量
```

```
theta = tan(hd. * alpha) - hd. * alpha;        % 渐开线展角
rk = rb. /cos(hd. * alpha);                    % 渐开线向径
```

将该文件以文件名“jkxhs. m”保存在 MATLAB 工作区路径中。

```
% 2-建立调用命令文件
m = input(   输入齿轮模数(mm)   m =' );
z = input(   输入齿轮齿数        z =' );
ha = input(   输入齿高系数       ha =' );
hd = pi/180;
alpha_f = 20;                        % 分度圆压力角
% 计算齿轮的几何尺寸
r = m * z/2;                         % 分度圆半径
rb = r * cos(alpha_f * hd);          % 基圆半径
ra = r + ha * m;                     % 齿顶圆半径
alpha_a = acos(rb/ra);               % 齿顶圆压力角
% 调用计算渐开线函数的函数文件
alpha = 0:alpha_a/hd/5:alpha_a/hd; % 计算 6 点压力角值
[theta,rk] = jkxhs(alpha,rb);
thetak = theta/hd;                   % 渐开线展角转换为度
% 输出计算结果
fprintf(     齿轮模数        m = % 6.4f mm \n'  ,m)
fprintf(     齿轮齿数        z = % 3.0f \n'  ,z)
fprintf(     齿高系数        ha = % 3.4f \n'  ,ha)
fprintf(     基圆半径        rb = % 6.4f mm \n'  ,rb)
fprintf(     分度圆半径      r = % 6.4f mm \n'  ,r)
fprintf(     齿顶圆半径      ra = % 6.4f mm \n'  ,ra)
fprintf(     齿顶圆压力角    alpha_a = % 6.4f ° \n'  ,alpha_a/hd)
disp'        渐开线展角      thetak(°)' ,thetak
disp'        渐开线向径      rk(mm)' ,rk
```

将该命令文件复制到 MATLAB 的命令窗口（Command Window）中运行，通过键盘输入齿轮的有关参数，输出的计算结果如下：

```
  齿轮模数          m = 5.0000 mm
  齿轮齿数          z = 28
  齿高系数          ha = 1.0000
  基圆半径          rb = 65.7785 mm
  分度圆半径        r = 70.0000 mm
  齿顶圆半径        ra = 75.0000 mm
  齿顶圆压力角      alpha_a = 28.7119°
  渐开线展角 thetak(°)
thetak =
          0     0.0193     0.1563     0.5386     1.3151     2.6721
  渐开线向径 rk(mm)
rk =
65.7785    66.1102    67.1224    68.8680    71.4430    75.0000
```

说明：有时为了在命令文件中直接描述数学函数，可采用函数 inline( )，它的功能是建立一个内联函数，其调用格式是：

```
fun = inline('函数表达式',自变量列表)
```

其中自变量列表中每个自变量之间均需要用单引号括起来，相互之间用逗号分隔。例如，渐开线函数方程 $\theta_k = \tan\alpha_k - \alpha_k$ 可以用函数 inline( )语句描述为：

```
theta = inline('tan(alpha * pi/180) - pi/180. * alpha','alpha');
```

其中，alpha（表示压力角 α_k），是函数式中的自变量。

当给自变量 alpha 赋值后，采用 theta（alpha）形式即可以调用该渐开线函数方程进行运算。

函数 inline( )与采用函数文件 function 相比，不需要另外建立单独的函数 M 文件；但是它只能返回 1 个变量，不支持较复杂的语句结构，适用于一个语句就能够求出函数值的形式。

4.2 流程控制结构

程序运行流程控制结构有 3 种：顺序结构、循环结构和选择结构，用以实现各种不同的运算功能。

4.2.1 顺序结构

顺序结构是最简单的程序流程控制结构，它根据语句排列的顺序自上而下执行，直至最后一个语句。主要包括数据的输入、计算和处理，以及计算结果的输出等内容。

1. 数据的输入（input 函数）

从键盘输入数据，可以使用 input 函数来进行，该函数的调用格式为：

```
z = input('屏幕上显示的提示信息')
```

当执行该函数时，系统等待从键盘输入数据后按〈Enter〉键，输入的数据就存入变量 z 中。

如果输入的是字符，则格式是：

```
z = input('屏幕上显示的提示信息','s')
```

其中's'表示键盘输入字符。如果没有上述的第 2 个参数's'，则键盘输入的字符需要用单引号括起来，如'ABCD'。

2. 数据的输出（disp 和 fprintf 函数）

1）函数 disp 是自由格式输出数据，用于直接输出字符或是数值，例如：

```
>> a = [2,4,6];
>> disp a
a
>> disp(a)
2     4     6
```

注意：以上两例自由格式输出中，“a”表示字符，“(a)”表示向量 $\boldsymbol{a}$ 的值。

2）函数 fprintf 在屏幕上输出格式化数据，一般调用格式是：

```
fprintf('屏幕上显示的提示信息 %format \n',v)
```

其中,% 后面的 format 用来表示数据输出时采用的格式："*d*" 表示整数；"*e*" 表示实数（科学计算法形式）；"*f*" 表示浮点实数（小数形式）；"*g*" 表示由系统自动选取上述两种格式之一；"*s*" 表示输出字符串。"\n"是换行符号，以免下一个输出数据或提示符也挤在同一行。"V" 是输出变量或矩阵。例如：

```
>> fprintf('The pi is %4.8f \n', pi)
The pi is   3.14159265
```

可见，在两个单引号之间包括输出的字串"The pi is"、输出数据的格式"%4.8f"（表示按照浮点数格式，8 位小数，小数点前面的"4"没有实际意义），输出变量 pi（π）的数据。例如

```
>> fprintf('34 的 5 次方 =%2.8e \n', 34^5)
34 的 5 次方 =4.54354240e+007
```

可见，输出"34^5"值为指数格式的数据，8 位小数（小数点前面的"2"没有实际意义），即$34^5=4.54354240\times10^7=45435424$。

4.2.2 循环结构

循环结构是指按照给定的条件重复执行指定的语句。MATLAB 提供了两种循环结构：for 循环结构和 while 循环结构。

1. for 循环结构

for 循环结构的格式是：

```
for i=c0:cb:cn
    循环体
end
```

其中，c0 是循环变量 *i* 的初值；cb 是循环变量 *i* 的步长，当 cb 取单位步长时可以省略；cn 是循环变量 *i* 的终值。

for 循环结构必须以 end 作为循环结构的结束标志，否则以后的语句都被认为是 for 循环体的内容。

这是一种预设循环次数的结构，循环变量 *i* 从取初值 c0 开始执行循环体；每循环一次 *i* 增加一个步长 cb，重复执行循环体；直到 *i* 大于终值 cn 时跳出循环体，继续执行 end 后面的语句。

for 循环结构可以嵌套使用，也可以与其他流程控制结构嵌套使用。

例 4–3 用筛选法求自然数 2 至 *m* 范围内的全部素数。

素数是大于 1，且除了 1 和它本身以外，不能被其他任何整数整除的整数。用筛选法求素数的基本思想是：要找出 2 ~ *m* 的全部素数，首先在其中划去 2 的倍数（不包括 2），然后划去 3 的倍数（不包括 3），由于 4 已被划去，再找 5 的倍数（不包括 5）……直到再划去不超过$\sqrt{m}$的数的倍数，剩下的数都是素数 。

```
% 用筛选法求自然数 2~m 范围内的全部素数
m=input('输入素数的最大范围 m=');
```

```
x = 2:m;
for k = 2:sqrt(m)
    n = find(rem(x,k) == 0 & x ~ = k);          % rem 是取余函数; ~ = 是关系运算符“不等于”
    x(n) = [];                                   % 去掉非素数
end
x
```

运算结果:

```
     输入素数的最大范围 m = 30
x =
     2     3     5     7     11     13     17     19     23     29
```

M 文件中，函数 rem（x，k）可获取自然数 x 与被除数 k 的余数；关系表达式 x ~ = k 表示 k 不等于自然数 x。因此，变量 n 是记录自然数 x 中能够被 k 整除，并且不等于 k 的自然数 x 的数组 x 的下标。

例 4–4　在 MATLAB 函数库中有一个魔方矩阵函数 magic( )，它能够生成每行、每列和对角线上元素的和都相等的 N 阶方阵。试编制 M 文件验证魔方矩阵的特性。

```
% 验证魔方函数 magic( )的 M 文件(yz_magic. m)
n = input('请输入方阵的阶数    n = ')
x = magic(n);                      % 生成魔方矩阵
for j = 1:n
      h = 0;
      for i = 1:n
            h = h + x(j,i);
      end
      H(j) = h;                    % 魔方矩阵各行元素之和
end
for j = 1:n
    l = 0;
    for i = 1:n
            l = l + x(i,j);
      end
      L(j) = l;                    % 魔方矩阵各列元素之和
end
J = sum(diag(x));                  % 魔方矩阵各对角线元素之和
disp'魔方矩阵的阶数'  ,n
disp'魔方矩阵'  ,x
disp'魔方矩阵各行元素之和'  ,H
disp'魔方矩阵各列元素之和'  ,L
disp'魔方矩阵各对角线元素之和'  ,J
```

计算结果:

```
魔方矩阵的阶数
n =
     5
```

```
魔方矩阵
x =
      17      24       1       8      15
      23       5       7      14      16
       4       6      13      20      22
      10      12      19      21       3
      11      18      25       2       9
魔方矩阵各行元素之和
H =
      65      65      65      65      65
魔方矩阵各列元素之和
L =
      65      65      65      65      65
魔方矩阵各对角线元素之和
J =
      65
```

可见，5 阶魔方矩阵各行元素、各列元素、各对角线元素之和都等于 65。

2. while 循环结构

while 循环结构的格式是：

```
while(条件)
      循环体
end
```

其中的“条件”是一个关系表达式，当关系表达式的值为真时自动执行循环体，直到关系表达式的值条件为假，转向循环体结束标志 end 后面的语句。

应当指出，while 循环执行过程中会改变 while 后面关系表达式的值，否则这个 while 循环是一个死循环，因此 while 循环执行次数是不定的。

在 for 循环结构和 while 循环结构中，使用“break”命令可终止循环结构（在多重嵌套循环结构中，“break”命令只能跳出包含它的最内层循环）的运行。

例 4–5　水仙花数是指一个 3 位数，其各位数字的立方和等于该数本身，试用 while 循环结构检索水仙花数。

```
% 检索水仙花数
m = 100;
while (m <= 999);
      m3 = fix(m/100);                    % 保存百位数字
      m2 = rem(fix(m/10),10);             % 保存十位数字
      m1 = rem(m,10);                     % 保存个位数字
      if m == m3^3 + m2^3 + m1^3;         % 关系表达式:各位数字立方和等于该数本身
            disp(m)
      end
      m = m + 1;                          % 循环执行过程中循环条件变量 m 值逐渐递增
end
   153
```

```
370
371
407
```

其中，fix( )是截尾取整函数，rem( )是求余函数。

4.2.3 选择结构

选择结构是指按照给定的条件是否成立，分别执行不同的语句。MATLAB 提供了两种选择结构：if 选择结构和 switch 选择结构。

1. if 选择结构

```
if (条件 1)
      语句组 1            % 满足条件 1 时执行该语句组
elseif (条件 2)
      语句组 2            % 满足条件 2 时执行该语句组
      …
else
     语句组 n+1          % 上面的条件均不满足时执行该语句组
     end
```

条件结构中的各个条件是一个关系表达式，当关系表达式的值为真时，自动执行相应的语句组，然后执行 end 语句后面的语句。

例 4-6 用选择结构建立样条函数 $f=\begin{cases}0 & (x<0，x\geqslant 2)\\ x & (0\leqslant x<1)\\ 2-x & (1\leqslant x<2)\end{cases}$ 的判断函数文件。

```
% 样条函数的判断函数文件
function f=pdc(x)                 % 该函数文件的输出参数为 f
if x<0
     f=0;
elseif x<1
     f=x;
elseif x<2
     f=2-x;
else
     f=0;
end
```

将该文件以文件名“pdc. m”保存在 MATLAB 工作区路径中。然后在 MATLAB 命令窗口中运行如下调用语句，显示结果为：

```
>> pdc( -3.5)
ans =
     0
>> pdc(0.8)
ans =
```

```
     0.8000
 >> pdc(2.8)
ans =
      0
```

2. switch 选择结构

```
switch 开关表达式
    case 常量表达式 1
        语句组 1
    case 常量表达式 2
        语句组 2
        …
    otherwise
        语句组 n
end
```

当开关表达式的值与对应常量表达式的值匹配时，执行相应的语句组，然后执行 end 语句后面的语句。如果开关表达式的值与所有的常量表达式的值不匹配，执行 otherwise 后面的语句组，然后执行 end 语句后面的语句。

例 4-7 用选择结构判断输入百分制成绩的等级，其中各个等级的标准是：A＝90～100 分，B＝80～89 分，C＝70～79 分，D＝60～69 分，E＝60 分以下，并且对不合理的成绩输入给出出错信息。

```
 >> % 判断输入百分制成绩的等级
fs = input('请输入百分制成绩 fs =');
switchfix((fs+10)/10)
    case{1 2 3 4 5 6}
        disp('* 成绩等级:E')
    case{7}
        disp('* 成绩等级:D')
    case{8}
        disp('* 成绩等级:C')
    case{9}
        disp('* 成绩等级:B')
    case{10}
        disp('* 成绩等级:A')
    otherwise
        switchfs
            case {100}
                disp('* 成绩等级:A')
            otherwise
                disp('@ 输入成绩不在 0-100 范围内')
            end
end
```

运行 M 文件时，屏幕显示的结果是：

```
请输入百分制成绩   fs = 86
 * 成绩等级:B
```

例 4-8　用选择结构建立判断一个整数能否被 7 整除的 M 文件。

```
 >> % 判断一个整数是否能够被 7 整除
n = input('         请输入一个整数   n = ' );
switch mod(n,7)
        case 0
                fprintf( '%d 是 7 的倍数 \n' ,n)
        otherwise
                fprintf( '%d 不是 7 的倍数 \n' ,n)
end
```

运行 M 文件时，屏幕显示的结果是：

```
        请输入一个数字   n = 65
65 不是 7 的倍数
        请输入一个数字   n = 18466
18466 是 7 的倍数
```



第 5 章　数据可视化

数据可视化和图形处理功能是 MATLAB 的特色，它提供了一些灵活易用的二维和三维图形功能函数，包括图形的创建、控制、修饰和处理等功能，可以直观地显示数学函数、计算数据和仿真结果。

5.1　绘制二维曲线

二维数据是将平面坐标上的数据点集用线图联接起来的平面图形。常用的平面坐标系是直角坐标系，还可以使用对数坐标系和极坐标系。数据点集可以是向量或矩阵形式。

在平面直角坐标系中绘制二维曲线使用的函数格式是：

```
plot(x1,y1,m1,x2,y2,m2,…)
```

它用于在平面直角坐标系中同时绘制 y 向量对应于 x 向量的 $y1-x1$、$y2-x2$、…等各条曲线。其中，每条曲线数据点集的 y 向量和 x 向量的长度相等。

其中 m1、m2、…是描述各图形性质（包括线型、粗细和颜色）的参数选项，见表 5-1。如果它们省略，MATLAB 系统所绘制的各条曲线一律为“实线”类型，同一图形窗口中的不同曲线依次按照“蓝、绿、红、青、品红、黄、黑”7 种颜色自动着色。

表 5-1　绘图函数中的常用参数选项

曲线类型		曲线颜色				标记符号			
选项	意义	选项	意义	选项	意义	选项	意义	选项	意义
'-'	实线	'b'	蓝色	'g'	绿色	'*'	星号	'p'	五角形
'--'	虚线	'r'	红色	'c'	青色	'.'	点号	'h'	六角形
':'	点线	'm'	品红色	'y'	黄色	'x'	叉号	'o'	圆圈
'-.'	点画线	'k'	黑色	'w'	白色	'v'	下三角	's'	方形
'none'	无线					'^'	上三角	'd'	菱形
						'>'	右三角	'<'	左三角

说明：

1）图形保持和刷新函数。

```
hold on / hold off
```

函数 hold on 用于保持当前图形，使得以后再用函数 plot 绘制的新图形叠印在原来的图形上；hold off 用于取消原来图形的保护状态。

2）在图形窗口中绘制一条直线。其函数的调用格式是：

```
line([ax,bx],[ay,by])
```

其中，$[ax,bx]$是直线起点 a 和终点 b 的横坐标；$[ay,by]$是直线起点 a 和终点 b 的纵坐标。

5.2　图形格式设定和修饰

5.2.1　设置图形窗口

1）创建图形窗口函数：

```
figure(N)
```

其中，参数 N 表示一个图形窗口的号码，用来识别一个图形窗口的号码。

在调用绘图函数时，MATLAB 系统也会自动创建一个图形窗口。

2）分隔图形窗口函数：

```
subplot(m,n,i)
```

将图形窗口分隔成 $m \times n$ 个子图形矩阵，并且选择第 i 个子图形作为当前图形。

5.2.2　系统坐标控制

1）系统坐标轴的刻度范围会随着绘图函数中矢量和矩阵中元素值的范围自动确定（即默认值为 axis auto）。

2）指定二维坐标轴的刻度范围函数：

```
axis([xmin xmax ymin ymax])
```

其中，参数[*x*min *x*max *y*min *y*max]分别表示 X 坐标轴和 Y 坐标轴的最小和最大值。如果是三维图形，则在参数列表后面增加表示 Z 坐标轴的最小和最大值：*Z*min *Z*max。

3）纵、横坐标轴采用等长刻度函数：

```
axis equal
```

5.2.3　标注图形

1）图形标题标注函数：

```
title( 字符 )
```

2）X 和 X 轴标题标注函数：

```
xlabel( 字符 )
```

```
ylabel( 字符 )
```

如果是三维图形，则 Z 轴的标题标注函数为：

```
zlabel( 字符 )。
```

3）标注字符函数：

```
text(x,y', 字符 )
```

其中，(x,y)表示图形标注第一个字符的起始坐标位置。

4）用鼠标标注字符函数：

```
gtext( 字符 )
```

执行该命令后，图形窗口中出现随着鼠标移动的十字光标，在图形选中位置右击鼠标，在光标位置显示需要标注的字符。

5）图例标注函数：

```
legend( 图例1' ', 图例2' ,…)
```

用于标记绘制线图的线型、颜色或数据点等图例，可以通过移动鼠标拖动图例到图形窗口的适当位置。

6）添加/去掉网格线函数：

```
grid on / grid off
```

5.2.4 特殊符号的标注

1. 特殊符号转换控制字符

在图形标注中有时需要用到特殊符号的输入，常用的字符转换见表 5-2，可以从表中选择相应的转换控制字符。

表 5-2 常用的字符转换

控制字符	转换字符	控制字符	转换字符	控制字符	转换字符	控制字符	转换字符
\alpha	α	\rho	ρ	\pi	π	\sim	~
\beta	β	\omega	ω	\Pi	Π	\approx	≈
\gamma	γ	\Omega	Ω	\sigma	σ	\neq	≠
\delta	δ	\Delta	Δ	\Sigma	Σ	\pm	±
\epsilon	ε	\nabla	∇	\tau	τ	\times	×
\zeta	ζ	\lambda	λ	\varsigma	ζ	\div	÷
\eta	η	\mu	μ	\xi	ξ	\perp	⊥
\theta	θ	\nu	ν	\partial	∂	\leq	≤
\phi	φ	\upsilon	υ	\infty	∞	\geq	≥
\Phi	Φ	\psi	ψ	\propto	∝	\angle	∠
\chi	χ	\Psi	Ψ	\in	∈	\circ	°

2. 对文本标注的显示控制

1）\bf：黑体；\bf：斜体；\rm：标准形式（系统默认）。

2）需要显示“\”“{”“^”等符号，使用“\”来引导调用，如“\ {”等。

3）对于在数学表达式中遇到的上标和下标，分别使用“^”和“_”来引导调用，而相应的上标字符和下标字符放在大括号“{}”内。如果上标字符或下标字符只是单一字符，可以省略大括号“{}”。

例 5-1　在平面直角坐标系的图形窗口中绘制函数 $y_1 = e^{-0.5x}\cos(4\pi x)$ 和 $y_2 = 2e^{-0.5x}\cos(\pi x)$ 的图像。

```
% 绘制一维函数曲线
x = 0:pi/100:2 * pi;
y1 = exp( -0.5 * x). * cos(4 * pi * x);
plot(x,y1','-r');                        % 曲线是实线,红色
hold on;                                 % 保持图形
y2 = 2 * exp( -0.5 * x). * cos(pi * x);
plot(x,y2','--b');                       % 曲线是虚线,蓝色
grid on;                                 % 网格线
% 标注图形名称和坐标轴名称
title('一维函数曲线')
xlabel('0 \leq x \leq 2\pi')
ylabel('y')
% 标注曲线函数式
gtext('y_1 = e^{ -0.5x}cos(4\pix)(实线)')
gtext('y_2 = 2e^{ -0.5x}cos(\pix)(虚线)')
```

在该绘图命令文件中，标注 X 坐标轴的函数 xlabel 语句中，用“\ leq”转换为字符“≤”，用“\ pi”转换为字符“π”。

执行上面的绘制图形的 M 文件，在图形窗口中显示的一维函数曲线如图 5-1 所示。

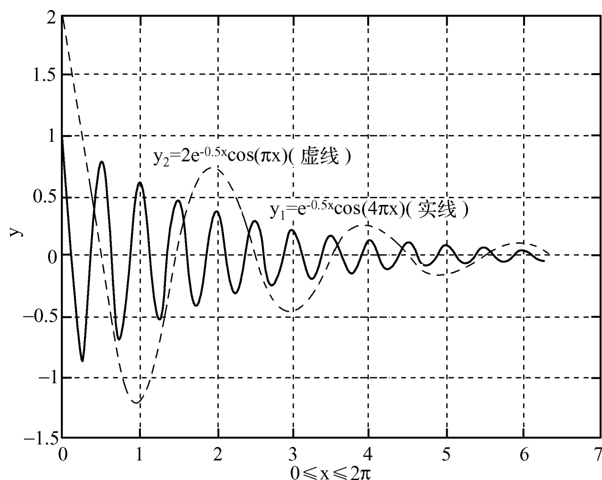


图 5-1　绘制函数图像

5.3 在极坐标系中绘制曲线

在极坐标系中绘制曲线的函数格式是：

```
polar(theta,rho,m)
```

其中，theta 表示极角；rho 表示极径；*m* 是描述图形性质的选项参数，见表 5-2。

例 5-2 在极坐标窗口中绘制极坐标方程 $\rho = e^{\cos\theta} - 2\cos 4\theta + \sin^3\theta/12$ 的曲线。

```
% 极坐标绘图
theta = linspace(0,24 * pi,1200);
rho = exp(cos(theta)) - 2 * cos(4. * theta) + (sin
(theta/12)).^3;
polar(theta,rho);
gtext('\it\bf \rho = e^{cos\theta} - 2cos4\theta +
sin^3(\theta/12)');
```

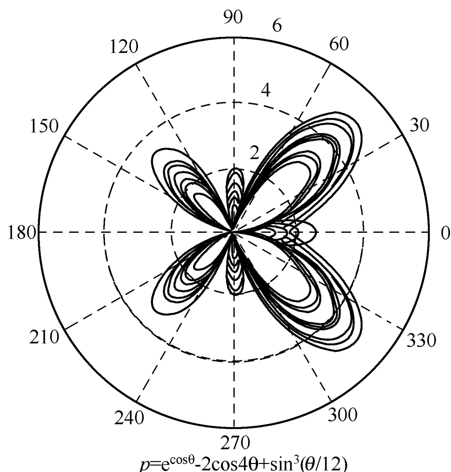


图 5-2 极坐标图形

说明：该极坐标绘图命令文件的最后一个语句标注文本函数 gtext 中的有关参数是：用“\it”定义标注文本采用斜体，用“\bf”定义标注文本采用黑体，用“\rho”转换为字符“ρ”，用“\theta”转换为字符“θ”。

该命令文件的运行结果如图 5-2 所示。

5.4 符号函数绘图

1）符号绘图函数 1：

```
fplot(fun,[xmin xmax ymin ymax])
```

其中，fun 是要绘制的函数，可以是定义函数的 M 文件名，也可以是以 *x* 为变量的可计算字符串；[*x*min *x*max *y*min *y*max]表示函数绘图的区间。

fplot 函数可以自适应地对函数进行采样，能很好地反应函数的变化规律。它可以在一个图形窗口中画出多个图形，但不能绘制参数方程或隐函数 $f(x,y)=0$ 的图形。

2）符号绘图函数 2：

```
ezplot(fun,[xmin xmax ymin ymax])
```

其中，输入参数的意义与绘图函数 1 相同。

fun 是包含单个符号变量 *x* 的字符表达式，默认画图区间 [-2π, 2π]，如果 *f* 包含两个符号变量 *x* 和 *y*，则画出隐函数 $f(x,y)=0$ 的图形。

符号绘图函数 ezplot 可以在图形窗口上图形标题处自动标注出字符表达式 fun。

例 5-3 试用符号绘图函数绘制函数 $y_1 = 0.5e^{x/3} - \sin x$ 和 $y_2 = \sin 3x\cos x$ 的图像。

```
%采用符号绘图函数
%(1) 绘图函数 fplot
subplot(1,2,1)
y1 = inline('0.5 * exp(x/3) - sin(x)');              %定义函数
a = -6;b = 6;            % 定义横轴区间
fplot(y1,[a,b]);                                     % 符号函数绘图
title('y_1 = 0.5e^{x/3} - sinx');                    % 标注图形标题
X1 = [-6 6];X2 = [0 0];
line(X1,X2);                                         %绘制横轴
Y1 = [0 0];Y2 = [-1.5 4.5];
line(Y1,Y2);                                         %绘制纵轴
xlabel('-6 \leq x \leq 6');                          % 标注 x 轴
ylabel('y');                                         % 标注 y 轴
%(2) 绘图函数 ezplot
subplot(1,2,2)
a = 0;b = pi;
x = a:pi/50:b;
y2 = inline('sin(3 * x) * cos(x)');                  % 定义函数
ezplot(y2,[a,b]);                                    % 符号函数绘图
title('y_2 = sin(3x)cos(x)')
grid on;
X1 = [a b];X2 = [0 0];
line(X1,X2);                                         % 绘制横轴
xlabel('0 \leq x \leq \pi');
ylabel('y');
```

运行该命令文件，显示的图形如图 5-3 所示。

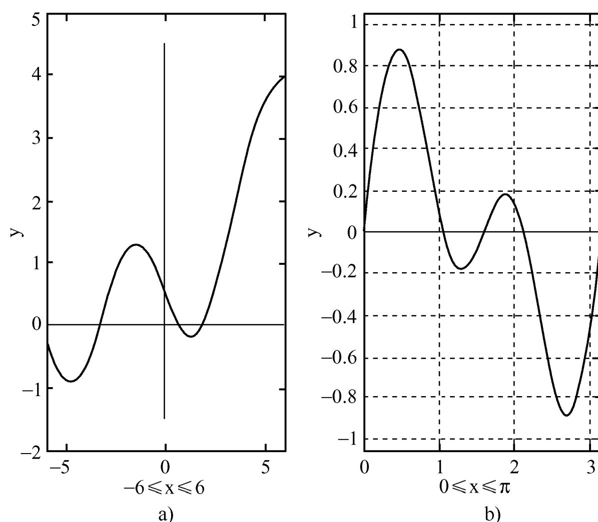


图 5-3　绘制符号函数图像

a）$y_i = 0.5^{x/3} - \sin x$　b）$y_2 = \sin 3x \cos x$

5.5 填充图形

图形填充函数 patch(x,y,c)和 fill(x,y,c)的用法基本相同，是根据节点坐标 x 和 y 数据（x 和 y 可以同为向量或是同为矩阵）创建二维多边形，用 c 指定的节点颜色填充二维多边形区域。

1. 用函数 patch 填充图形

例 5-4 绘制一维函数 $y=\sin x e^{-x/5}$ 的图形，并且用函数 patch 填充横坐标 $x=2\sim5$ 范围内函数曲线 $y=f(x)$ 与横坐标之间的区域。

```
%用函数 patch 填充图形
x=0:pi/100:4*pi;y=sin(x).*exp(-x/3);
plot(x,y,'r')
hold on;
ax=0;bx=4*pi;
zx=[ax bx];zy=[0 0];
line(zx,zy);                                    % 绘制横坐标轴
xp=2:0.01:5;
yp=sin(xp).*exp(-xp/3);
patch([2,xp,5],[0,yp,0],'b')                    % 用函数 patch 填充图形指定区域
xlabel('\bf\it 0 \leq x \leq 4\pi');
ylabel('\bf\it y');
title('\bf 用函数 patch 填充图形');
gtext('\bf\it y=sin(x)e^{(-x/3)}');
```

需要注意的是，函数中的 ***xp***、***yp*** 向量代表填充多边形的顶点，特别要注意选择开始和结束的点。M 文件运行结果如图 5-4 所示。

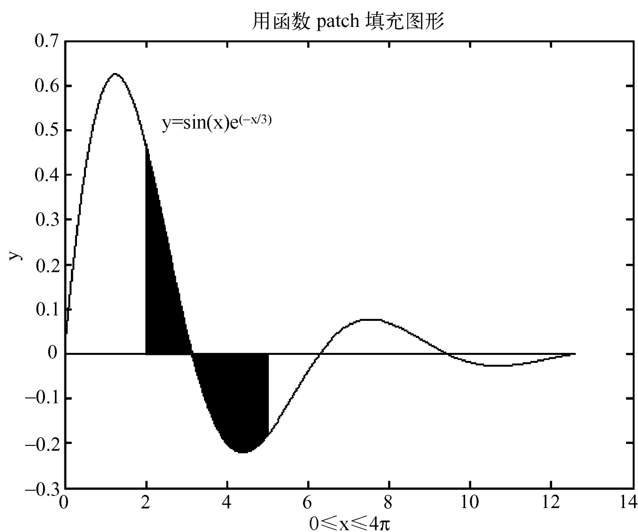


图 5-4 使用函数 patch 绘制填充图形

2. 用函数 fill 绘制填充图形

例 5-5　绘制一维函数 $y=\cos x e^{-x/5}$ 的图形，并且用函数 fill 填充横坐标 $x=7\sim10$ 范围内函数曲线 $y=f(x)$ 与横坐标之间的区域。

```
x=0:pi/100:4*pi;
y=cos(x).*exp(-x/5);
plot(x,y,'r');
hold on
ax=0;bx=4*pi;
zx=[ax bx];zy=[0 0];
line(zx,zy);
xf=7:0.01:10;
yf=cos(xf).*exp(-xf/5);
fill([7,xf,10],[0,yf,0],'g');
xlabel('\bf\it 0 \leq x \leq 4\pi');
ylabel('\bf\it y');
title('\bf 用函数 fill 填充图形');
gtext('\bf\it y=cos(x)e^{(-x/5)}');
```

M 文件运行结果如图 5-5 所示。

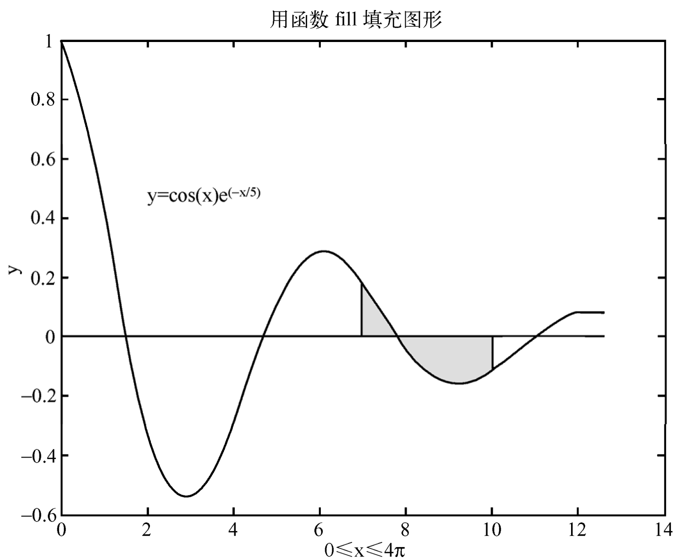


图 5-5　使用函数 fill 填充图形

5.6　绘制三维图形

5.6.1　绘制三维曲线

绘制三维曲线的函数 plot3( )，与绘制二维曲线的函数 plot( )类似，其调用格式是：

```
plot3(x1,y1,z1,m1,x2,y2,z2,m2,…)
```

它用于在三维直角坐标系中同时绘制 z 元素对应于 x，y 元素的各条曲线，其中 m1，m2……是各条曲线图形性质的参数选项，见表 5-1。

例 5-6

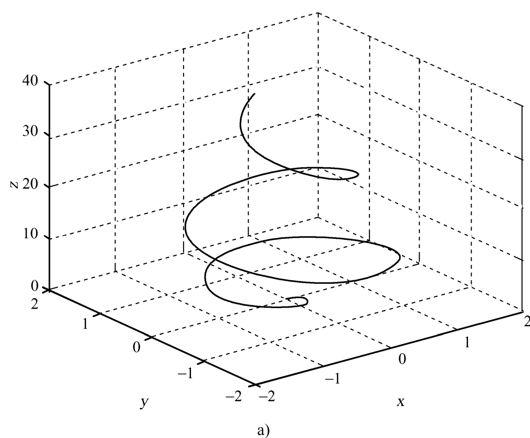
1）试绘制参数方程 $\begin{cases} x = t^3 e^{-t} \sin(3t) \\ y = t^3 e^{-t} \cos(3t) \\ z = t^2 \end{cases}$ （$0 \leqslant t \leqslant 2\pi$）的三维曲线。

2）试绘制二维函数方程 $z = \sin x + \cos 1.5y$ 的三维曲线，其中二维变量 x 和 y 的取值范围都是 $[-\pi, \pi]$。

```
% 1)绘制参数方程的三维曲线
t=0:0.1:2*pi;
x=t.^3.*exp(-t).*sin(3*t);
y=t.^3.*exp(-t).*cos(3*t);
z=t.^2;
plot3(x,y,z)
grid
xlabel('\bf\it x=t^3e^{-t}sin3t');
ylabel('\bf\it y=t^3e^{-t}cos3t');
zlabel('\bf\it z=t^2');
title('\bf 参数方程的三维曲线');

% 2)绘制二维函数的三维曲线
[x,y]=meshgrid(-pi:0.3:pi);
z=sin(x)+cos(1.5.*y);
plot3(x,y,z);
grid
xlabel('\bf\it x');ylabel('\bf\it y');zlabel('\bf\it z');
title('\bf z=sinx+cos1.5y');
```

绘图文件的运行结果如图 5-6 所示。



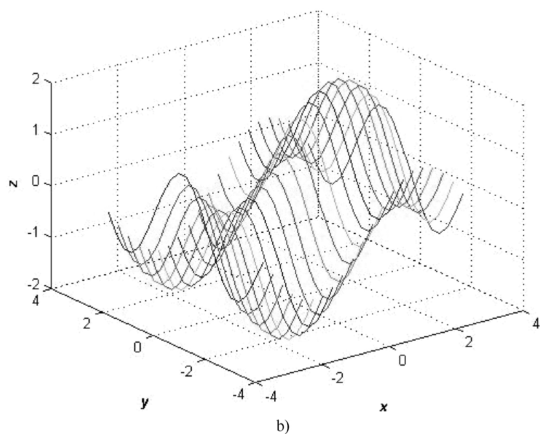


图 5-6 三维曲线

a）三维曲线 b）$z = \sin x + \cos 1.5y$

5.6.2　绘制三维曲面

绘制三维曲面的主要内容包括：生成三维绘图数据[x,y]、由平面网格点矩阵[x,y]计算曲面函数矩阵 $\boldsymbol{z}=f(x,y)$ 和绘制三维曲面等步骤。

1. 创建三维图形矩阵

1）生成平面网格点坐标矩阵：绘制二维函数 $z=f(x,y)$ 的三维曲面图，首先在直角坐标系 XOY 平面上选定一个矩形区域 $\boldsymbol{D}=[a,b]\boldsymbol{X}[c,d]$，将其分隔成 $m\times n$ 个小矩形的网格，m 是 X 方向在[a,b]区域内的线性等分数，n 是 Y 方向在[c,d]区域内的线性等分数，各个网格点的坐标的集合就是矩形区域 $\boldsymbol{D}$ 的平面网格坐标矩阵。

生成平面网格点坐标矩阵的函数调用格式是：

[X,Y] = meshgrid(x,y)。

其中，输入参数（$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$）是两个行向量，$\boldsymbol{x}$ = a：$d1$：b，$\boldsymbol{y}=a$：$d2$：b，$d1$ 与 $d2$ 分别是 $\boldsymbol{X}$ 方向与 Y 方向网格的间距（$d1=1$ 或是 $d2=1$ 可以省略）；输出参数[$\boldsymbol{X}$,$\boldsymbol{Y}$]中 $\boldsymbol{X}$ 是由行向量 $\boldsymbol{x}$ 的重复行组成的方阵，$\boldsymbol{Y}$ 是由列向量 $\boldsymbol{y}$ 转置的重复列组成的方阵。

当输入参数 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ 时，平面网格点坐标矩阵的函数调用格式为[$\boldsymbol{X}$,$\boldsymbol{Y}$] = meshgrid($\boldsymbol{x}$)。

例 5-7　给定两个向量 $\boldsymbol{x}$ = [1,2,3,4]和 $\boldsymbol{y}$ = [2,3,4,5,6,7]，试生成平面网格点矩阵。

```
% 生成平面网格点矩阵
x = 1:4,y = 2:7,
[X,Y] = meshgrid(x,y);
disp('重复行的方阵'),X
disp('重复列转置的方阵'),Y
```

运算结果：

```
x =
     1     2     3     4
y =
     2     3     4     5     6     7
重复行的方阵
X =
     1     2     3     4
     1     2     3     4
     1     2     3     4
     1     2     3     4
     1     2     3     4
     1     2     3     4
重复列转置的方阵
Y =
     2     2     2     2
     3     3     3     3
     4     4     4     4
     5     5     5     5
     6     6     6     6
```

```
        7        7        7        7
```

可见生成的平面网格点矩阵[$\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$]的行数等于列向量 $\boldsymbol{y}$ 的列数，列数等于行向量 $\boldsymbol{x}$ 的行数。

2）对平面网格点矩阵[$\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$]上的坐标($x,y$)逐点计算函数值 $z=f(x,y)$，它的集合就是二维函数曲面的三维图形矩阵[x,y,z]。

如果输入参数列表中 x 是 m 维向量，$\boldsymbol{y}$ 是 n 维向量，则 $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 是 $m\times n$ 阶二维矩阵。因此，二维曲面函数矩阵 $\boldsymbol{z}$ 的各点坐标是[$x(i),y(j),z(i,j)$]($i=1\sim m,j=1\sim n$)。

2. 三维曲面绘图函数

1）绘制三维网线图函数：

```
mesh(x,y,z)
```

其中，输入参数列表中 $\boldsymbol{x}$ 是 n 维向量，$\boldsymbol{y}$ 是 m 维向量，$\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 是 $m\times n$ 阶二维矩阵。下面三维绘图函数中的输入参数($\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$)意义都与此相同。

绘制三维网格混合图形（包含等高线）函数：

```
meshc(x,y,z)
```

函数 meshc 的实质是创建一个与二维等高线图相匹配的网线图。

2）绘制三维曲面图函数：

```
surf(x,y,z)
```

该函数实质是对网线之间的网线元进行填充，形成三维曲面图。

绘制三维曲面混合图形（包含等高线）函数：

```
surfc(x,y,z)
```

该函数实质是创建一个与二维等高线图匹配的曲面图。

3）等高线绘图函数。绘制二维等高线函数：

```
contour(z)
```

该函数实质是创建一个二维函数 $\boldsymbol{z}$（$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$）定义的二维等高线。

绘制三维等高线函数：

```
contour3(x,y,z,n)
```

其中，参数 n 是指定等高线条数。

4）标注等高线高程函数：

```
clabel()
```

例 5-8 绘制二维函数 $z=-\sin\sqrt{x^2+y^2}$ 的三维曲面图，其中二维变量 x 和 y 的取值范围都是［−4，4］。

```
% 绘制旋转曲面
% 产生二维网格矩阵
[x,y] = meshgrid(-4:0.2:4);
% 二维函数表达式
```

```
z = -sin(sqrt(x.^2 + y.^2));
% 绘制三维曲面图
mesh(x,y,z);
xlabel('x\in[-4,4]','fontsize',12);
ylabel('y\in[-4,4]','fontsize',12);
zlabel('z = -sin(sqrt(x^2 + y^2))','fontsize',12);
title('旋转曲面','fontsize',14,'fontname','黑体');
```

M 文件中的修饰参数说明：fontsize 表示字号大小（常用 12～16），fontname 表示字体名称（如宋体、黑体、隶书等）。为了更加直观、清晰地显示图形的特征，可以单击图形窗口“Figure”工具栏中的“Rotate 3D”按钮，按住鼠标左键，移动鼠标对三维图形进行旋转操作。该 M 文件运行和旋转后显示的图形如图 5-7 所示。

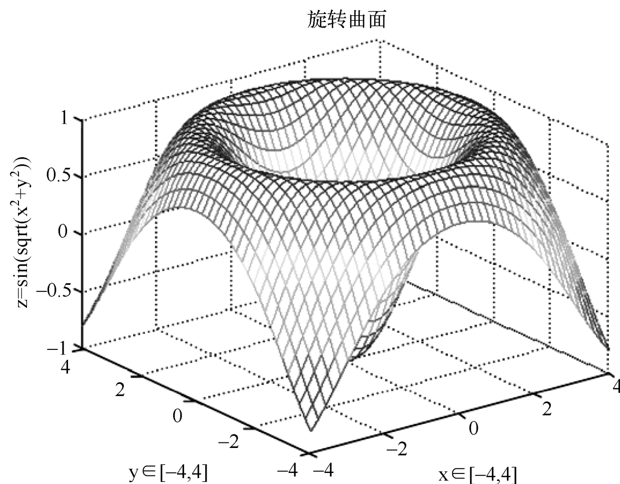


图 5-7　三维旋转曲面图

5）绘制二维符号函数的三维图形。与一维符号函数绘图函数格式 ezplot(fun,[*x*min *x*max],*m*)类似，二维符号函数的绘图函数调用格式是：

```
ezmesh(fun,[xmin xmax ymin ymax],m)
```

其中，fun 表示 M 文件的函数名，或是二维变量为 x，y 的字符串；[*x*min *x*max *y*min *y*max] 表示二维变量为 x，y 的函数绘图区间；m 是描述图形性质的参数选项，见表 5-1。

例 5-9　绘制二维函数 $z=\dfrac{2xy}{1+x^2+y^2}$ 的三维曲面图，其中二维变量 x 和 y 的取值范围分别是 $-5\leqslant x\leqslant 5$ 和 $-2\pi\leqslant y\leqslant 2\pi$。

```
% 绘制符号函数的三维曲面图
% 定义符号变量
syms x y
% 二维函数的符号表达式
fun = 2 * x * y/(1 + x^2 + y^2);
% 绘制三维曲面图
ezmesh(fun,[-5,5,-2 * pi,2 * pi],40)
```

```
xlabel('-2\pi \leq x \leq 2\pi','fontsize',13);
ylabel('-2\pi \leq y \leq 2\pi','fontsize',13);
zlabel('2xy/(1+x^2+y^2)','fontsize',13);
title('三维曲面','fontsize',15,'fontname','楷体');
```

M 文件的运算结果如图 5-8 所示。

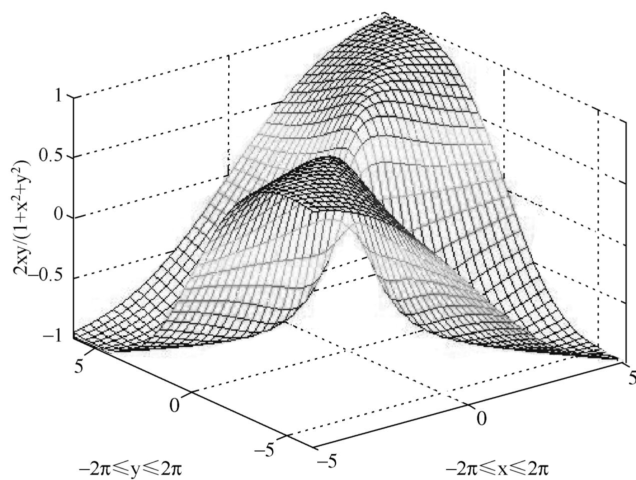


图 5-8　绘制符号函数的三维曲面图



第6章 多项式运算和数据插值

若干个单项式的和组成的式子称为多项式，其中每个单项式称为多项式的项，这些单项式中的最高次数，就是这个多项式的次数。多项式是代数学中最基本的研究对象之一。多项式是简单的连续函数，它的几何图形是一条平滑曲线。

在工程测量和科学实验中，所获得的数据通常是离散的。例如，反映某种函数关系 $y=f(x)$ 的 n 个数据节点为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，…，(x_n, y_n)。数据插值是在离散数据的基础上，使用线性函数、多项式函数或样条函数等构造一个连续函数 $y=g(x)$，使得这条构造函数的连续曲线通过全部给定的离散数据点。插值是离散函数逼近的重要方法，利用它可通过函数在有限个点处的取值状况，估算出函数在其他点处的近似值。

6.1 多项式运算

多项式的幂级数形式为

$$y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

6.1.1 符号多项式的生成

多项式运算通常是符号运算，根据已知的多项式，使用函数生成符号多项式的格式是：

```
poly2sym(P,'x')
```

其中，参数 $\boldsymbol{P}$ 是多项式系数向量，$\boldsymbol{P}=[a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n]$；$x$ 是自变量，可以省略。

6.1.2 求多项式的值和根

1）求多项式值的函数调用格式是：

```
polyval(P,b)
```

其中，多项式的系数向量 $\boldsymbol{P}=[a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n]$；$b$ 是多项式变量 x 的值。

例6-1 计算多项式 $y(2.5)=3x^5+2x^3+x^2+7$ 的值。

在 MATLAB 中多项式是以向量的形式存储的，因此直接输入多项式的系数向量，系统会按照降幂自动将向量元素分配给多项式的各项系数，从而创建多项式。

```
% 计算多项式的值
P=[3 0 2 1 0 7];                    % 多项式的系数向量
y=poly2sym(P)                       % 符号工具箱转换函数
x=2.5;                              % 自变量 x 取值
yx=polyval(P,x)                     % 多项式的值
```

程序运行结果：

```
y =
3*x^5+2*x^3+x^2+7
yx =
   337.4688
```

2）求多项式的根（即多项式的零点）的函数调用格式是：

```
roots(P)
```

其中，参数 $\boldsymbol{P}$ 是多项式的系数向量，$\boldsymbol{P}=[a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n]$。

例 6-2 计算多项式 $y(2.5)=3x^5+2x^3+x^2+7$ 的根。

```
>> % 计算多项式的根
P=[3 0 2 1 0 7];          % 多项式的系数向量
X0=roots(P)               % 多项式的根
```

M 文件运行结果：

```
x0 =
         -1.1254
         -0.2821 + 1.2085i
         -0.2821 - 1.2085i
          0.8448 + 0.7954i
          0.8448 - 0.7954i
```

由于是 5 次多项式，所以计算结果有 5 个根，其中 1 个是实根，4 个复根。当多项式的系数均为实数时，全部复根都以共轭对的形式出现。

6.1.3 多项式的乘法和除法运算

1）多项式的乘法运算。多项式乘法运算的函数调用格式是：

```
conv(P1,P2)
```

其中，输入参数（$\boldsymbol{P}1$，$\boldsymbol{P}2$）分别是参与运算的两个多项式系数向量。该函数运行后返回多项式积的系数向量。

2）多项式的除法运算。多项式除法运算的函数调用格式是：

```
deconv(P1,P2)
```

其中，输入参数($\boldsymbol{P}1$,$\boldsymbol{P}2$)分别是参与运算的两个多项式的系数向量。该函数运行后返回多项式商的系数向量。

例 6-3 计算以下两个多项式的积和商。

$$y_1 = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x + 2$$
$$y_2 = 3x^5 + 2x^3 + x^2 + 7$$

```
% 计算多项式的乘法和除法运算
P1 = [1 -3 2 1 2];                    % 多项式 1 的系数向量
y1 = poly2sym(P1)
P2 = [30 2 1 0 7];                    % 多项式 2 的系数向量
y2 = poly2sym(P2)
J = conv(P1,P2)                       % 多项式的乘法运算
yJ = poly2sym(J)
S = deconv(J,P1)                      % 多项式的除法运算
```

运算结果：

```
y1 =
x^4-3*x^3+2*x^2+x+2
y2 =
3*x^5+2*x^3+x^2+7
J =
    3    -9    8    -2    7    11    -16    16    7    14
yJ =
3*x^9-9*x^8+8*x^7-2*x^6+7*x^5+11*x^4-16*x^3+16*x^2+7*x+14
S =
    3    0    2    1    0    7
```

可见，两个多项式的乘法运算后得到多项式 ***J***，再除以多项式 ***P***1 后得到的多项式 ***S***，与多项式 ***P***2 相同。

6.1.4　多项式的导数和积分

1）多项式的导数。计算多项式导数的函数调用格式是：

```
polyder(P)
```

其中，输入参数 ***P*** 是多项式的系数向量。该函数运行后返回多项式导数的系数向量。

2）多项式的积分。计算多项式积分的函数调用格式是：

```
polyint(P)
```

其中，输入参数 ***P*** 是多项式的系数向量。该函数运行后返回多项式积分的系数向量。

例 6-4　计算如下多项式的导数和积分

$$y = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x + 2$$

```
% 计算多项式的导数和积分
P = [1 -3 2 1 2];                     % 多项式的系数向量
y = poly2sym(P)
DS = polyder(P)                       % 多项式的导数
JF = polyint(P)                       % 多项式的积分
```

运算结果：

```
y =
x^4-3 * x^3 +2 * x^2 + x +2
DS =
     4    -9    4    1
JF =
   0.2000   -0.7500   0.6667   0.5000   2.0000        0
```

6.2 数据插值

多项式插值是最常见的一种函数插值。在一般插值问题中，若选取函数 Φ 为 n 次多项式，由插值条件可以唯一确定一个 n 次插值多项式满足上述条件。从几何上看可以理解为：已知平面上 $n+1$ 个不同点，要寻找一条 n 次多项式曲线通过这些点。插值多项式一般有两种常见的表达形式，一种是拉格朗日插值多项式，另一种是牛顿插值多项式。

为了避免多项式高次插值可能出现的大幅度波动现象，在实际应用中通常采用分段低次插值来提高近似程度。三次样条插值作为一种全局化的分段插值方法，成为比较理想的工具。

6.2.1 一维数据插值

1. 一维数据插值函数

对于给定的 n 个插值节点 x_1，x_2，…，x_n 及对应的函数值 y_1，y_2，…，y_n，一维数据插值函数调用格式是：

```
y0 = interp1(x,y,x0,'k')
```

它可以对插值区间内的任意插值点 x_0 的函数值 y_0 进行计算。其中，k 是插值方法：

1）'linear'（默选值）是线性插值。它将与插值点 x_0 邻近的 2 个数据点用直线联接，然后在直线上选取插值点函数值 y_0。

2）'nearest' 是最近点等值插值。它根据插值点 x_0 与已知数据点远近程度，选取其中较近的数据点进行插值操作。

3）'cubic' 是 3 次多项式插值。它根据插入已知数据点构造一个 3 次多项式 $y=g(x)$，然后计算插值点函数值 $y_0=g(x_0)$。

4）'spline' 是 3 次样条插值。它在每个分段内构造一个 3 次多项式，使其插值函数除了满足插值条件外，还要求在各个节点处满足光滑联接条件。

例 6-5　已知实验数据来自一维函数 $y=x^5e^{-4x}\cos x$ 在区间［0～4］内间距为 0.2 的离散值。试根据生成的数据进行插值处理，比较它们的插值结果。

```
% 一维数据离散插值
x =0:0.2:4;
y = x.^5. * exp( -4 * x). * cos(x);
figure(1)
plot(x,y,'k',x,y,'ro');
```

```
xlabel('\bf\it x');ylabel('\bf\it y');
title('\bf x^5e^{-4*x}cosx');
x1 =0:0.1:4;
y1 = interp1(x,y,x1,'linear');                    % 线性插值
y2 = interp1(x,y,x1,'nearest');                   % 最近点等值插值
y3 = interp1(x,y,x1,'cubic');                     % 3 次多项式插值
y4 = interp1(x,y,x1,'spline');                    % 3 次样条插值
figure(2)
subplot(2,2,1);plot(x,y,'ro',x1,y1,'--')
xlabel('\bf\it x');ylabel('\bf\it y');title('\bf 线性插值');
subplot(2,2,2);plot(x,y,'ro',x1,y2,'--')
xlabel('\bf\it x');ylabel('\bf\it y');title('\bf 最近点等值插值');
subplot(2,2,3);plot(x,y,'ro',x1,y3,'--')
xlabel('\bf\it x');ylabel('\bf\it y');title('\bf 3 次多项式插值');
subplot(2,2,4);plot(x,y,'ro',x1,y4,'--')
xlabel('\bf\it x');ylabel('\bf\it y');title('\bf 3 次样条插值');
```

M 文件运行输出结果如图 6-1 和图 6-2 所示。

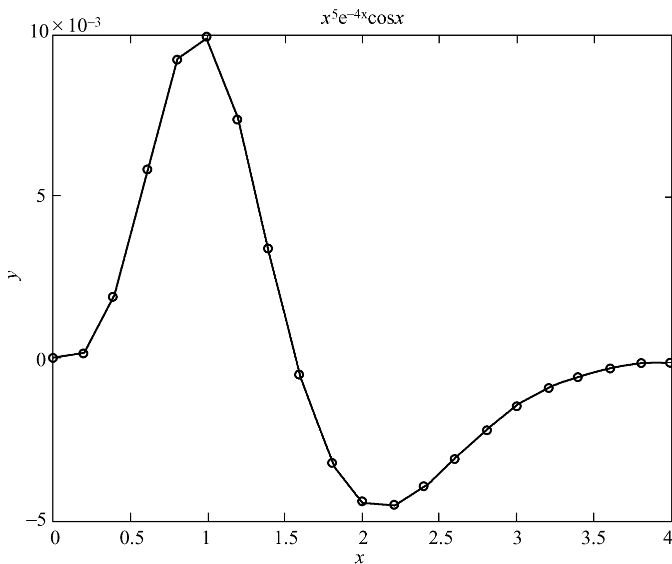


图 6-1　一维离散数据线图

如图 6-1 所示，直接将离散数据点用直线联接起来形成的函数曲线比较粗糙，特别是在函数变化率较大的区间[0 ~2]内更为显著。

选择较密集的离散插值点，使用一维数据插值函数 interp1( )进行插值拟合，如图 6-2 所示的各个子图，线性插值情况与图 6-1 所示的情况相同，最近点等值插值的拟合效果较差，3 次多项式插值拟合效果较好，3 次样条插值拟合效果最好。

2. lagrange 插值

对于给定的 n 个插值节点 x_1，x_2，…，x_n 及对应的函数值 y_1，y_2，…，y_n，利用 n 次 lagrange 插值多项式，对插值区间内的任意插值点 x_0 的函数值的计算公式为

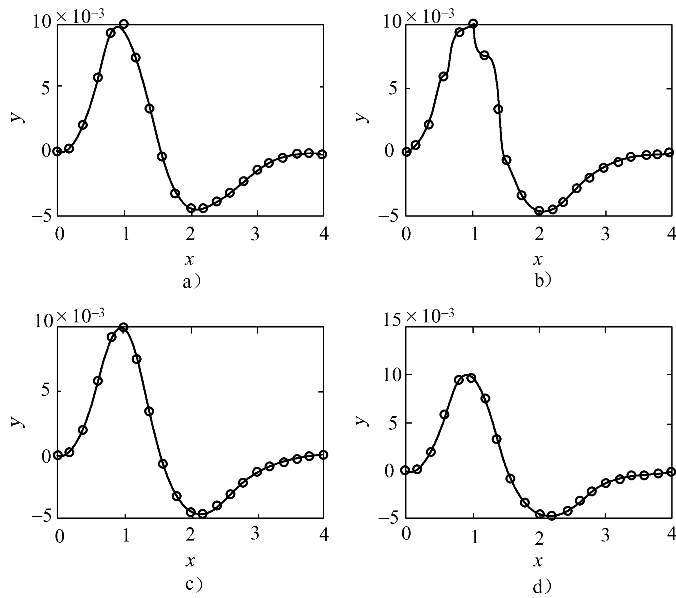


图 6-2　一维离散数据插值拟合

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k \left(\prod_{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \right)$$

例 6-6　自然对数函数 $y = \ln(x)$ 数表见表 6-1，用 lagrange 插值计算 ln(0.54)的值，并且检验计算精度。

表 6-1　自然对数函数 $y = \ln(x)$ 数表

x	0.4000	0.5000	0.6000	0.7000	0.8000
y	−0.9163	−0.6931	−0.5108	−0.3567	−0.2231

编制 lagrange 插值函数文件如下：

```
% Lagrange 插值函数文件(Lagrange.m)
function yi = lagrange(x,y,xi)
yi = zeros(size(xi));
np = length(y);
for i = 1:np
    z = ones(size(xi));
    for j = 1:np
        if i ~ = j
            z = z. * (xi - x(j))/(x(i) - x(j));
        end
    end
    yi = yi + z * y(i);
end
```

```
% 调用 Lagrange.m 的 M 文件
x = [0.4:0.1:0.8];y = log(x);
```

```
x0 = 0.54;
yi = lagrange(x,y,x0)                    % 调用 Lagrange 插值计算
ys = log(x0)                             % 使用自然对数公式计算
```

M 文件运行结果：

```
yi =
   -0.6161
ys =
   -0.6161
```

可见，采用 lagrange 插值可以获得足够的精度。

6.2.2 二维数据插值

1. 二维网格数据插值

对于二维离散数据点(x,y)所在的平面矩形区域内，离散数据点(x,y)可以使用函数 meshgid 生成网格矩阵。进行二维网格数据插值的函数调用格式为：

```
y0 = interp2(x,y,z,x0,y0,'k')
```

其中，$\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 是两个向量，分别描述两个参数的网格数据点；z 是与网格数据点对应的函数值；$x0$ 和 $y0$ 是需要插值的数据点，可以是标量或是向量；k 是插值算法，与一维数据插值函数 interp1 的规定相同。

例 6-7 给定二维函数 $z=(x^2-2x)\mathrm{e}^{-x^2-y^2-xy}$ 离散得到的一些网格点，试使用 3 次样条插值方法，并且绘制网格点的三维图和插值拟合曲面图。

```
%二维网格数据插值
[x,y] = meshgrid(-3:0.6:3,-2:0.4:2);
z = (x.^2-2*x).*exp(-x.^2-y.^2-x.*y);
subplot(1,2,1);surf(x,y,z);
axis([-3 3 -2 2 -0.7 1.5]);
xlabel('\bf\it x');ylabel('\bf\it y');zlabel('\bf\it x');
title('\bf 二维网格数据的三维图');
[x0,y0] = meshgrid(-3:0.2:3,-2:0.2:2);
z0 = interp2(x,y,z,x0,y0,'spline');             % 选择 3 次样条插值
subplot(1,2,2);surf(x0,y0,z0);
axis([-3 3 -2 2 -0.7 1.5]);
xlabel('\bf\it x');ylabel('\bf\it y');zlabel('\bf\it x');
title('\bf 3 次样条插值曲面图');
```

M 文件运行结果如图 6-3 所示。其中，图 6-3a 所示是二维网格数据点三维图，图 6-3b 所示是选择较密集的插值点进行 3 次样条插值得到的曲面图。

2. 二维分布数据插值

对于二维一般分布的离散数据点(x,y)，进行二维数据插值的函数调用格式为：

```
y0 = griddata(x,y,x0,y0,'v4')
```

其中，$x0$ 和 $y0$ 是需要插值的数据点，可以使用函数 meshgid 生成；$v4$ 是很圆滑的插值算法，

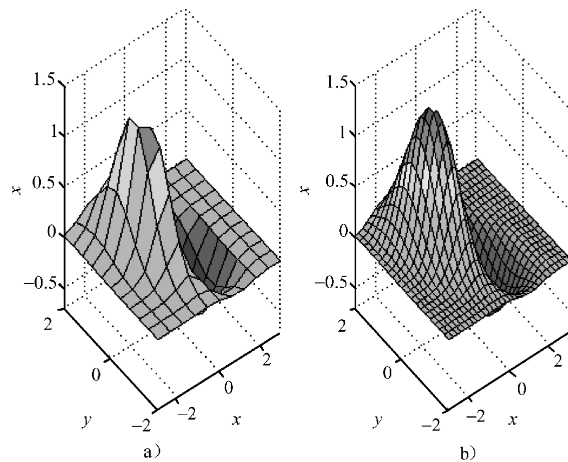


图6-3　二维网格数据的三维图和 3 次样条插值曲面图

效果很好。

例 6-8　14 个节点的二维离散数据点及其函数值见表 6-2，试在 $x=70\sim200$ 和 $y=0\sim150$ 的区域内，按照间距为 3 生成插值点网格矩阵，使用 3 次多项式插值，并且绘制插值拟合曲面图。

表 6-2　二维分布数据点及其函数值

x	129.0	140.0	103.5	88.0	185.5	195.0	105.5
y	7.5	141.5	23.0	147.0	22.5	137.5	85.5
z	4	8	6	8	6	8	8
x	157.5	107.5	77.0	81.0	162.0	162.0	117.5
y	60.5	121.0	3.0	56.5	116.5	84.0	43.5
z	9	9	8	8	9	4	9

编制 M 文件如下：

```
% 二维分布数据插值
x=[129.0 140.0 103.5 88.0 185.5 195.0 105.5 157.5 107.5 77.0 81.0 162.0 162.0 117.5];
y=[7.5 141.5 23.0 147.0 22.5 137.5 85.5 60.5 121.0 3.0 56.5 116.5 84.0 43.5];
subplot(1,2,1);plot(x,y,'o')
xlabel('\bf\it x');ylabel('\bf\it y');title('\bf 平面区域的分布数据');
z=-[4 8 6 8 6 8 8 9 9 8 8 9 4 9];
xi=70:3:200;yi=0:3:150;
[X,Y]=meshgrid(xi,yi);
H=griddata(x,y,z,X,Y,'cubic');                    % 选择 3 次多项式插值
subplot(1,2,2);mesh(X,Y,H);
view(-60,30);                                      % 设置视点(方位角 -60°,仰角 30°)
xlabel('\bf\it x');ylabel('\bf\it y');zlabel('\bf\it z');
title('\bf 3 次多项式插值曲面图');
```

M 文件运行结果如图 6-4 所示。其中，图 6-4a 所示是二维离散数据点的分布平面，图

6-4b 所示是选择较密集的插值点，进行 3 次多项式插值的曲面图。

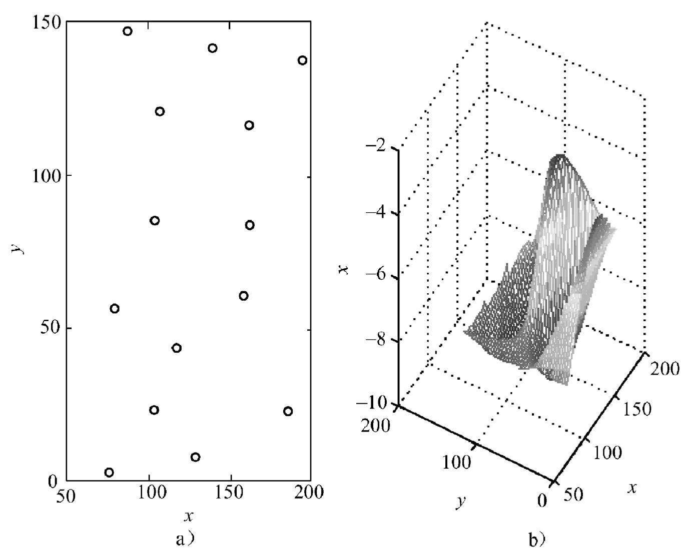


图 6-4　二维离散数据的 3 次多项式插值拟合



第 7 章　函数的导数和积分

导数是微积分学中重要的基础概念，一个函数在某一点的导数描述了这个函数在这一点附近的变化率。导数的本质是通过极限的概念对函数进行局部的线性逼近。当函数 $f(x)$ 的自变量在一点 x_0 上产生一个增量 Δx 时，函数输出值的增量 Δy 与自变量增量 Δx 的比值在 Δx 趋于 0 时的极限如果存在，即为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的导数，记作 $f'(x_0)$ 或 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0}$。

在微积分中，积分是微分的逆运算，即知道了函数的导函数，反求原函数。在应用上，积分作用不仅限于此，它被大量应用于求和（如求曲边三角形的面积），这种巧妙的求解方法是由积分特殊的性质决定的。

利用导数与积分既可更深入地研究函数性质，又可更广泛地联系其他学科，体现数学学科的基础性。

7.1　函数的导数

7.1.1　函数导数的解析解

使用符号求导函数的调用格式是：

```
diff(fun,x,n)
```

其中，fun 是函数符号表达式；x 是符号自变量；n 是求导的阶数（n 为 1 时可以省略）。

例 7-1　计算函数 $f(x) = \sqrt{\cos x} - x\sin x$ 的一阶和二阶导数。

```
% 求函数导数解析解
syms x                          % 定义表达式中的符号变量
f = sqrt(cos(x)) - x * sin(x);  % 定义函数表达式
disp ('　函数的 1 阶导数:')
f1 = diff(f)
disp ('　函数的 2 阶导数:')
f2 = diff(f,2)
```

M 文件运行结果：

```
  函数的 1 阶导数:
f1 =
```

```
-1/2/cos(x)^(1/2)*sin(x)-sin(x)-x*cos(x)
 函数的 2 阶导数:
f2 =
-1/4/cos(x)^(3/2)*sin(x)^2-1/2*cos(x)^(1/2)-2*cos(x)+x*sin(x)
```

因此，函数 $f(x)$ 的一阶和二阶导数是：

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = -\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}} - \sin x - x\cos x$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{\sin^2 x}{4\cos x\sqrt{\cos x}} - \frac{\sqrt{\cos x}}{2} - 2\cos x + x\sin x$$

7.1.2 二维函数和参数方程的偏导数

1. 二维函数的偏导数

使用符号求二维函数 fun(x, y) 偏导数的函数调用格式是：

```
diff(diff(fun,x),y)
diff(diff(fun,y),x)
```

其中，fun 是函数符号表达式；x 和 y 是符号自变量。

例 7-2 计算二维函数 $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{(x+y)^3}$ 的 2 阶偏导数。

```
%求二维函数 2 阶偏导数解析解
syms x y                          % 定义表达式中的符号变量
f = x^2*y/(x+y)^3;                % 定义二维函数表达式
disp('对变量 x 的 2 阶偏导数:')
d2x = diff(f,x,2)
disp('对变量 y 的 2 阶偏导数:')
d2y = diff(f,y,2)
disp('函数的 2 阶偏导数:')
dxy = diff(diff(f,x),y)
disp('函数的 2 阶偏导数的简化符号表达式:')
sdxy = simplify(dxy)
```

M 文件运行结果：

对变量 x 的 2 阶偏导数：

```
d2x =
2*y/(x+y)^3-12*x*y/(x+y)^4+12*x^2*y/(x+y)^5
```

对变量 y 的 2 阶偏导数：

```
d2y =
-6*x^2/(x+y)^4+12*x^2*y/(x+y)^5
```

函数的 2 阶偏导数：

```
dxy =
2*x/(x+y)^3-6*x*y/(x+y)^4-3*x^2/(x+y)^4+12*x^2*y/(x+y)^5
```

函数的 2 阶偏导数的简化符号表达式：

```
sdxy =
-x*(x^2-7*x*y+4*y^2)/(x+y)^5
```

因此，二维函数 $f(x,y)$ 的 2 阶偏导数是：

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}=\frac{2y}{(x+y)^3}-\frac{12xy}{(x+y)^4}+\frac{12x^2y}{(x+y)^5}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=-\frac{6x^2}{(x+y)^4}+\frac{12x^2y}{(x+y)^5}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{2x}{(x+y)^3}-\frac{6xy+3x^2}{(x+y)^4}+\frac{12x^2y}{(x+y)^5}=-\frac{x(x^2-7xy+4y^2)}{(x+y)^5}$$

2. 参数方程的偏导数

设参数方程为 $x=g(t)$ 和 $y=h(t)$ 所确定的函数 $y=f(x)$，则 $y=f(x)$ 的导数为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'(t)}{x'(t)}$，计算参数方程 k 阶导数 $\frac{\mathrm{d}^k y}{\mathrm{d}x^k}$ 的函数调用格式是：

```
diff(h,t,k) / diff(g,t,k)
```

例 7-3 计算参数方程 $\begin{cases}x=\ln(\cos t)\\ y=\cos t-t\sin t\end{cases}$ 导数的解析解，并且计算当 $t=\frac{\pi}{3}$ 时的数值解。

```
% 求参数方程导数的解析解
syms t                                  % 定义参数方程中的符号变量
x=log(cos(t));                          % 定义参数方程 1
y=cos(t)-t*sin(t);                      % 定义参数方程 2
dydx1=diff(y,t)/diff(x,t);
disp('参数方程的 1 阶导数的简化符号表达式:')
sdydx1=simplify(dydx1)
dydx2=diff(y,t,2)/diff(x,t,2);
disp('参数方程的 2 阶导数的简化符号表达式:')
sdydx2=simplify(dydx2)
% 计算 t=pi/3 时的导数值(有效数字 6 位)
s1=vpa(subs(dydx1,t,pi/3),6);
% 函数 subs 将字符表达式 dydx1 中的符号变量 t 替换为数值量 pi/3
disp('t=pi/3 时的一阶导数值:'),s1
s2=vpa(subs(dydx2,t,pi/3),6);
disp('t=pi/3 时的二阶导数值:'),s2
```

M 文件运行后得到的计算结果：

```
参数方程的 1 阶导数的简化符号表达式:
sdydx1 =
(2*sin(t)+t*cos(t))*cos(t)/sin(t)
参数方程的 2 阶导数的简化符号表达式:
```

```
sdydx2 =
-( -3 * cos(t) + t * sin(t)) * cos(t)^2
  t = pi/3 时的一阶导数值:
s1 =
 1.30230
  t = pi/3 时的二阶导数值:
s2 =
.148275
```

因此，参数方程一阶和二阶导数的解析解是：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{(2\sin t+t\cos t)\cos t}{\sin t}=(2\sin t+t\cos t)\cot t$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=(3\cos t-t\sin t)\cos^2 t$$

当 $t=\frac{\pi}{3}$时，参数方程一阶和二阶导数的数值解是：

$$\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=\pi/3}=1.30230$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right|_{t=\pi/3}=0.148275$$

7.1.3 n 维函数的偏导数

1. n 维隐函数的偏导数

设 n 维隐函数为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，由于变量之间偏导数的关系是：

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j}=-\frac{\partial f(x_1,x_2,\cdots,x_n)/\partial x_i}{\partial f(x_1,x_2,\cdots,x_n)/\partial x_j}$$

则计算变量 x_i 对变量 x_j 的偏导数的函数调用格式是：

```
-diff(f,xj) / diff(f,xi)
```

例 7-4　计算二维隐函数 $f(x,y)=(x^2-2x)\mathrm{e}^{-x^2-y^2-xy}$ 偏导数的解析解。

```
%求二维隐函数偏导数的解析解
syms x y                              % 定义函数表达式中的符号变量
f = (x^2-2 * x) * exp( -x^2-y^2-x * y); % 定义二维隐函数表达式
dydx = -diff(f,x)/diff(f,y);          % 计算二维隐函数的偏导数 dy/dx
disp('  二维隐函数偏导数的简化符号表达式 ')
sdydx = simplify(dydx)
```

M 文件运行后得到的计算结果：

二维隐函数偏导数的简化符号表达式：

```
sdydx =
-( -2 * x +2 +2 * x^3 + x^2 * y -4 * x^2-2 * x * y)/x/(x -2)/(2 * y + x)
```

因此，二维隐函数 $f(x,y)$ 偏导数的解析解是：

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x\,\partial y}=\frac{2x-2-2x^3-x^2y+4x^2+2xy}{x(x-2)(2y+x)}$$

2. jacobian 矩阵

设有 n 个自变量的 m 个函数：

$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n) \\ f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n) \\ \cdots \\ f_m(x_1,x_2,\cdots,x_n) \end{cases}$$

相应的偏导数$\partial f_i/\partial x_i$ 构成 jacobian 矩阵为：

$$J=\begin{cases} \partial f_1/\partial x_1 & \partial f_1/\partial x_2 & \cdots & \partial f_1/\partial x_n \\ \partial f_2/\partial x_1 & \partial f_2/\partial x_2 & \cdots & \partial f_2/\partial x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial f_m/\partial x_1 & \partial f_m/\partial x_2 & \cdots & \partial f_m/\partial x_n \end{cases}$$

运用 MATLAB 符号工具箱函数可以直接求出 jacobian 矩阵：

```
jacobian(f,x)
```

其中，f 是 n 维函数，$\boldsymbol{x}$ 是 n 维向量。

该函数用于计算 n 维函数 f 对 n 维向量 $\boldsymbol{x}$ 的 jacobian（雅克比）矩阵，其第 i 行、第 j 列的值为$\partial f(i)/\partial x(j)$。当 f 为标量时，所得的值为 f 的梯度；当 $\boldsymbol{x}$ 为矢量时，该函数相当于 diff(f,x)。

例 7-5 已知三维函数$\begin{cases} f_1=xyz \\ f_2=x^2-y \\ f_3=x+z \end{cases}$，试计算它的偏导数。

```
% 计算多维函数的导数
syms x y z
f1 = x * y * z;
f2 = x^2-y;
f3 = x + z;
disp('多维函数表达式向量:')
f = [f1;f2;f3]
disp('多维函数的偏导数矩阵:')
J = jacobian(f,[x y z])
```

M 文件运行结果：

```
多维函数表达式向量:
f =
x * y * z
x^2-y
x + z
多维函数的偏导数矩阵:
J =
```

```
[y*z, x*z, x*y]
[ 2*x,   -1,   0]
[   1,   0,   1]
```

因此，三维函数的偏导数矩阵是：

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}\partial f_1/\partial x & \partial f_1/\partial y & \partial f_1/\partial z\\ \partial f_2/\partial x & \partial f_2/\partial y & \partial f_2/\partial z\\ \partial f_3/\partial x & \partial f_3/\partial y & \partial f_3/\partial z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}yz & xz & xy\\ 2x & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

7.1.4　数值微分

数值微分根据函数在一些离散点的函数值，推算它在某点的导数或高阶导数的近似值。通常用差商代替微商，或用一个能近似代替该函数的、较简单的函数（如多项式、样条函数）的相应导数作为所求导数的近似值。针对实验数据 X（向量或多维数组）数值微分，由于函数表达式是未知的，需要采用数值解法（中心差分方法的微分算法）。

例 7-6　一组实验数据见表 7-1，试计算它的四阶微分。

表 7-1　实验数据

x	0.0000	0.2000	0.4000	0.6000	0.8000	1.0000
y	0.3927	0.5672	0.6982	0.7941	0.8614	0.9053

```
% 用中心差分方法的数值微分算法
function [dy,dx] = diff_ctr(y,dt,n)
yx1 = [y 0 0 0 0 0];yx2 = [0 y 0 0 0 0];yx3 = [0 0 y 0 0 0];
yx4 = [0 0 0 y 0 0];yx5 = [0 0 0 0 y 0];yx6 = [0 0 0 0 0 y];
switch n
    case 1
        dy = ( - diff(yx1) + 7 * diff(yx2) + 7 * diff(yx3) - diff(yx4))/(12 * dt);l0 = 3;
    case 2
        dy = ( - diff(yx1) + 15 * diff(yx2) - 15 * diff(yx3) + diff(yx4))/(12 * dt^2);l0 = 3;
    case 3
        dy = ( - diff(yx1) + 7 * diff(yx2) - 6 * diff(yx3) - 6 * diff(yx4) + 7 * diff(yx5) - diff
(yx6))/(8 * dt^3);l0 = 5;
    case 4
        dy = ( - diff(yx1) + 11 * diff(yx2) - 28 * diff(yx3) + 28 * diff(yx4) - 11 * diff(yx5) + diff
(yx6))/(6 * dt^3);l0 = 5;
end
dy = dy(l0 + 1:end - l0);
dx = ([1:length(dy)] + l0 - 2-(n > 2)) * dt;
% 用中心差分方法的数值微分算法调用 M 文件
sx = [0.0000 0.2000 0.4000 0.6000 0.8000 1.0000];
sy = [0.3927 0.5672 0.6982 0.7941 0.8614 0.9053];
y = [sy,sx];
dt = 0.2;
```

```
n = 4;
[dy,dx] = diff_ctr(y,dt,n)
```

M 文件运行结果：

```
dy =
   19.2187  -217.2292   581.9417  -611.7500   250.0458    -23.0271
dx =
     0.6000      0.8000      1.0000      1.2000      1.4000      1.6000
```

7.1.5 函数的梯度和范数

在向量微积分中，标量场的梯度是一个向量场，标量场中某一点上的梯度指向标量场增长最快的方向。梯度是一个向量，当某一函数在某点处沿着该方向的方向导数取得该点处的最大值，即函数在该点处沿该方向变化最快，变化率最大。

n 维函数 $f(X)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，在点 $X^{(K)}=[x_1^{(K)},x_2^{(K)},\cdots,x_n^{(K)}]^{\mathrm{T}}$ 的梯度，是函数各维一阶偏导数组成的向量：

$$\nabla f(X^{(K)})=\left[\frac{\partial f(X^{(K)})}{\partial x_1},\frac{\partial f(X^{(K)})}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial f(X^{(K)})}{\partial x_n}\right]^{\mathrm{T}}$$

梯度的范数是函数各维一阶偏导数平方和的平方根：

$$\|\nabla f(X^{(K)})\|=\sqrt{\left(\frac{\partial f(X^{(K)})}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial f(X^{(K)})}{\partial x_2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial f(X^{(K)})}{\partial x_n}\right)^2}$$

1）计算梯度的符号函数：

```
jacobian(fun,X)
```

其中，fun 是符号函数表达式，$\boldsymbol{X}$ 是定义求导变量组成的向量（可以省略）。

2）计算矩阵或向量范数的符号函数：

```
norm(fun,X)
```

其中，fun 是符号型函数表达式，$\boldsymbol{X}$ 是定义求导变量组成的符号型向量。

例 7-7　计算三维函数 $f(\boldsymbol{X})=2x_1^2+5x_2^2+x_3^2+2x_2x_3+2x_1x_3-6x_2+3$ 在 $\boldsymbol{X}^{(K)}=[1,-1,2]^{\mathrm{T}}$ 的梯度和梯度的范数。

```
% 计算多维函数的梯度和梯度的范数
syms x1 x2 x3                                              % 定义符号变量
f = 2*x1^2 + 5*x2^2 + x3^2 + 2*x2*x3 + 2*x1*x3-6*x2 + 3;   % 定义三维函数
disp('三维函数的梯度:')
gf = jacobian(f)
xk = [1,-1,2];
disp('    函数在 xk 点的梯度值:')
gfk = subs(subs(subs(gf,xk(1)),xk(2)),xk(3))
disp('    函数在 xk 点的梯度的范数:')
gmk = norm(gfk)
```

M 文件中函数 subs(f,k) 用于计算给变量赋值 k 后的符号表达式 f 的值。M 文件运行

结果：

```
三维函数的梯度：
gf =
[        4 * x1 + 2 * x3,    10 * x2 + 2 * x3-6, 2 * x3 + 2 * x2 + 2 * x1]
函数在 xk 点的梯度值：
gfk =
     8    -12      4
函数在 xk 点的梯度的范数：
gmk =
   14.9666
```

因此，三维函数 $f(\boldsymbol{X})$ 的梯度，以及在 $\boldsymbol{X}^{(K)}=[1,-1,2]^{\mathrm{T}}$ 的梯度和梯度的范数是：

$$\nabla f(\boldsymbol{X})=\begin{bmatrix}\partial f(\boldsymbol{X})/\partial x_1\\ \partial f(\boldsymbol{X})/\partial x_2\\ \partial f(\boldsymbol{X})/\partial x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4x_1+2x_3\\ 10x_2+2x_3-6\\ 2x_1+2x_2+2x_3\end{bmatrix}$$

$$\nabla f(\boldsymbol{X}^{(K)})=\begin{bmatrix}\partial f(\boldsymbol{X}^{(K)})/\partial x_1\\ \partial f(\boldsymbol{X}^{(K)})/\partial x_2\\ \partial f(\boldsymbol{X}^{(K)})/\partial x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\ -12\\ 4\end{bmatrix}$$

$$\|\nabla f(\boldsymbol{X}^{(K)})\|=\sqrt{(\partial f(\boldsymbol{X}^{(K)})/\partial x_1)^2+(\partial f(\boldsymbol{X}^{(K)})/\partial x_2)^2+(\partial f(\boldsymbol{X}^{(K)})/\partial x_3)^2}=14.9666$$

7.2　函数的积分

设 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数，则将函数 $f(x)$ 的所有原函数 $F(x)+C$（C 为任意常数）称为函数 $f(x)$ 的不定积分，记作 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$。其中"$\int$"称为积分号，$f(x)$ 称为被积函数，x 称为积分变量，$f(x)\mathrm{d}x$ 称为被积式，C 称为积分常数，求已知函数 $f(x)$ 的不定积分的过程称为对这个函数 $f(x)$ 进行积分。

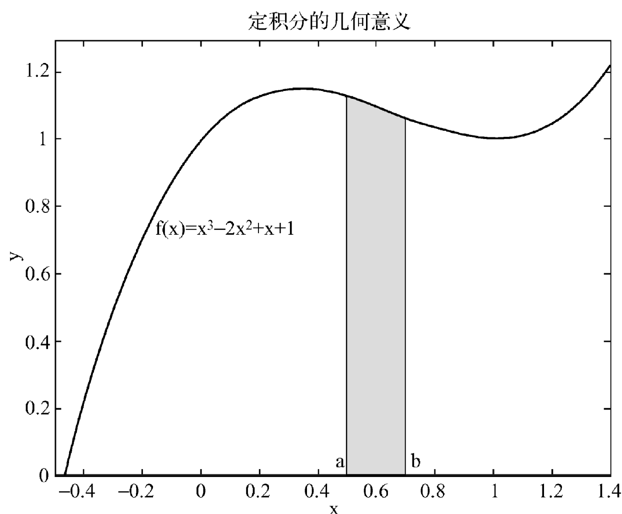


图 7-1　定积分的几何意义

如图 7-1 所示，定积分 $S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，就是求函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 中函数图线下包围的面积，即由线图 $y=0$、$x=a$、$x=b$ 和 $y=f(x)$ 所包围的面积。这个图形是曲边梯形。

7.2.1 不定积分的解析解

计算不定积分解析解的函数调用格式是：

```
F = int(fun,x)
```

其中，fun 是被积函数；x 是自变量，如果只有一个变量，x 可以省略。

应当指出，计算结果 $F(x)$ 只是积分原函数，实际的不定积分应该是 $F(x)+C$ 构成的曲线族，C 是任意常数。

例 7-8 计算不定积分 $\int \sin ax \cos bx \mathrm{d}x$。

```
% 计算不定积分
syms x a b;                    % 定义表达式中的符号变量
y = sin(a * x) * cos(b * x);   % 定义被积函数
disp('被积函数的不定积分:')
F = int(y,x)
```

M 文件运行结果：

被积函数的不定积分：

```
F =
-1/2/(a + b) * cos((a + b) * x) - 1/2/(a - b) * cos((a - b) * x)
```

因此，不定积分 $\int \sin ax \cos bx \mathrm{d}x = -\dfrac{\cos((a+b)x)}{2(a+b)} - \dfrac{\cos((a-b)x)}{2(a-b)}$。

7.2.2 定积分

计算定积分的函数调用格式是：

```
I = int(fun,x,a,b)
```

其中，fun 是被积函数；x 是自变量；(a,b) 是定积分的积分区间，计算无穷积分时，需要将积分区间设置为(-inf,inf)。

例 7-9 计算定积分 $\int_0^1 \dfrac{xe^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^{\infty} \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 的解析解和数值解。

```
% 计算定积分
syms x;                          % 定义表达式中的符号变量
y1 = x * exp(x)/(1 + x)^2;       % 定义被积函数 1
a1 = 0;b1 = 1;                   % 定义积分区间 1
disp('被积函数 1 定积分的解析解:')
F1 = int(y1,x,a1,b1)             % 计算 y1 的定积分
disp('被积函数 1 定积分的数值解:')
F1v = double(F1)
y2 = cos(x)/sqrt(x);             % 定义被积函数 2
a2 = 0;b2 = inf;                 % 定义积分区间 2
disp('被积函数 2 定积分的解析解:')
F2 = int(y2,x,a2,b2)
```

```
disp('    被积函数 2 定积分的数值解:')
F2v = double(F2)
```

M 文件运行结果：

被积函数 1 定积分的解析解：

```
F1 =
1/2 * exp(1) - 1
```

被积函数 1 定积分的数值解：

```
F1v =
.3591
```

被积函数 2 定积分的解析解：

```
F2 =
1/2 * 2^(1/2) * pi^(1/2)
```

被积函数 2 定积分的数值解：

```
F2v =
1.2533
```

因此，两个定积分的解析解和数值解分别是：

$$\int_0^1 \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx = \frac{e}{2} - 1 \approx 0.3591$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \approx 1.2533$$

7.2.3　数值积分

求某函数的定积分时，在多数情况下，被积函数的原函数很难用初等函数表达出来；另外，许多实际问题中的被积函数往往是列表函数或其他形式的非连续函数。对这类函数只能使用数值积分计算函数的近似值。

1. 梯形法求解数值积分

梯形法求解数值积分的基本思想是：将积分区间分割成许多足够小的分区间，取各个矩形的面积分别代替积分函数的曲线在各小段区间上围出来的曲边梯形的面积，再将所有这样的矩形面积加起来的总和，就近似地等于函数在这个区间上的定积分。

梯形法求解数值积分的函数调用格式是：

```
s = trapz(x,y)
```

其中，$\boldsymbol{x}$ 是向量；y 的行数应该等于 $\boldsymbol{x}$ 向量的元素数，如果 y 是多列矩阵，则可以得到若干个函数的积分值。

该函数适用于求解给定一组数据$(x1,y1)$、$(x2,y2)$、…的数值积分。

例 7-10　用梯形法计算表 7-2 数据的定积分。

表 7-2　列表数据

x	0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.5000	0.6000
y	2.2077	3.2058	3.4435	3.2410	2.8164	2.3110
x	0.7000	0.8000	0.9000	1.0000	1.1000	1.2000
y	1.8101	1.3602	0.9817	0.6791	0.4473	0.2768

```
% 梯形法计算定积分
x=[0:0.1:1.2];
y=[0 2.2077 3.2058 3.4435 3.241 2.8164 2.311 1.8101 1.3602 0.9817 0.6791 0.4473 0.2768];
s=trapz(x,y)
```

M 文件运行结果：

```
s =
    2.2642
```

2. 变步长辛普生法求解数值积分

变步长辛普生法求解数值积分的基本思想是：在梯形法的基础上，将积分区间逐次分半，计算出每个子区间的定积分近似值，并且求和。

变步长辛普生法求解数值积分的函数调用格式是：

```
[s,n]=quadl(fun,a,b,tol)
```

其中，s 是返回的定积分值；n 是返回被积函数调用次数；fun 是被积函数；a 和 b 分别是定积分的下限和上限；tol 是指定的积分精度（默认 $e=10^{-6}$）。

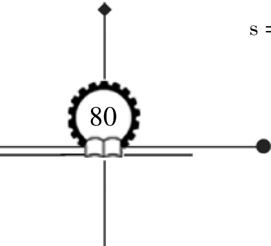
该函数适用于求解给定函数的数值积分。

例 7-11　用变步长辛普生法计算定积分 $\int_0^{3\pi} e^{-0.5x}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)dx$ 。

```
%变步长辛普生法计算定积分
f=inline('exp(-0.5.*x).*sin(x+pi/6)','x');          % 定义被积函数和自变量
a=0;b=3*pi;                                          % 定义积分区间
format long;                                         % 数值按长格式显示
[s,n]=quadl(f,a,b,1e-15)                             % 计算 y 的定积分
% 绘制积分图形
fplot('exp(-0.5.*x).*sin(x+pi/6)',[a,b]);            % 符号函数绘图
hold on;
x=[a:pi/100:b];
y=exp(-0.5.*x).*sin(x+pi/6);
fill([a,x,b],[0,y,0],'y');                           % 填充积分区域
xlabel('\bf\it x');ylabel('\bf\it y');
title('\bf 变步长辛普生法计算定积分');
gtext('y=e^{-0.5x}sin(x+\pi/6)');
```

M 文件运行结果如下，输出图形如图 7-2 所示。

```
s =
  0.90084078781889
```



```
n =
   828
```

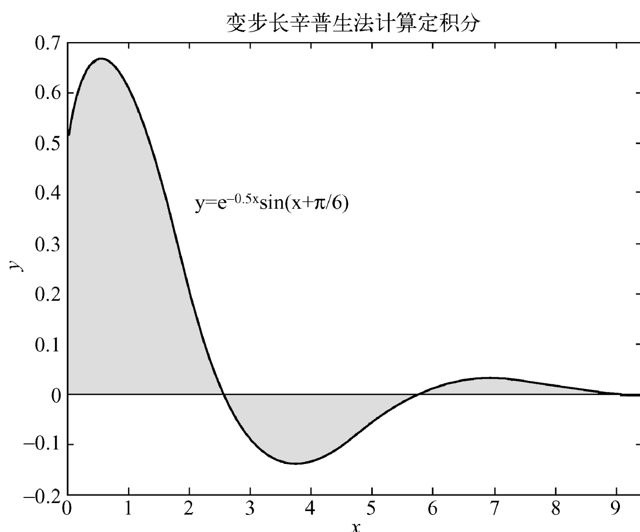


图 7-2　变步长辛普生法计算定积分

M 文件运算过程中总共调用函数 828 次。从图 7-2 可见，函数 $y = e^{-0.5x}\sin(x+\pi/6)$ 在区间$(0,3\pi)$上求积分，实际上就是求函数曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴、$x=0$ 和 $x=3\pi$ 三条直线所围成的几个曲边形的面积。

7.2.4　函数的重积分

1. 二维函数的数值积分（双重积分）

对于二维函数的双重定积分问题

$$I = \int_{y_m}^{y_M}\int_{x_m}^{x_M} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

可以直接使用函数进行求解矩形区域的数值积分，其调用格式是：

```
y = dblquad(fun,xm,xM,ym,yM,tol)
```

其中，输入参数 fun 是二维被积函数，可以用函数文件或函数 inline( ) 定义；(xm,xM,ym,yM)是指定的矩形区域；tol 是指定的计算精度（默认精度是10^{-6}）。

例 7-12　试计算二维被积函数 $f(x,y) = e^{-x^2/2}\sin(x^2+y)$ 在矩形区域$(-2,2,-1,1)$内的双重定积分，计算精度 $\varepsilon = 10^{-10}$。

```
% 二维函数矩形区域的双重定积分
fun = inline('exp(-x.^2/2).*sin(x.^2+y)','x','y');     % 定义被积函数和变量
epsilon = 1e-10;                                      % 计算精度
I = dblquad(fun,-2,2,-1,1,epsilon);                   % 计算双重积分
format long
disp('二维函数矩形区域的双重定积分:'),I
```

M 文件运行结果：

```
二维函数矩形区域的双重定积分：
I =
1.57449815921952
```

2. 三维函数的数值积分（三重积分）

对于三维函数的三重定积分问题

$$I = \int_{x_m}^{x_M}\int_{y_m}^{y_M}\int_{z_m}^{z_M} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

可以直接使用函数进行长方体区域的数值积分求解，其调用格式是：

```
y = triplequad(fun,xm,xM,ym,yM,zm,zM,tol)
```

其中，输入参数 fun 是三维被积函数，可以用函数文件或函数 inline( ) 定义；(xm,xM,ym,yM,zm,zM)是指定的长方体区域；tol 是指定的计算精度（默认精度是10^{-6}）。

例 7-13 试计算三维被积函数 $f(x,y,z)=y\sin x+z\cos x$ 在长方体区域$(0,\pi,0,1,-1,1)$内的双重定积分，计算精度 $\varepsilon=10^{-10}$。

```
% 三维函数长方体区域的三重定积分
fun = inline('y.*sin(x)+z.*cos(x)','x','y','z');     % 定义被积函数和变量
epsilon = 1e-10;                                     % 计算精度
I = triplequad(fun,0,pi,0,1,-1,1,epsilon);           % 计算双重积分
format long
disp('三维函数矩形区域的三重定积分:'),I
```

M 文件运行结果：

```
三维函数矩形区域的三重定积分：
I =
   1.99999999999975
```



第8章　代数方程求解和最优化问题

代数方程是未知数和常数进行有限次代数运算所组成的方程，它包括有理方程和无理方程。代数方程$f(X)=0$的解称为$f(X)=0$的根或零点，其求解一般是通过代数几何来进行。

优化设计问题数学模型的一般形式是

$$\begin{cases} \min f(X)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n) \\ X\in R^n \\ \text{s. t. } g_u(X)\leqslant 0 \quad (u=1,2,\cdots,m) \\ h_v(X)=0 \qquad (v=1,2,\cdots,p) \end{cases}$$

式中，s. t. 是英文“subject to”的缩写，意为“受约束于”。

优化设计问题数学模型包括n维设计变量X、约束条件（不等式约束条件$g(X)\leqslant 0$和等式约束条件$h(X)=0$）和目标函数$f(X)$三项要素。优化问题的数学模型是实际优化问题的数学抽象，在满足所有的约束条件$g(X)\leqslant 0$和$h(X)=0$情况下，求解n维设计变量X，使某项或多项设计目标$f(X)$（技术经济指标）达到最优。

应当指出，对于等式约束条件，施加于该项设计的等式约束条件数p必须小于优化设计问题的维数n。如果$p=n$，则由n个等式约束方程限制的设计变量只可能有唯一的解，没有最优化的余地。

最优化问题一般称为“数学规划问题”。在上述数学问题中，如果目标函数$f(X)$和约束函数$g(X)$与$h(X)$都是设计变量X的线性函数，则称它为线性规划问题，如果目标函数$f(X)$和约束函数$g(X)$与$h(X)$中有关于设计变量X的非线性函数，则称它为非线性规划问题。当$m=p=0$时，则称为无约束规划问题（无约束最优化问题），当$m\neq p\neq 0$时，则称为约束规划问题（约束最优化问题）。

8.1　代数方程求解

8.1.1　代数方程图解法

符号绘图函数 fplot 和 ezplot 也可以用于图解法求代数方程的根，它适用于求解维数较少的一元方程或二元方程组。

对于一元方程图解，其解就是函数曲线与X轴交点所对应的变量数值。如果有多个交点，则表示该方程有多个解；如果没有交点，则表示该方程没有解。

例如，在例 5-3 中使用符号绘图函数绘制代数方程 $y=0.5e^{x/3}-\sin x$ 的图形，从图 5-3a 所示可见，函数 $y=0.5e^{x/3}-\sin x$ 在区间[-5,5]内与 X 轴有 3 个交点，因此该代数方程在该区间内有 3 个实根。

对于二元方程组图解，其解就是两条函数曲线的交点所对应的坐标数值。如果只有 1 个交点（或切点），则表示该方程组有 1 个解；如果有两个交点，则表示该方程组有两个解；如果没有交点，则表示该方程没有解。

例 8-1 用图解法求解二元联立方程 $\begin{cases} x^2+y^2-1.69=0 \\ 2.4x^3=y+1.5=0 \end{cases}$

```
a = -2;b =2;                                  %定义横轴区间
ezplot('x^2 +y^2-1.69',[a,b]);                % 符号函数 1 绘图
axis'equal';                                  % 控制坐标轴比例相等
hold on;grid on;
ezplot('2.4*x^3-y +1.5',[a,b]);               % 符号函数 2 绘图
line([a,b],[0,0]);                            % 绘制横轴
line([0,0],[b,a]);                            % 绘制纵轴
xlabel('\bf x');ylabel('\bf y');
title('\bf 二元代数方程组的图解法')
gtext('\bf f_1 =x^2 +y^2-1.3^2');
gtext('\bf f_2 =2.4x^3-y +1.5');
gtext('\bf (x_1,y_1)');gtext('\bf (x_2,y_2)');
```

M 文件运行结果如图 8-1 所示。

从图 8-1 所示可见，由于该二元联立方程曲线有两个交点，所以有两对实根。

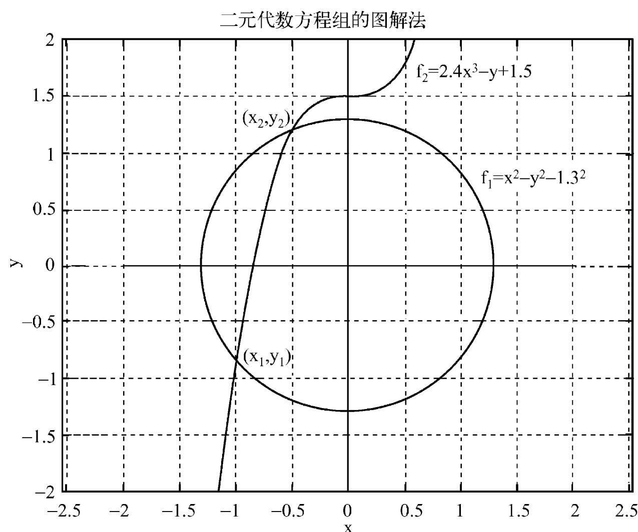


图 8-1 二元代数方程组图解法

8.1.2 代数方程的解析解

求非线性方程或方程组解析解的函数调用格式是：

```
X = solve(fun,x)
```

其中，fun 是符号方程的函数表达式，x 是自变量，X 是解析解。

应当指出，函数 solve(fun，x) 也可以用于求线性方组的解析解。

例 8-2　求非线性解方程组$\begin{cases}x^2-xy-a=0\\y^2-xy+b=0\end{cases}$的解析解。

```
% 二元非线性方程组的解析解
syms a b x y;
f1 =' x^2-x * y - a' ;
f2 =' y^2-x * y + b' ;
disp('二元非线性方程组的解析解:')
[X,Y] = solve(f1,f2','x,y')
```

M 文件运行结果：

```
二元非线性方程组的解析解:
x =
  a/(a-b)^(1/2)
 -a/(a-b)^(1/2)
Y =
  1/(a-b)^(1/2) * b
 -1/(a-b)^(1/2) * b
```

因此，该线性方程组的解析解是

$$\begin{cases}x=\pm\dfrac{a}{\sqrt{a-b}}\\y=\pm\dfrac{b}{\sqrt{a-b}}\end{cases}$$

8.1.3　线性方程组的数值解

线性方程组的直接解法一般基于高斯消去法、主元素消去法、平方根法和追赶法等，在 MATLAB 中这些算法已经被编成库函数或运算符，可以直接调用求解。最简便的方法是使用矩阵左除或矩阵求逆的方法，求解线性方程组 $\boldsymbol{A}X=\boldsymbol{b}$。如：

```
X = A\b
X = inv(A) * b
```

其中，$\boldsymbol{A}$ 是方程组的系数矩阵，$\boldsymbol{b}$ 是常数向量，X 是解析解。

例 8-3　求线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=5\\x_1+2x_2-x_3+4x_4=-2\\2x_1-3x_2-x_3-5x_4=-2\\3x_1+x_2+2x_3+11x_4=0\end{cases}$的数值解。

```
%线性方程组的数值解
AA = [1,1,1,1;1,2,-1,4;2,-3,-1,-5;3,1,2,11];        % 线性方程组系数矩阵
bb = [5;-2;-2;0];                                    % 线性方程组常数向量
```

```
disp('采用矩阵左除求出线性方程组的解:')
xx = AA\bb
disp('采用矩阵求逆求出线性方程组的解!')
zx = inv(AA) * bb
disp('计算残量!')
r = AA * zx - bb
disp('计算残量的模:')
R = norm(r)
```

M 文件运行结果：

```
采用矩阵左除求出线性方程组的解：
xx =
      1.0000
      2.0000
      3.0000
     -1.0000
采用矩阵求逆求出线性方程组的解：
zx =
      1.0000
      2.0000
      3.0000
     -1.0000
计算残量：
r =
      1.0e-014  *
      0.0888
      0.2220
     -0.4441
      0.1776
计算残量的模：
R =
   5.3475e-015
```

可见，采用矩阵左除或矩阵求逆的两种方法的解是相同的，计算精度是很高的。

8.1.4 非线性方程的数值解

1. 一维非线性方程

对于一维非线性方程 $f(x)=0$ 求解，可以看作是单变量的极小化问题，通过不断缩小搜索区间来逼近一维问题的真解。因此，可以使用一维非线性方程优化解函数来求解。其调用格式是：

```
[x,fx,flag] = fzero(fun,x0)
```

其中，输入参数中：fun 是非线性方程的函数表达式，$x0$ 是根的初值。输出参数中：x 是非线性方程的数值解；fx 是数值解的函数值；返回参数 flag > 0 时，表示求解成功，否则求解出现问题。

函数 fzero 所使用的算法为二分法、secant 法和逆二次插值法的组合。

例 8-4 求解一维非线性方程 $f(x) = \mathrm{atan}(x) + \mathrm{e}^x = 0$ 的数值解。

```
%求解单变量 x 非线性方程
x0 = 0.1;                                  % 解的初值
[xz,fz,flag] = fzero('atan(x) + exp(x)',x0);
disp('求解成功性判断参数:'), flag
disp('非线性方程的解:'),xz
disp('非线性方程解的函数值:'),fz
```

M 文件运行结果:

```
求解成功性判断参数:
flag =
    1
非线性方程的解:
xz =
   -0.6066
非线性方程解的函数值:
fz =
-1.1102e-016
```

可见，得到解的误差非常小，而且判断参数 flag > 0，表示求解成功。

2. 多维非线性方程组

对于多维非线性方程组 $f(X) = 0$，其中 $f(X)$ 是由多个非线性函数组成的向量函数:

$$f(X) = [f_1(X), f_2(X), \cdots, f_n(X)]^{\mathrm{T}}$$

使用多维非线性方程组优化函数求解的调用格式是:

```
[x,fval,flag] = fsolve(fun,x0)
```

其中，输入参数中 fun 是非线性方程组的向量函数表达式；x0 是根的初值；输出参数中 x 是非线性方程（组）的数值解；fval 是数值解的函数值；返回参数 flag > 0 时，表示求解成功，否则求解出现问题。

函数 fsolve 的作用是从根的初值 x0 开始，以逐渐减少误差的算法，搜索出满足多维非线性方程组 fun 的实根 x 和对应的函数值 fval。

例 8-5 求二维非线性方程组 $\begin{cases} f_1 = 2x_1 - x_2^2 - \mathrm{e}^{-x_1} = 0 \\ f_2 = -x_1^3 + x_1 x_2 - \mathrm{e}^{-x_2} = 0 \end{cases}$ 的数值解。

```
x0 = [2;3];                                % 解的初值
% 定义非线性方程组表达式 f 和向量 x
fun = inline('[2*x(1) - x(2)^2-exp(-x(1)); -x(1)^3 + x(1)*x(2) - exp(-x(2))]','x')
[xn,fval,flag] = fsolve(fun,x0);
disp('求解成功性判断参数:'), flag
if flag > 0
    disp('方程组的解成功')
elseif flag <= 0
    disp('方程组的解不成功')
```

```
end
disp(    非线性方程组的解:),xn
disp(    非线性方程组解的函数值:),fval
```

M 文件运行结果：

```
求解成功性判断参数：
flag =
     1
方程组的解成功
非线性方程组的解：
xn =
    0.9978
    1.2755
非线性方程组解的函数值：
fval =
    1.0e-006  *
     -0.1945
     -0.3372
```

可见，两个非线性方程组解的函数值非常接近0，说明其解的误差很小，而且判断参数 flag >0，表示求解成功。

8.2 MATLAB 优化工具箱的应用

MATLAB 优化工具箱（Optimization Toolbox）包含一系列优化算法和模块，可以用于求解线性规划和二次规划、函数的最大和最小值、非线性规划、多目标优化、非线性最小二乘逼近和曲线拟合、非线性系统方程和复杂结构的大规模优化问题。

常用的优化函数有：

- 求解线性规划问题的函数 linprog。
- 求解二次规划问题的函数 quadprog。
- 求解无约束非线性规划问题的函数 fminbnd、fminunc 和 fminsearch。
- 求解约束非线性规划问题的函数 fmincon。
- 求解多目标优化问题的函数 fgoalattain 和 fminimax。

使用 MATLAB 优化工具箱函数处理优化设计问题的分析和计算的一般步骤是：

1）针对具体工程问题建立优化设计的数学模型（其中，不等式约束条件表示成 $g(X) \leq 0$ 的形式）。

2）分析数学模型中的目标函数，并建立相应的目标函数文件（包括计算目标函数必需的输入参数，描述目标函数表达式等内容），以自定的目标函数文件名将它存储在工作空间\MATLAB\WORK\中。

3）分析数学模型中的非线性约束条件，并建立相应的非线性约束函数文件（包括计算约束函数必需的输入参数，描述约束函数表达式等内容），以自定的约束函数文件名将它存储在工作空间\MATLAB7\WORK\中。

4）分析优化设计的数学模型，选择适用的优化函数，并建立调用优化函数的命令文件（内容包括输入初始点，建立设计变量的线性约束和边界约束的矩阵和向量，使用优化函数调用目标函数文件和约束函数文件的语句，以及运算结果输出等内容），将优化函数作为“黑箱”调用，以自定义的命令文件名将它存储在工作空间\MATLAB\WORK\中。

将优化设计的命令文件复制到 MATLAB 命令窗口的运算提示符“ >> ”后面运行，如果编制的目标函数文件、约束函数文件和命令文件存在错误，MATLAB 就会给出错误的类型和在 M 文件中的位置，方便用户对错误进行定位和检查。如果 M 文件没有错误（包括逻辑错误和语法错误），命令窗口就会显示出运算信息，获得与所有条件都相容的优化结果。

8.2.1　线性规划问题

线性规划（Linear Programming）是数学规划中最简单和基本的问题，它主要用来解决在有限的资源条件下完成最多的任务，或是确定如何使用最少的资源统筹完成任务。

线性规划的数学模型包括决策变量 X、约束条件和目标函数三个要素，它的决策变量是非负的，而且约束函数和目标函数都是线性函数。

线性规划的数学模型表示为：

$$\begin{cases} \min \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}} X \\ \text{s.t.} \quad \boldsymbol{A}X \leqslant \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{Aeq}X = \boldsymbol{beq} \\ lb \leqslant X \leqslant ub \end{cases}$$

用于求解线性规划的 MATLAB 函数是 linprog，其调用格式为：

```
[xopt,fopt] = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub,x0,options)
```

其中，输入参数有：

- ***f*** 是目标函数各维变量的系数向量。
- ***A*** 和 ***b*** 分别是不等式约束函数的系数矩阵和常数向量。
- ***Aeq*** 和 ***beq*** 分别是等式约束函数的系数矩阵和常数向量。
- *lb* 和 *ub* 分别是设计变量的下限和上限。
- *x*0 是初始点。
- options 是设置优化选项参数，见表 8-1。

输出参数有：xopt 和 fopt 分别是返回目标函数的最优解及其函数值。

例 8-6　求解线性规划问题

$$\begin{cases} \min f(X) = -2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 \\ \text{s.t.}\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 \leqslant 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \leqslant 12 \\ x_1 + x_3 + x_4 \leqslant 4 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) \geqslant 0 \end{cases}$$

编制求解线性规划问题的 M 文件：

```
% 求解线性规划问题
```

```
f=[-2,-1,3,-5];                              %各维变量的系数向量
A=[1,2,4,-1;2,3,-1,1;1,0,1,1];               % 不等式约束函数的系数矩阵
b=[6,12,4];                                  % 不等式约束函数的常数向量
lb=[0,0,0,0];                                % 设计变量的下限
[xopt,fopt]=linprog(f,A,b,[],[],lb)
```

由于线性规划问题中没有等式约束，所以相应的系数矩阵 ***Aeq*** 和常数向量 ***beq*** 用空矩阵符号“[ ]”表示。程序运行结果：

```
Optimization terminated successfully.
xopt =
      0.0000
      2.6667
      0.0000
      4.0000
fopt =
   -22.6667
```

可见，约束最优解位于两个边界约束 $x_1 \geqslant 0$ 和 $x_3 \geqslant 0$ 的交集上。

表 8-1　控制参数 Options

序　　号	功　　能	默认值及其含义	说　　明
1	输出形式	0，无中间结果输出	Options(1)=1，按照表格输出结果 Options (1) =-1，隐藏警告信息
2	解 x 的精度	1e-4	Options(2)设置 x 解的终止条件
3	函数 f 的精度	1e-4	Options(3)设置函数 f 的终止条件
4	约束 g 的精度	1e-6	Options(4)设置约束 g 的终止条件
5	选择主要算法	0	Options(5)选择主要优化算法
6	搜索方向算法	0	fminu( )函数为无约束优化搜索方向提供了 3 种算法： Options(6)=0，拟牛顿法的 BFGS 公式 Options(6)=1，拟牛顿法的 DFP 公式 Options(6)=2，梯度法
7	步长一维搜索	0	fminu( )函数为无约束优化的步长一维搜索提供了两种算法： Options (7)=0，二次和三次混合插值法 Options (7)=1，三次多项式插值法
8	函数值输出		Options(8)输出最终迭代函数值
9	梯度检验	0，不检验	Options(9)比较梯度
10	函数计算次数		Options(10)输出函数计算次数
11	梯度计算次数		Options(11)输出函数梯度计算次数
12	约束计算次数		Options(12)输出约束计算次数
13	等式约束个数	0，等式约束个数为零	Options(13)输入等式约束个数
14	最大迭代次数	100n（n 为变量的维数）	Options(14)输入最大迭代次数
15	目标个数	0	Options(15)输入目标个数

（续）

序　号	功　能	默认值及其含义	说　明
16	差分步长最小值	1e－8	步长的下限或变量的最小梯度值
17	差分步长最大值	0.1	步长的上限或变量的最大梯度值
18	步长		步长参数，第 1 次迭代时置 1

8.2.2　二次规划问题

二次规划问题（Quadratic Programming）是最简单的非线性规划问题，其目标函数是二次函数，而约束函数是线性函数。由于二次规划问题的求解比较成熟，有时可以将一些求解比较困难的一般非线性约束规划问题转化为较易处理的序列二次规划子问题求解。

用于求解二次规划问题的 MATLAB 函数是 quadprog，二次规划的数学模型表示为

$$\begin{cases}\min f(X)=\dfrac{1}{2}X^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}X+\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}X\\ \text{s.t. } \boldsymbol{A}X\leqslant\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{Aeq}X=\boldsymbol{beq}\\ lb\leqslant X\leqslant ub\end{cases}$$

使用格式为：

```
[xopt,fopt] = quadprog(H,C,A,b,Aeq,beq,lb,ub,x0,options)
```

其中，输入参数有：

- ***H*** 是目标函数的海色矩阵。
- ***C*** 是目标函数设计变量一次项的系数向量。
- ***A*** 和 **b** 分别是不等式约束函数的系数矩阵和常数向量。
- ***Aeq*** 和 ***beq*** 分别是等式约束函数的系数矩阵和常数向量。
- *lb* 和 *ub* 分别是设计变量的下限和上限。
- *x*0 是初始点。
- options 是设置优化选项参数，见表 8-1。

输出参数有：xopt 和 fopt 分别是返回目标函数的最优解及其函数值。

例 8-7　求解约束优化（二次规划）问题

$$\begin{cases}f(X)=2x_1^2+2x_2^2+x_3^2-2x_1x_2+x_3\\ \text{s.t. }(X)=x_1+3x_2+2x_3\leqslant 6\\ h(X)=2x_1-x_2+x_3=4\\ x_1,x_2,x_3\geqslant 0\end{cases}$$

1）将目标函数写成二次函数的形式 $f(\boldsymbol{X})=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}$，其中

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}2&-2&0\\-2&4&0\\0&0&2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

线性不等式约束函数的系数矩阵和常数向量为

$$\boldsymbol{A}=[1,3,2],\qquad \boldsymbol{b}=[6]$$

线性等式约束函数的系数矩阵和常数向量为

$$\boldsymbol{Aeq}=[2,-1,1],\qquad \boldsymbol{beq}=[4]$$

2）编制求解二次规划的 M 文件

```
%求解二次规划问题
H=[2,-2,0;-2,3,0;0,0,2];                         %目标函数的海色矩阵
C=[0,0,1];                                       %各维变量的系数向量
A=[1,3,2];                                       %不等式约束函数的系数矩阵
b=[6];                                           %不等式约束函数的常数向量
Aeq=[2,-1,1];                                    % 等式约束函数的系数矩阵
beq=[4];                                         % 等式约束函数的常数向量
lb=zeros(3,1);                                   %设计变量的下限
[xopt,fopt]=quadprog(H,C,A,b,Aeq,beq,lb)         % 调用线性规划函数
%最优点的约束函数值
g=A*xopt-b                                       % 不等式约束
h=Aeq*xopt-beq                                   % 等式约束
```

M 文件运行结果：

```
Optimization terminated successfully.
xopt =
     2.4783
     1.0870
     0.1304
fopt =
     2.6739
g =
   8.8818e-016
h =
  -4.4409e-016
```

可见，二次规划的约束最优解 $\boldsymbol{X}^{*}=[2.4783,1.0870,0.1304]^{\mathrm{T}}$ 位于不等式约束 $g(\boldsymbol{X})\leqslant 0$ 和等式约束 $h(\boldsymbol{X})=0$ 的交集。

8.2.3 无约束非线性规划问题

求解无约束非线性规划问题 $\min f(\boldsymbol{X})$ 的 MATLAB 函数有：fminbnd、fminunc 和 fminsearch，它们都只能输出局部最优解。

1. 函数 fminbnd 应用

函数 fminbnd 只能求解单变量的无约束非线性规划问题，而且要求目标函数为连续函数。它的调用格式为：

```
[xopt,fopt,exitflag,output]=fminbnd(fun,x1,x2,options)
```

其中，输入参数有：

- fun 是目标函数。
- $[x1,x2]$ 是迭代搜索区间，即变量的边界约束，即 $x1\leqslant x\leqslant x2$。
- options 是设置优化选项参数，见表 8-1。例如，options（1）为负值时，则显示中间过

程，默认值是 options(1)=0；options(2)为最优解 xopt 的误差范围，默认值是“1e-4”；options(14)是函数求值的最大次数，默认值是 options(14)=500。

输出参数有：

- Xopt 为返回的满足 fun 取得最小值的 x 的值。
- fopt 为目标函数最小值。
- exitflag 表示退出条件：exitflag>0 表示计算收敛，exitflag=0 表示超过了最大的迭代次数，exitflag<0 表示计算不收敛。
- output 表示输出信息，它有 3 个分量：“iterations”表示迭代次数，“funcCount”表示代入函数次数，“algorithm”表示选用的优化算法。

例 8-8　求解单变量的无约束非线性规划问题

$$\min f(x)=\frac{x^5+x^3+x^2-1}{e^{x^2}+\sin(-x)}$$

```
%单变量函数的无约束非线性优化
fun='(x^5+x^3+x^2-1)/(exp(x^2)+sin(-x))';          % 定义一维目标函数
[xopt,fopt,exitflag,output]=fminbnd(fun,-2,2)
ezplot(fun,[-2,2]);                                 % 绘制符号函数图形
grid on;
xlabel('\bf x');ylabel('\bf y');
title('\bf 单变量函数的无约束非线性优化')
gtext('\bf y=(x^5+x^3+x^2-1)/(e^{x^2}+sin(-x))');
gtext('\bf x^*');
```

M 文件运行结果：

```
xopt =
   0.2176
fopt =
  -1.1312
exitflag =
     1
output =
      iterations: 12
       funcCount: 13
       algorithm: 'golden section search, parabolic interpolation'
         message: [1x112 char]
```

从输出结果可知，在最优点 $x^*=0.2176$ 处，函数值 $f(x^*)=-1.1312$。由于 exitflag=1，表示计算收敛。优化运算的输出信息表明：迭代次数是 12，代入函数次数是 13，选用的一维黄金分割优化算法，运用了抛物线插补。绘制符号函数图形如图 8-2 所示。

2. 函数 fminsearch 应用

函数 fminsearch 可用于求解单变量或多变量的无约束非线性规划问题，它的优化算法比较简单，适合处理目标函数阶次低、间断点多和比较简单的优化问题。它的使用格式为：

```
[xopt,fopt,exitflag,output]=fminsearch (fun,x0,options)
```

其中，输出参数有：

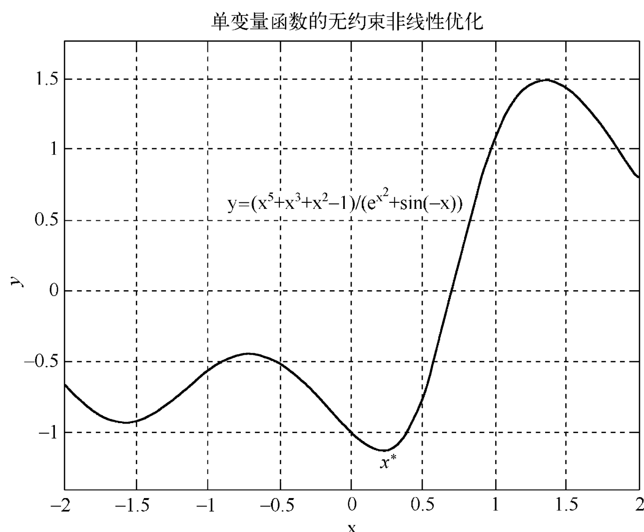


图 8-2　一维非线性函数线图

- xopt 和 fopt 分别是返回目标函数的最优解及其函数值。
- 返回参数 exitflag 表示退出条件：exitflag >0 表示计算收敛，exitflag =0 表示超过了最大的迭代次数，exitflag <0 表示计算不收敛。
- 返回参数 output 表示输出信息，它有 3 个分量："iterations" 表示迭代次数，"funcCount" 表示代入函数次数，"algorithm" 表示选用的优化算法。

输入参数有：

- fun 是目标函数。
- $x0$ 是初始点。
- options 是设置优化选项参数，见表 8-1。例如，options(1)为负值时，则显示中间过程，默认值是 options(1) =0；options(2)为最优解 xopt 的误差范围，默认值是 "1e-4"；options(3)为最优解 fopt 的误差范围，默认值是 "1e-4"；options(14)是为函数求值的最大次数，默认值是 options(14) =200。

例 8-9　求二维无约束非线性函数 $f(x_1,x_2)=(x_1^2-2x_1)\mathrm{e}^{-x_1^2-x_1x_2-x_2^2}$ 的最优解。

```
% 二维无约束非线性优化
fun ='(x(1)^2-2*x(1))*exp(-x(1)^2-x(1)*x(2)-x(2)^2)';
[xopt,fopt,exitflag,output] = fminsearch(fun,[1,1])
f ='(x^2-2*x)*exp(-x^2-x*y-y^2)';                % 定义二维符号函数
ezmeshc(f);                                     % 绘制符号函数图形(含等高线)
xlabel('\bf x');ylabel('\bf y');zlabel('\bf f(x,y)');
```

M 文件运行结果：

```
xopt =
    0.6111    -0.3055
fopt =
   -0.6414
exitflag =
     1
```

```
output =
      iterations: 36
      funcCount: 70
      algorithm:' Nelder - Mead simplex direct search'
        message: [1x196 char]
```

从输出信息可知，使用单纯形法寻优，经过 36 次迭代计算之后，计算收敛在极小点 $\boldsymbol{X}^*=\begin{bmatrix}x_1^*\\x_2^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.6111\\-0.3055\end{bmatrix}$，目标函数达到最小值 $f(\boldsymbol{X}^*)=-0.6414$。

绘制符号函数图形如图 8-3 所示。

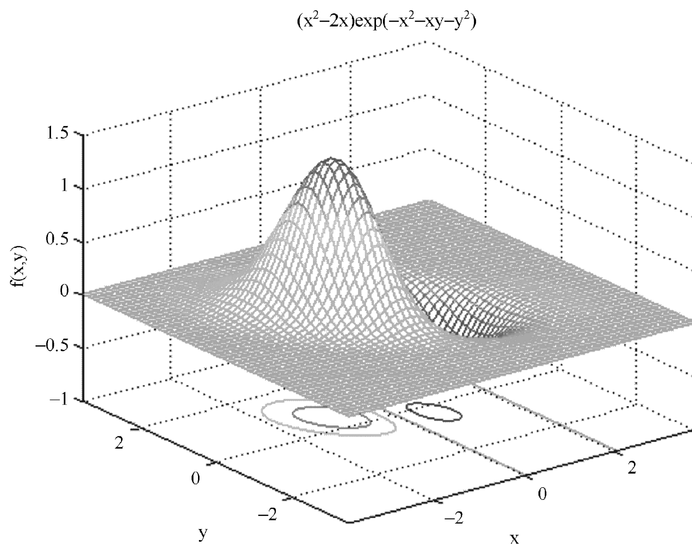


图 8-3　二维非线性函数三维曲面图

3. 函数 fminunc 应用

函数 fminunc 的优化算法比较复杂，而且可供选择的几种不同算法，适用于求解比较复杂的优化问题。它的调用格式是：

```
[x,fval,exitflag,output,grad,hessian] =
        fminunc(@fun,x0,options,P1,P2…)
```

其中，输出参数有：

- x 是返回目标函数的最优解。
- fval 是返回目标函数在最优解 x 点的函数值。
- exitflag 是返回算法的终止标志。
- output 是返回优化算法的信息的一个数据结构。
- grad 是返回目标函数在最优解 x 点的梯度。
- hessian 是返回目标函数在最优解 x 点的 hessian 矩阵值。

输入参数有：

- fun 是调用目标函数的函数文件名。
- $x0$ 是初始点。

- options 是设置优化选项参数，见表 8-1，有 18 个元素，用以在计算时控制精度要求、输出形式、算法选择、迭代次数、梯度等重要问题，可用空矩阵符号“[ ]”表示它的默认值。
- $P1$、$P2$ 等是传递给 fun 的附加参数。

例 8-10 求二维无约束非线性函数的最优解

$$\min f(X) = e^{x_1}(4x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1x_2 + 2x_2 + 1)$$

```
% 二维无约束非线性优化
% 函数 fminunc 求解二维无约束非线性优化问题
fun ='exp(x(1))*(4*x(1)^2+2*x(2)^2+4*x(1)*x(2)+2*x(2)+1)'
x0=[0,0];
options=optimset('largescale','off','display','iter','tolx',1e-8,'tolfun',1e-8);
[x,fval,exitflag,output,grad,hessian]=fminunc(fun,x0,options)
f ='exp(x)*(4*x^2+2*y^2+4*x*y+2*y+1)';
ezmesh(f);                                    % 绘制符号函数图形
xlabel('\bf x');ylabel('\bf y');zlabel('\bf f(x,y)');
```

说明：在优化函数 fminunc 的输入参数“options”命令中各个选项的意义是：

- 'largescale','off' 表示关闭了大规模方式。
- 'display' 用来控制计算过程的显示。
- 'iter' 表示显示优化过程的每次计算结果（'off' 不显示所有输出，'final' 仅输出最后结果）。
- 'tolx'，1e-8 是控制输入变量 x 的允许误差精度。
- 'tolfun'，1e-8 是控制目标函数的允许误差精度（默认值是“1e-4”）。

M 文件运算结果：

```
fun =
exp(x(1))*(4*x(1)^2+2*x(2)^2+4*x(1)*x(2)+2*x(2)+1)
                                                                First-order
Iteration     Func-count          f(x)          Step-size        optimality
    0            3                  1                                  2
    1            9           0.717044          0.125092             1.05
    2           15          0.0739041                10             1.28
    3           21        0.000428524          0.430857           0.0746
    4           24        0.000144084                 1           0.0435
    5           27       1.95228e-008                 1         0.000487
    6           30       6.62419e-010                 1        9.82e-005
    7           33       1.83045e-015                 1        2.46e-008
Optimization terminated: relative infinity-norm of gradient less than options.TolFun.
Computing finite-difference Hessian using user-supplied objective function.
x =
    0.5000    -1.0000
fval =
  1.8304e-015
exitflag =
     1
```

```
output =
          iterations: 7
          funcCount: 33
             stepsize: 1
      firstorderopt: 2.4568e-008
            algorithm: 'medium-scale: Quasi-Newton line search'
               message: [1x85 char]
grad =
   1.0e-007 *
      0.2457
             0
hessian =
    13.1946      6.5953
      6.5953      6.5949
```

说明：M 文件运行的输出信息表明，使用拟牛顿线搜索算法，经过 7 次迭代，得到目标函数的极小点 $X^* = \begin{bmatrix} 0.5000 \\ -1.0000 \end{bmatrix}$ 和最优函数值 $f(X^*) = 1.8304 \times 10^{-15}$。目标函数在极小点的梯度是 $\nabla f(X^*) = \begin{bmatrix} 0.2457 \times 10^{-7} \\ 0 \end{bmatrix}$，非常接近零向量；hessian 矩阵是 $\nabla^2 f(X^*) = \begin{bmatrix} 13.1946 & 6.5953 \\ 6.5953 & 6.5949 \end{bmatrix}$。

该二维非线性函数的三维曲面图如图 8-4 所示。

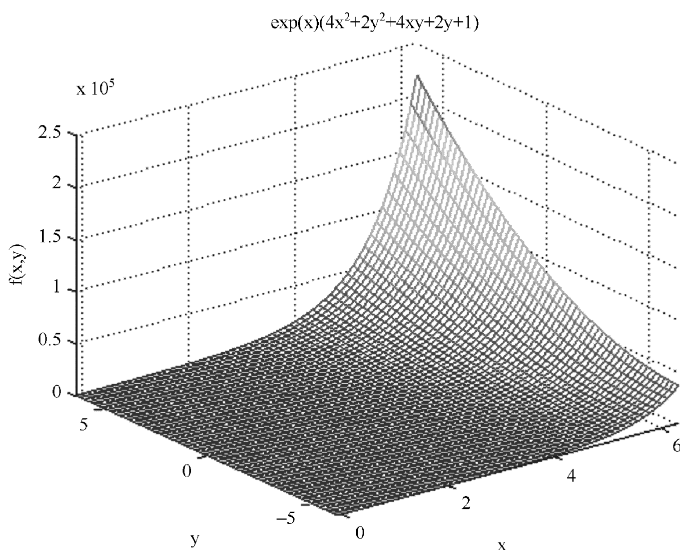


图 8-4　二维非线性函数的三维曲面图

8.2.4　约束非线性规划问题

求解约束非线性规划问题的 MATLAB 函数是 fmincon，它要求目标函数、约束函数和函数梯度都是连续的，而且该函数是根据给出的初始值来进行梯度步长收敛的，一般只能搜索到局部最优解。约束非线性规划问题的数学模型表示为

$$\begin{cases} \min f(X) \\ \text{s. t.} \quad \boldsymbol{A}X \leqslant \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{Aeq}X = \boldsymbol{beq} \\ C(X) \leqslant 0 \\ Ceq(X) = 0 \\ \boldsymbol{Lb} \leqslant X \leqslant \boldsymbol{Ub} \end{cases}$$

函数 fmincon 的调用格式是：

```
[xopt,fopt,exitflag,output,hession] =
fmincon(@fun,x0,A,b,Aeq,beq,Lb,Ub,'Nlc',options,P1,P2,…)
```

其中，输出参数有：

- xopt 是返回目标函数的最优解。
- fopt 是返回目标函数在最优解 x 点的函数值。
- exitflag 是返回算法的终止标志。
- output 是返回优化算法的信息的一个数据结构。
- hessian 是返回目标函数在最优解 x 点的 Hessian 矩阵值。

输入参数有：

- fun 是调用目标函数的函数文件名。
- $x0$ 是初始点。
- 线性不等式约束条件的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和常数向量 $\boldsymbol{b}$。
- 线性等式约束条件的系数矩阵 $\boldsymbol{Aeq}$ 和常数向量 $\boldsymbol{beq}$。
- 设计变量 X 的下界向量 $\boldsymbol{Lb}$ 和上界向量 $\boldsymbol{Ub}$。
- ‘Nlc’ 是定义非线性约束条件的函数名。
- options 是设置优化选项参数，见表 8-1。
- P1、P2 等是传递给 fun 的附加参数。

参数 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{Aeq}$，$\boldsymbol{beq}$，$\boldsymbol{Lb}$，$\boldsymbol{Ub}$，options 如果没有定义，可用空矩阵符号“[ ]”代替。

例 8-11 求解约束非线性规划问题

$$\begin{cases} \min f(X) = e^{x_1}(4x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1x_2 + 2x_2 + 1) \\ \text{s. t.}\ g_1(X) = 1.5 + x_1x_2 - x_1 - x_2 \leqslant 0 \\ g_2(X) = -x_1x_2 - 10 \leqslant 0 \\ g_3(X) = x_1 + x_2 \leqslant 0 \\ g_4(X) = -x_1 - 10 \leqslant 0 \\ g_5(X) = x_1 - 10 \leqslant 0 \\ g_6(X) = -x_2 - 10 \leqslant 0 \\ g_7(X) = x_2 - 10 \leqslant 0 \end{cases}$$

在该约束非线性规划问题的数学模型中，$g_1(X) \leqslant 0$ 和 $g_2(X) \leqslant 0$ 是非线性不等式约束，$g_3(X) \leqslant 0$ 是线性不等式约束，$g_4(X) \leqslant 0$、$g_5(X) \leqslant 0$、$g_6(X) \leqslant 0$ 和 $g_7(X) \leqslant 0$ 是设计变量的边界条件。

```
% 约束非线性优化问题
% 1-目标函数文件 objfun.m
function f = objfun(x)
```

```
f = exp(x(1)) * (4 * x(1)^2 + 2 * x(2)^2 + 4 * x(1) * x(2) + 2 * x(2) + 1);

% 2-非线性约束函数文件 confun.m
function [c,ceq] = confun(x)
% 非线性不等式约束
c(1) = 1.5 + x(1) * x(2) - x(1) - x(2);
c(2) = - x(1) * x(2) - 10;
% 非线性等式约束
ceq = [ ];

% 3-优化函数应用
x0 = [ -1 1];                  % 设计变量初值
A = [1,1];b = 0;               % 线性不等式约束 g3(X)的系数行阵和常数
Aeq = [ ];beq = [ ];           % 没有线性等式约束
lb = [ -10, -10];              % 设计变量下限
ub = [10,10];                  % 设计变量上限
options = optimset('largescale','off','display','iter');
[xopt,fval,exitflag,output] = fmincon(@objfun,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub,@confun,options)
[c] = confun(xopt)             % 计算最优点的非线性约束函数值
```

说明：在优化函数 fmincon 的输入参数“options”命令中各个选项的意义是：

- 'largescale','off' 表示关闭了大规模方式。
- 'display' 用来控制计算过程的显示。
- 'iter' 表示显示优化过程的每次计算结果（'off' 不显示所有输出,'final' 仅输出最后结果)。

M 文件运行结果：

```
Optimization terminated: first - order optimality measure less
than options.TolFun and maximum constraint violation is less
than options.TolCon.
Active inequalities (to within options.TolCon = 1e - 006):
  lower        upperineqlin    ineqnonlin
                                   1
                                   2
xopt =
    -9.5474       1.0474
fval =
     0.0236
exitflag =
      1
output =
         iterations: 8
funcCount: 28
            stepsize: 1
           algorithm:'medium - scale: SQP, Quasi - Newton, line - search'
    firstorderopt: 8.5131e - 007
    cgiterations: [ ]
```

```
            message: [1x144 char]
    c =
      1.0e-007 *
       -0.9031      0.9031
```

说明：M 文件运行的输出信息表明，使用拟牛顿线搜索算法，经过 8 次迭代，得到目标函数的极小点 $\boldsymbol{X}^* = \begin{bmatrix} -9.5474 \\ 1.0474 \end{bmatrix}$ 和最优函数值 $f(\boldsymbol{X}^*) = 0.0236$。由于 $c_1(\boldsymbol{X}^*) = -0.9031 \times 10^{-7}$ 和 $c_1(\boldsymbol{X}^*) = 0.9031 \times 10^{-7}$ 非常接近零，可见约束最优解 $\boldsymbol{X}^*$ 位于两个非线性不等式约束的交集上。

8.2.5 多目标规划问题

在规划问题中，目标函数是根据工程优化设计问题的主要准则 $f(X)$ 或几个设计准则 $f_1(X)$、$f_2(X)$……来建立的。如果某项设计要求同时兼顾若干项设计目标达到最优，则属于多目标优化设计问题。其中，由各项设计准则 $f_1(X)$、$f_2(X)$……建立的目标函数，称为分目标函数。多目标优化问题要比单目标优化问题复杂得多。

对于单目标优化问题，任何两个解都可以用其目标函数值来比较方案的优劣。因此，最优解序列 $\{X^{*(K)}(K=1,2,\cdots)\}$ 是完全有序的。对于多目标优化问题，任何两个解不一定能够用其目标函数值比较方案的优劣，只能是半有序的。假设有两个设计方案 $X^{(H)}$、$X^{(L)}$，如果它们各个分目标的函数值都满足条件

$$f_j(X^{(L)}) \leqslant f_j(X^{(H)}) \qquad (j=1,2,\cdots,t)$$

则方案 $X^{(L)}$ 比 $X^{(H)}$ 好，$X^{(H)}$ 称为劣解。

能够获得使各分目标同时达到最优的绝对最优解是很困难的，目前在理论和算法上还没有完善的处理多目标优化方法。因为一个分目标的极小化往往会引起另外一些分目标的变化，它们的极小化甚至是矛盾和对立的。例如，工程优化设计中的技术性能要求往往与经济性指标的要求相互矛盾。因此，需要在各个分目标函数最优值之间进行协调，以便取得对各个分目标来说都算是比较好的方案。

由于多目标优化问题本身的复杂性，决定了求解多目标优化问题的困难性。处理单目标优化问题已经有许多有效的优化方法，可以将多目标优化问题转化为单目标优化问题，使多目标优化问题解的半有序性转化为单目标优化问题解的完全有序性。应当指出，这种转化后问题的解往往是原多目标优化问题的一个或部分非劣解，不是全部的非劣解。如何得到一个能够接受的最好非劣解，关键在于选择某种形式的折中。

MATLAB 优化工具箱函数 fgoalattain 用于求解的多目标优化问题，也称为目标达到问题。其形式是：

$$\begin{cases} \min v \\ \text{s.t.} \quad f_i(X) - w_i v \leqslant goal_i \quad (i=1,2,\cdots,t) \\ \boldsymbol{A}X \leqslant \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{Aeq}X = \boldsymbol{beq} \\ C(X) \leqslant 0 \\ Ceq(X) = 0 \\ \boldsymbol{Lb} \leqslant X \leqslant \boldsymbol{Ub} \end{cases}$$

其中，ν 是标量变量；$f_i(X)(i=1,2,\cdots,t)$ 是各个分目标函数，$goal_i$ 和 $\boldsymbol{w}_i$ 是各个分目标及其权重向量。

函数 fgoalattain 的使用格式为：

```
[xopt,fopt,exitflag,output,hessian] =
fgoalattain (@fun,x0,goal,w,A,b,Aeq,beq,Lb,Ub,'Nlc',options,P1,P2,…)
```

其中，输出参数有：

- xopt 是返回目标函数的最优解。
- fopt 是返回目标函数在最优解 x 点的函数值。
- exitflag 是返回算法的终止标志。
- output 是返回优化算法的信息的一个数据结构。
- hessian 是返回目标函数在最优解 x 点的 Hessian 矩阵值。

输入参数有：

- fun 是调用目标函数的函数文件名。
- $x0$ 是初始点。
- $goal$ 各个分目标。
- w 是各个分目标的权重。
- 线性不等式约束条件的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和常数向量 $\boldsymbol{b}$。
- 线性等式约束条件的系数矩阵 ***Aeq*** 和常数向量 ***beq***。
- 设计变量 X 的下界向量 ***Lb*** 和上界向量 ***Ub***。
- ‘Nlc’ 是定义非线性约束条件的函数名。
- options 是设置优化选项参数，见表 8-1。
- $P1$、$P2$ 等是传递给 fun 的附加参数。

例 8-12　求解多目标线性规划问题：

$$\begin{cases}\max f_1(X)=100x_1+90x_2+80x_3+70x_4\\ \min f_2(X)=3x_2+2x_4\\ \text{s. t. } -x_1-x_2\leqslant -30\\ -x_3-x_4\leqslant -30\\ 3x_1+2x_3\leqslant 120\\ 3x_2+2x_4\leqslant 48\\ x_i\geqslant 0, i=1,2,3,4\end{cases}$$

已知设计变量初值 $x0=[20,10,30,0]$，分目标的初值 $f0=[10000,40]$，分目标的权重 $w=[1,2e-4]$。

编制目标函数文件：

```
% 目标函数 fun_opt.m
function [f]=fun_opt(x)
f(1)= -(100*x(1)+90*x(2)+80*x(3)+70*x(4));
f(2)=3*x(2)+2*x(4);
```

编制多目标优化函数调用文件：

```
% 多目标规划函数应用
% 线性不等式约束条件的系数矩阵和常数向量
    [ -1   -1    0    0;
A =    0    0   -1   -1;
       3    0    2    0;
       0    3    0    2];
b = [ -30  -30 120 48];
% 线性等式约束条件的系数矩阵和常数向量
Aeq = [ ];beq = [ ];
% 设计变量的边界条件
lb = zeros(1,4);ub = [ ];
% 设计变量和分目标的初值
x0 = [20,10,30,0];
f0 = [10000,40];
% 分目标的权重
w = [1 2e-4];
% 使用函数 fgoalattain. m
[xopt,fopt] = fgoalattain(@fun_opt,x0,f0,w,A,b,Aeq,beq,lb,ub)
```

计算结果：

```
Optimization terminated: Search direction less than 2 * options. TolX
andmaximum constraint violation is less than options. TolCon.
Active inequalities (to within options. TolCon = 1e-006):
  lower        upperineqlin    ineqnonlin
    4                      1              1
                           3              2
xopt =
   17.7035    12.2965    33.4447     -0.0000
fopt =
  1.0e+003  *
   -5.5526     0.0369
```

说明：M 文件运行输出的设计变量最优值 $\boldsymbol{X}^* = [17.7035, 12.2965, 33.4447, 0]^{\mathrm{T}}$ 和两个目标的最优函数值 $f(\boldsymbol{X}^*) = [5552.6, 36.9]^{\mathrm{T}}$。由于 $x_1^* + x_2^* = 17.7035 + 12.2965 = 30$，可见约束最优解 $\boldsymbol{X}^*$ 位于第一个线性不等式约束边界上。

第 2 篇　机械工程设计分析应用

本篇介绍 MATLAB 在机械工程设计分析中的应用，包括连杆机构的运动设计和运动分析、间歇运动机构和轮系的运动分析、凸轮机构（包括共轭平面分度凸轮机构和圆柱分度凸轮机构）的设计和运动分析、齿轮、蜗杆和螺旋传动的设计计算、轴系设计计算和分析、机械联接设计计算，以及优化设计分析和曲线拟合等方面，结合三十多个机械工程设计分析课题，进行数学建模、编制 M 文件、运用计算机数学方法、运算求解和结果分析等，力图体现计算机数学方法、MATLAB 功能和实际工程技术问题三者有机结合。

第9章　连杆机构的运动设计和运动分析

连杆机构（Planar Linkage）的运动设计是一个比较复杂和困难的问题，常用的设计方法有几何综合法和解析综合法。几何综合法简单直观，但是精度较低。解析综合法精确度较高，但是计算工作量大，随着计算机辅助数值解法的发展，解析综合法已经得到广泛的应用。

连杆机构运动分析就是在已知机构的运动尺寸和已知原动件的运动规律的前提下，确定机构中其他构件或其他构件上的某些点的位置、速度、加速度等运动参数。机构运动分析的方法通常有矢量方程图解法和解析法。图解法形象直观，简便，精度较低；解析法精度高，但需进行大量的数学运算，一般需借助电子计算机来完成。

9.1　连杆机构的运动设计

9.1.1　给定极限位置和最小传动角的设计问题

1. 建立连杆机构的运动几何方程

铰链四杆机构如图 9-1 所示。设曲柄 AB、连杆 BC、摇杆 CD 和机架 AD 的长度分别为 l_1、l_2、l_3、l_4，在机构两个极限位置和最小传动角位置组成的 $\triangle AC_1C_2$ 中，有如下几何关系

$$\left.\begin{aligned}\overset{\frown}{C_1C_2} &= 2l_3\sin\frac{\psi}{2}\\ AC_1 &= l_2 - l_1\\ AC_2 &= l_2 + l_1\end{aligned}\right\}\tag{9-1}$$

根据图 9-1 中所示四个三角形 $\triangle AC_1C_2$、$\triangle AC_1D$、$\triangle AC_2D$ 和 $\triangle B'C'D$ 及余弦定理得

$$\left.\begin{aligned}&\left(2l_3\sin\frac{\psi}{2}\right)^2 = (l_2+l_1)^2 + (l_2-l_1)^2 - 2(l_2+l_1)(l_2-l_1)\cos\theta\\ &(l_2-l_1)^2 = l_3^2 + l_4^2 - 2l_3l_4\cos\psi_0\\ &(l_2+l_1)^2 = l_3^2 + l_4^2 - 2l_3l_4\cos(\psi_0+\psi)\\ &(l_4-l_1)^2 = l_2^2 + l_3^2 - 2l_2l_3\cos\gamma_{\min}\end{aligned}\right\}\tag{9-2}$$

式（9-2）表明了铰链四杆机构的运动几何关系，其中有 8 个参数。在已知四杆机构的极位夹角 θ（或行程速度变化系数 k）、摇杆长度 l_3 和摆角 ψ 的条件下，再补充最小传动角

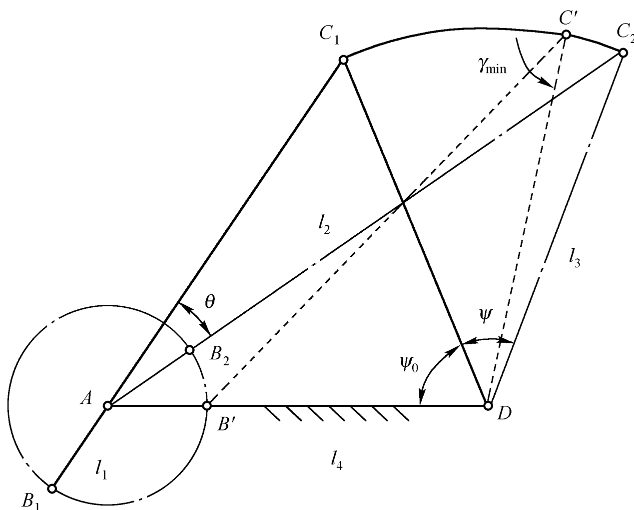


图 9-1　铰链四杆机构的极限位置和最小传动角

γ_{min}、曲柄长度 l_1、连杆长度 l_2、机架长度 l_4等结构参数中的某个辅助条件，就可以通过求解非线性方程组（9-2）得到其他未知杆件长度，以及机构在左极限位置时摇杆位置角 ψ_0。

2. 计算实例和求解方法

例 9-1　试用解析综合法设计一个铰链四杆机构。已知机构行程速度变化系数 $k=1.25$，摇杆 CD 的长度 $l_3=250$ mm，摆角 $\psi=30°$，要求机构的最小传动角 $\gamma_{min} \geqslant 40°$。

在 MATLAB 平台上，首先参照式（9-1）建立描述铰链四杆机构运动的运动几何方程的函数文件；输入极位夹角 θ（根据行程速度变化系数 k 求出）、摇杆长度 l_3、摆角 ψ 和最小传动角 γ_{min}等已知数据，估计待求参数的初始值；然后使用非线性方程组的数值求解函数 fsolve，可以方便地得到计算结果。

3. M 文件和运算结果

```
%给定机构极限位置和最小传动角的铰链四杆机构运动设计(调用 qbyg.m)
x0 = [50 120 200 0.5];
k = 1.25;                          %行程速比系数
theta = pi * (k - 1)/(k + 1);      %极位夹角
yg = 250;                          %摇杆长度
psi = pi/6;                        %摇杆摆角
gamin = 2 * pi/9;                  %最小传动角
x = fsolve(@qbyg,x0);
disp'          ********  已知条件  ********'
fprintf('        行程速比系数        k = %3.4f \n',k)
fprintf('        极位夹角        theta = %3.4f° \n',theta * 180/pi)
fprintf('        摇杆长度           yg = %3.4f mm \n',yg)
fprintf('        摇杆摆角          psi = %3.4f° \n',psi * 180/pi)
fprintf('        最小传动角      gamin = %3.4f° \n',gamin * 180/pi)
disp'          ********  计算结果  ********'
fprintf('        曲柄长度            a = %3.4f mm \n',x(1))
fprintf('        连杆长度            b = %3.4f mm \n',x(2))
```

```
fprintf('       机架长度          d = %3.4f mm \n',x(3))
fprintf('       摇杆位置角        psi0 = %3.4f° \n',x(4) * 180/pi)

%铰链四杆机构非线性参数方程组
function f = qbyg(x)
k = 1.25;                       %行程速比系数
theta = pi * (k - 1)/(k + 1);   %极位夹角
yg = 250;                       %摇杆长度
psi = pi/6;                     %摇杆摆角
gamin = 2 * pi/9;               %最小传动角
%x(1)是曲柄长度;x(2)是连杆长度;x(3)是机架长度;x(4)是摇杆初始位置角
f1 = (x(2) + x(1))^2 + (x(2) - x(1))^2 - 2 * (x(2) + x(1)) * (x(2) - x(1)) * cos(theta) - (2
 * yg * sin(psi/2))^2;
f2 = yg^2 + x(3)^2 - 2 * yg * x(3) * cos(x(4)) - (x(2) - x(1))^2;
f3 = yg^2 + x(3)^2 - 2 * yg * x(3) * cos(x(4) + psi) - (x(2) + x(1))^2;
f4 = yg^2 + x(2)^2 - 2 * yg * x(2) * cos(gamin) - (x(3) - x(1))^2;
f = [f1;f2;f3;f4];
```

运算结果：

```
********  已知条件  ********
行程速比系数        k = 1.2500
极位夹角        theta = 20.0000°
摇杆长度           yg = 250.0000 mm
摇杆摆角          psi = 30.0000°
最小传动角      gamin = 40.0000°

********  计算结果  ********
曲柄长度            a = 62.9934 mm
连杆长度            b = 105.9045 mm
机架长度            d = 245.0702 mm
摇杆位置角       psi0 = 9.8794°
```

得到的计算结果是：曲柄长度 $l_1 = 62.9934$ mm、连杆长度 $l_2 = 105.9045$ mm、机架长度 $l_4 = 245.0702$ mm，摇杆在左极限位置时的位置角 $\psi_0 = 9.8794°$。

9.1.2 给定连架杆对应位置的设计问题

1. 建立机构的位置方程式

在如图 9-2 所示的铰链四杆机构中，已知机构主动件 *AB* 与从动件 *CD* 之间的位置对应关系 $\psi = f(\varphi)$，根据各个构件长度在直角坐标系中的投影，建立机构的位置方程式

$$\left.\begin{aligned} l_1\cos(\varphi+\varphi_0)+l_2\cos\delta=l_4+l_3\cos(\psi+\psi_0) \\ l_1\sin(\varphi+\varphi_0)+l_2\sin\delta=l_3\sin(\psi+\psi_0) \end{aligned}\right\} \tag{9-3}$$

将上式整理后得到机构的位置方程式

$$l_2^2=l_1^2+l_3^2+l_4^2+2l_3l_4\cos(\psi+\psi_0)-2l_1l_4\cos(\varphi+\varphi_0)-2l_1l_3\cos[(\varphi-\psi)+(\varphi_0-\psi_0)] \tag{9-4}$$

因为连架杆的运动取决于各个构件的相对长度，设机构的相对杆件长度系数为

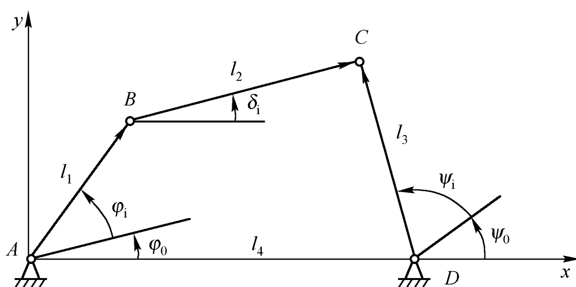


图 9-2　铰链四杆机构连架杆的输入角和输出角

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= \frac{l_1^2 + l_3^2 + l_4^2 - l_2^2}{2l_1 l_3} \\ R_2 &= \frac{l_4}{l_3} \\ R_3 &= \frac{l_4}{l_1} \end{aligned}\right\} \tag{9-5}$$

将它们代入机构的位置方程式（9-3），得到铰链四杆机构位置参数方程

$$R_1 - R_2\cos(\varphi_i + \varphi_0) + R_3\cos(\psi_i + \psi_0) = \cos[(\varphi_i - \psi_i) + (\varphi_0 - \psi_0)] \tag{9-6}$$

当已知两连架杆的对应位置关系 $\psi = f(\varphi)$ 时，式（9-6）中有 R_1、R_2、R_3、φ_0 和 ψ_0 5 个参数，说明在四杆机构常规设计中，能够满足两连架杆的对应位置数最多为 5 组。

2. 计算实例和数学模型

例 9-2　已知铰链四杆机构两连架杆 *AB* 和 *CD* 的初始位置角 $\varphi_0 = \psi_0 = 0°$，它们三组对应位置是 $\varphi_1 = 45°$、$\psi_1 = 52°$；$\varphi_2 = 90°$、$\psi_2 = 82°$；$\varphi_3 = 135°$、$\psi_3 = 112°$，机架的长度 $l_4 = 50$ mm，要求设计该铰链四杆机构。

设计分析：将已知参数代入式（9-6），得到线性方程组

$$R_1 - R_2\cos(\varphi_i + \varphi_0) + R_3\cos(\psi_i + \psi_0) = \cos[(\varphi_i - \psi_i) + (\varphi_0 - \psi_0)] \quad (i = 1, 2, 3)$$

求解该线性方程组，得到机构的相对杆件长度系数 R_1、R_2 和 R_3，再代入式（9-5），计算出三个未知构件的长度

$$\left.\begin{aligned} l_1 &= \frac{l_4}{R_3} \\ l_3 &= \frac{l_4}{R_2} \\ l_2 &= \sqrt{l_1^2 + l_3^2 + l_4^2 - 2l_1 l_3 R_1} \end{aligned}\right\} \tag{9-7}$$

3. M 文件和运算结果

在 MATLAB 平台上，首先输入已知数据：φ_0、ψ_0 和 $[\psi_i, \varphi_i]$ $(i = 1, 2, 3)$，建立线性方程组的系数矩阵 $[a]$ 和 $[b]$；然后使用求逆函数 inv 或矩阵除法（运算符号“\”）求解线性方程组，直接求解出铰链四杆机构的杆长系数 R_1、R_2 和 R_3；输入已知的机架长度 l_4，按照式（9-7）计算出各杆长度。最后可以用求解矩阵或向量的范数的函数 norm，检验计算结果的精度。

```
%实现连架杆角位移的铰链四杆机构运动设计
%已知条件
f0 = 0;p0 = 0;                      %连架杆初始位置角
[f] = [45 90 135] * pi/180;         %曲柄输入角
[p] = [52 82 112] * pi/180;         %摇杆输出角
%杆件相对长度参数R1、R2和R3的系数矩阵
a1 = [1 -cos(f(1) + f0) cos(p(1) + p0)];
a2 = [1 -cos(f(2) + f0) cos(p(2) + p0)];
a3 = [1 -cos(f(3) + f0) cos(p(3) + p0)];
a = [a1;a2;a3]
%线性方程组右边的常数矩阵
b1 = [cos(f(1) - p(1)) + (f0 + p0)];
b2 = [cos(f(2) - p(2)) + (f0 + p0)];
b3 = [cos(f(3) - p(3)) + (f0 + p0)];
b = [b1 b2 b3]'
%线性方程组aR = b直接解法(采用求逆函数inv)
R = inv(a) * b                      %或采用矩阵除法R = a\b
%杆件长度
d = 50;                             %机架长度(已知数据)
x(1) = d/R(3);
x(3) = d/R(2);
x(2) = sqrt(x(1)^2 + x(3)^2 + d^2 - 2 * x(1) * x(3) * R(1));
%检验解的精度(采用求解矩阵或向量范数的函数norm)
en = norm(a * R - b);
disp('          ********   计算结果   ********')
fprintf('          曲柄长度          a = %3.4f mm  \n',x(1))
fprintf('          连杆长度          b = %3.4f mm \n',x(2))
fprintf('          摇杆长度          c = %3.4f mm \n',x(3))
fprintf('          机架长度          d = %3.4f mm \n',d)
disp('')
fprintf('      数值解的精度          en = %3.4e \n',en)
```

运算结果：

```
a = 1.0000   -0.7071    0.6157
    1.0000   -0.0000    0.1392
    1.0000    0.7071   -0.3746
b = 0.9925
    0.9903
    0.9205
R = 0.7384
    1.2162
    1.8097

            ********   计算结果   ********
            曲柄长度        a = 27.6293 mm
            连杆长度        b = 57.2363 mm
```

摇杆长度 c = 41.1104 mm
机架长度 d = 50.0000 mm
数值解的精度 en = 2.7195e − 016

得到的计算结果是：曲柄长度 $l_1 = a = 27.6293$ mm，连杆长度 $l_2 = b = 57.2363$ mm，摇杆长度 $l_3 = c = 41.1104$ mm，机架长度 $l_4 = d = 50$ mm。

可见，采用求逆函数解线性方程组的误差是很小的，达到 10^{-16}数量级。

9.2 连杆机构实现预定函数和轨迹的优化设计

连杆机构运动学的优化设计问题，一般是根据机构运动学参数来建立目标函数。例如，取连杆机构实现的运动（如构件位移、某动点轨迹等）是由机构运动几何参数关系导出的运动参数函数，要求它与预定运动函数在给定运动范围内的误差最小。在连杆机构动力学的优化设计方面，比较简单的是将机构中的压力角和传动角作为对机构进行运动分析和动力分析的重要指标。为了获得最佳的传力性能，要求选择最佳的机构运动学参数，使机构运动最大压力角最小或最小传动角最大。

9.2.1 实现预定函数的优化设计

用从动件与原动件的转角关系 $\psi_s = f(\varphi)$ 来模拟已知函数 $\psi = f(\varphi)$，是一种实现函数的机构综合问题。机构综合理论证明，曲柄摇杆机构采用常规的几何综合法或解析综合法，至多能够精确再现连架杆的五组对应位置。如果要求机构在更多的位置上最佳地逼近预期函数值，而且对机构的参数值有一定的限制，必须采用优化综合法。

例 9–3 要求设计一个曲柄摇杆机构，当原动件曲柄的转角 $\varphi = \varphi_0 \sim \left(\varphi_0 + \dfrac{\pi}{2}\right)$时，要求从动件摇杆的输出角实现函数 $\psi = \psi_0 + \dfrac{2}{3\pi}(\varphi - \varphi_0)^2$。其中，$\varphi_0$，$\psi_0$分别为对应摇杆在右极限位置时，曲柄和摇杆的初始位置角，以水平机架方向逆时针计量。要求机构传动角范围是 $45° \leqslant \gamma \leqslant 135°$，取曲柄长度为单位长度 $l_1 = 1$，根据机器结构取机架相对长度 $l_4 = 5$。

1. 建立优化设计的数学模型

（1）确定设计变量　曲柄摇杆机构按照原动件和从动件角度对应关系，独立参数有三杆相对长度 l_2、l_3、l_4及曲柄和摇杆的初始位置角 φ_0，ψ_0 5 个。如图 9–3 所示，如果取机构的右极限位置时两连架杆与机架所夹的锐角作为初始位置角 φ_0和 ψ_0，则它们可以根据该位置的几何关系确定

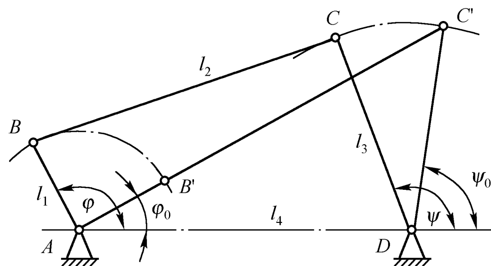


图 9–3　曲柄摇杆机构的初始位置角

$$\varphi_0 = \operatorname{acos}\frac{(l_1 + l_2)^2 - l_3^2 + l_4^2}{2(l_1 + l_2)l_4} \tag{9-8}$$

$$\psi_0 = \operatorname{acos}\frac{(l_1 + l_2)^2 - l_3^2 - l_4^2}{2l_3 l_4} \tag{9-9}$$

并且不再是独立参数。

根据题意曲柄长度为单位长度 $l_1=1$ 和机架长度 $l_4=5$ 已经给定。因此，选择机构的连杆长度 l_2 和摇杆长度 l_3 作为设计变量

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} l_2 \\ l_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

这是一个二维优化设计问题。

（2）建立目标函数　取机构输出角的平方偏差最小为设计目标

$$\min f(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=0}^{s} (\psi_i - \psi_{si})^2$$

式中，ψ_i 是期望输出角，根据题意 $\psi_i=\psi_0+\frac{2}{3\pi}(\varphi_i-\varphi_0)^2$，其中

$$\varphi_i=\varphi_0+\frac{\pi}{2}\times\frac{i}{s}\quad (i=0,1,2,\cdots,s)$$

式中，设曲柄转角 φ 在 $\varphi_0\sim\left(\varphi_0+\frac{\pi}{2}\right)$ 区间内均匀的离散点数为 s；i 是各个离散点的序号。

ψ_{si} 是实际输出角，根据机构的运动几何关系确定（图 9-4）

$$\psi_{si}=\begin{cases}\pi-\alpha_i-\beta_i & (0<\varphi_i\leqslant\pi)\\ \pi-\alpha_i+\beta_i & (\pi<\varphi_i\leqslant 2\pi)\end{cases}$$

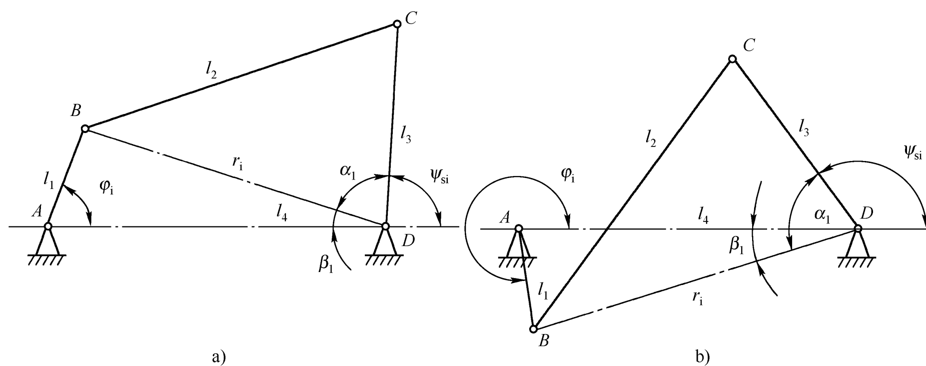


图 9-4　曲柄摇杆机构的输出角

其中，根据△BDC 和△ABD 及余弦定理，得到

$$\left.\begin{aligned}\alpha_i &= \operatorname{acos}\frac{r_i^2+x_2^2-x_1^2}{2r_ix_2}\\ \beta_i &= \operatorname{acos}\frac{r_i^2+l_4^2-l_1^2}{2l_4r_i}\\ r_i &= \sqrt{l_4^2+l_1^2-2l_1l_4\cos\varphi_i}\end{aligned}\right\}\tag{9-10}$$

（3）确定约束条件

① 为了使机构的传力性能良好，机构的最小传动角 $\gamma_{\min}\geqslant 45°$ 或最大传动角 $\gamma_{\max}\geqslant 135°$。曲柄在与机架共线的位置时，机构有最小或最大传动角，如图 9-5 所示。根据机构在该两个位置的余弦定理

$$\left.\begin{aligned}\cos\gamma_{\min}=\frac{x_1^2+x_2^2-(l_4-l_1)^2}{2x_1x_2}\leqslant\cos45^\circ\\ \cos\gamma_{\max}=\frac{x_1^2+x_2^2-(l_4+l_1)^2}{2x_1x_2}\geqslant\cos135^\circ\end{aligned}\right\}\tag{9-11}$$

经过整理，得到约束方程

$$\left.\begin{aligned}g_1(\boldsymbol{X})&=x_1^2+x_2^2-2\cos45^\circ x_1x_2-(l_4-l_1)^2\leqslant0\\ g_2(\boldsymbol{X})&=-x_1^2-x_2^2+2\cos135^\circ x_1x_2-(l_4+l_1)^2\leqslant0\end{aligned}\right\}$$

② 根据曲柄存在的杆长之和条件（曲柄摇杆机构中，曲柄是最短杆，最短杆与最长杆的长度之和不大于其余两杆长度之和)，经过整理得到约束条件

$$\left.\begin{aligned}&l_2\geqslant l_1 && g_3(\boldsymbol{X})=l_1-x_1\leqslant0\\ &l_3\geqslant l_1 && g_4(\boldsymbol{X})=l_1-x_2\leqslant0\\ &l_2+l_3\geqslant l_1+l_4 && g_5(\boldsymbol{X})=(l_4+l_1)-x_1-x_2\leqslant0\\ &l_3+l_4\geqslant l_1+l_2 && g_6(\boldsymbol{X})=x_1-x_2-(l_4-l_1)\leqslant0\\ &l_2+l_4\geqslant l_1+l_3 && g_7(\boldsymbol{X})=-x_1+x_2-(l_4-l_1)\leqslant0\end{aligned}\right\}$$

2. 二维优化设计平面分析

绘制出该优化设计问题的设计平面，如图 9-6 所示。从图中可见，曲柄存在的杆长之和约束条件是不作用约束，起作用约束条件是机构传动角约束条件 $g_1(\boldsymbol{X})\leqslant0$ 和 $g_2(\boldsymbol{X})\leqslant0$，它们围成设计平面中的可行域。

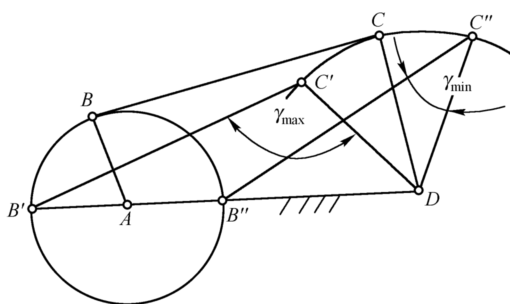


图 9-5　曲柄摇杆机构的最小和最大传动角位置

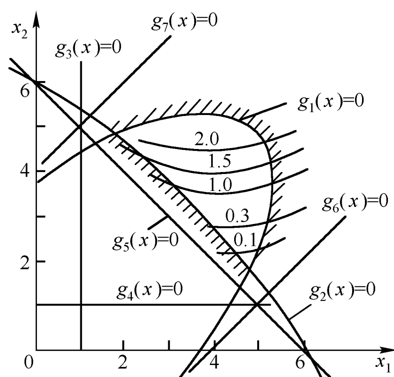


图 9-6　曲柄摇杆机构的设计平面

综上所述，该优化问题的数学模型是

$$\begin{cases}\min f(\boldsymbol{X})=\min\sum\limits_{i=0}^{s}(\psi_i-\psi_{si})^2 \quad \boldsymbol{X}\in D\\ \boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}l_2\\ l_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}\\ \text{s. t.}\quad g_1(\boldsymbol{X})=x_1^2+x_2^2-2\cos45^\circ x_1x_2-(l_4-l_1)^2\leqslant0\\ g_2(\boldsymbol{X})=-x_1^2-x_2^2+2\cos135^\circ x_1x_2-(l_4+l_1)^2\leqslant0\end{cases}$$

3. M 文件和优化结果

在 MATLAB 平台上，根据优化设计数学模型建立目标函数和非线性不等式约束的两个

函数文件；再建立设计变量的边界条件矩阵和非线性不等式系数矩阵，输入设计变量的初始值，使用 MATLAB 中计算多维约束优化函数 fmincon 运算，即可得到优化结果。

```
%曲柄摇杆机构实现函数的优化设计
%(调用目标函数 sxhs_f 和非线性约束函数 sxhs_g)

%1-优化设计主程序
%设计变量的初始值和已知杆件长度(曲柄和机架)
x0=[4.5;4];
qb=1;jj=5;
%设计变量的下界与上界
lb=[1;1];
ub=[10;10];
%没有线性不等式约束
A=[];b=[];
%没有线性等式约束
Aeq=[];beq=[];
%使用多维约束优化命令 fmincon(调用目标函数 sxhs_f 和非线性约束函数 sxhs_g)
[x,fn]=fmincon(@sxhs_f,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub,@sxhs_g);
disp'        ********   连杆机构实现函数优化设计最优解   ********'
fprintf('           连杆相对长度              a=%3.4f     \n',x(1))
fprintf('           摇杆相对长度              b=%3.4f   \n',x(2))
fprintf('           输出角平方误差之和      f*=%3.4f   \n',fn)
%调用多维约束优化非线性约束函数(sxhs_g)计算最优点 x* 的性能约束函数值
g=sxhs_g(x);
disp'           ========    最优点的性能约束函数值      ========'
fprintf('           最小传动角约束函数值  g1*=%3.4f \n',g(1))
fprintf('           最大传动角约束函数值  g2*=%3.4f \n',g(2))

%2-连杆机构实现函数优化的目标函数(sxhs_f)
function f=sxhs_f(x);
s=50;qb=1;jj=5;fx=0;
phi_0=acos(((qb+x(1))^2-x(2)^2+jj^2)/(2*(qb+x(1))*jj));       %曲柄初始角
psi_0=acos(((qb+x(1))^2-x(2)^2-jj^2)/(2*x(2)*jj));             %摇杆初始角
for i=1:s
    phi=phi_0+pi*i/(2*s);
    psi=psi_0+2*(phi-phi_0)^2/(3*pi);
    r=sqrt(qb^2+jj^2-2*qb*jj*cos(phi));
    alpha=acos((r^2+x(2)^2-x(1)^2)/(2*r*x(2)));
    beta=acos((r^2+jj^2-qb^2)/(2*r*jj));
    if phi>0 & phi<=pi
        psi_s=pi-alpha-beta;
    elseif phi>pi & phi<=2*pi
        psi_s=pi-alpha+beta;
    end
    fx=fx+(psi-psi_s)^2;                    %输出角平方误差之和
```

```
end
f = fx;

%3 - 连杆机构实现函数优化的非线性不等式约束函数(sxhs_g)
function [g,ceq] = sxhs_g(x);
qb = 1;jj = 5;gamma_n = 45 * pi/180;gamma_m = 135 * pi/180;
g(1) = x(1)^2 + x(2)^2 - 2 * cos(gamma_n) * x(1) * x(2) - (jj - qb)^2;     % 最小传动角约束
g(2) = - x(1)^2 - x(2)^2 + 2 * cos(gamma_m) * x(1) * x(2) - (jj + qb)^2; % 最大传动角约束
ceq = [];
```

运算结果：

```
******** 连杆机构实现函数优化设计最优解 ********
        连杆相对长度              a = 4.1236
        摇杆相对长度              b = 2.3280
        输出角平方误差之和        f * = 0.0120
  ========   最优点的性能约束函数值   ========
        最小传动角约束函数值    g1 * = -7.1522
        最大传动角约束函数值    g2 * = -0.0000
```

优化结果分析：连杆相对长度 $l_2 = 4.1236$ 和摇杆相对长度 $l_3 = 2.3280$，当曲柄在 $\varphi = \varphi_0 \sim (\varphi_0 + \pi/2)$ 区间内转动时，摇杆输出角与期望实现函数 $\psi = f(\varphi)$ 的平方偏差之和是 $f(\boldsymbol{X}^*) = 0.0120$，最优点位于约束边界 $g_2(\boldsymbol{X}) = 0$ 上。

9.2.2　实现连杆轨迹的优化设计

曲柄摇杆机构实现预定轨迹功能，即通过机构来引导连杆上的某一点，使得它运动时通过空间指定轨迹上的一系列点。

例 9-4　如图 9-7 所示的曲柄摇杆机构，当曲柄 AB 整周转动时，要求连杆 BC 上的 M 点实现给定的运动规律，其坐标值见表 9-1。机构的许用传动角 $[\delta] = 30°$。试确定该曲柄摇杆机构的运动学尺寸，使 M 点的实际运动轨迹与给定轨迹之间的偏差尽可能小。

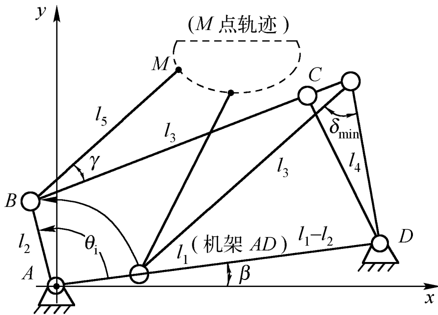


图 9-7　曲柄摇杆机构实现预定轨迹的运动几何关系

表 9-1　连杆 BC 上的 M 点实现给定的运动坐标值

离散点	1	2	3	4	5	6	7	8
S_{xi}	26	23	20	17	13	10	20	30
S_{yi}	16	17	17	16	15	11	6	12
$\Delta\theta_i$	0	22	44	66	88	129	221	314

1. 建立优化设计的数学模型

（1）确定设计变量　如图 9-7 所示，机构的机架 AD 与直角坐标系 XOY 的 X 轴夹角为

β，并取铰链 A 为坐标系原点；连杆 BC 与固定杆件 BM 的夹角为 γ；曲柄 AB 位置相对于机架 AD 的初始位置角为 θ_0。

根据机构的运动几何关系可知，当曲柄 AB 位置已知时，连杆 BC 上 M 点的坐标取决于各个构件的长度 l_1,l_2,l_3,l_4,l_5 和角度参数 β,γ,θ_0，因此设计变量为

$$\boldsymbol{X}=[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8]^{\mathrm{T}}=[l_1,l_2,l_3,l_4,l_5,\beta,\gamma,\theta_1]^{\mathrm{T}}$$

（2）建立目标函数　根据题意，曲柄 AB 整周转动时取 8 个离散点。目标函数按照使连杆 BC 上 M 点的实际轨迹与给定轨迹之间 8 个对应的坐标值误差均方根最小建立，它的表达式是

$$\min f(\boldsymbol{X})=\sqrt{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8}[(M_{xi}-S_{xi})^2+(M_{yi}-S_{yi})^2]} \tag{9-12}$$

式中，S_{xi}、S_{yi} 是连杆 BC 上 M 点第 i 个位置的给定坐标，见表 9-1，M_{xi}、M_{yi} 是连杆 BC 上 M 点第 i 个位置的实际坐标。根据图 9-7 所示的几何关系得到

$$\left.\begin{aligned}
&M_{xi}=l_2\cos\theta_i+l_5\cos\varphi_i=x_2\cos\theta_i+x_5\cos\varphi_i\\
&M_{yi}=l_2\sin\theta_i+l_5\sin\varphi_i=x_2\sin\theta_i+x_5\sin\varphi_i\\
&\theta_i=\theta_0+\Delta\theta_i=x_8+\Delta\theta_i\\
&\varphi_i=\gamma+\eta_i-(\varepsilon_i-\beta)=x_7+\eta_i-(\varepsilon_i-x_6)\\
&\varepsilon_i=\tan^{-1}\frac{l_2\sin(\theta_i-\beta)}{l_1-l_2\cos(\theta_i-\beta)}=\tan^{-1}\frac{x_2\sin(\theta_i-x_6)}{x_1-x_2\cos(\theta_i-x_6)}\\
&\eta_i=\cos^{-1}\frac{l_1^2+l_2^2+l_3^2-l_4^2-2l_1l_2\cos(\theta_i-\beta)}{2l_3[l_1^2+l_2^2-2l_1l_2\cos(\theta_i-\beta)]^{0.5}}=\cos^{-1}=\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2-2x_1x_2\cos(\theta_i-x_6)}{2x_3[x_1^2+x_2^2-2x_1x_2\cos(\theta_i-x_6)]^{0.5}}
\end{aligned}\right\} \tag{9-13}$$

（3）确定约束条件

① 根据曲柄摇杆机构的曲柄存在条件，可以建立 6 个性能约束条件

$$\left.\begin{aligned}
&l_2\leqslant l_i\quad(i=1,3,4) && g_{1,2,3}(\boldsymbol{X})=x_2-x_i\leqslant 0\quad(i=1,3,4)\\
&l_2+l_1\leqslant l_3+l_4 && g_4(\boldsymbol{X})=x_1+x_2-x_3-x_4\leqslant 0\\
&l_2+l_3\leqslant l_1+l_4 && g_5(\boldsymbol{X})=-x_1+x_2+x_3-x_4\leqslant 0\\
&l_2+l_4\leqslant l_1+l_3 && g_6(\boldsymbol{X})=-x_1+x_2-x_3+x_4\leqslant 0
\end{aligned}\right\}$$

② 根据机构的最小传动角条件，可以建立 1 个性能约束条件。曲柄在与机架共线的位置时，机构有最小传动角（图 9-5）。根据机构在该位置△$B''C''D$ 的余弦定理得到

$$\cos\delta_{\min}=\frac{l_3^2+l_4^2-(l_1-l_2)^2}{2l_3l_4}=\frac{x_3^2+x_4^2-(x_1-x_2)^2}{2x_3x_4}\leqslant\cos 30^\circ$$

经过整理，得到约束方程

$$g_7(\boldsymbol{X})=x_3^2+x_4^2-(x_1-x_2)^2-2x_3x_4\cos 30^\circ\leqslant 0$$

③ 根据设计变量的边界条件，得到 13 个边界约束条件

$$\left.\begin{array}{ll}
l_1 \leqslant 60 & g_8(\boldsymbol{X}) = x_1 - 60 \leqslant 0 \\
8 \leqslant l_2 \leqslant 30 & g_9(\boldsymbol{X}) = 8 - x_2 \leqslant 0 \text{ 和 } g_{10}(\boldsymbol{X}) = x_2 - 30 \leqslant 0 \\
l_3 \leqslant 60 & g_{11}(\boldsymbol{X}) = x_3 - 60 \leqslant 0 \\
l_4 \leqslant 40 & g_{12}(\boldsymbol{X}) = x_4 - 40 \leqslant 0 \\
10 \leqslant l_5 \leqslant 30 & g_{13}(\boldsymbol{X}) = 10 - x_5 \leqslant 0 \text{ 和 } g_{14}(\boldsymbol{X}) = x_5 - 30 \leqslant 0 \\
-20° \leqslant \beta \leqslant 30° & g_{15}(\boldsymbol{X}) = -x_6 - 20° \leqslant 0 \text{ 和 } g_{16}(\boldsymbol{X}) = x_6 - 30° \leqslant 0 \\
0° \leqslant \gamma \leqslant 15° & g_{17}(\boldsymbol{X}) = 0° - x_7 \leqslant 0 \text{ 和 } g_{18}(\boldsymbol{X}) = x_7 - 15° \leqslant 0 \\
0° \leqslant \theta_1 \leqslant 60° & g_{19}(\boldsymbol{X}) = 0° - x_8 \leqslant 0 \text{ 和 } g_{20}(\boldsymbol{X}) = x_8 - 60° \leqslant 0
\end{array}\right\}$$

2. M 文件和优化结果

对于该 8 维约束非线性优化问题，可采用 MATLAB 的非线性约束优化函数 fmincon 求解。编制关于优化设计数学模型的目标函数文件、约束函数文件和调用命令文件。

```
%曲柄摇杆机构实现连杆轨迹的优化设计
%(调用目标函数 lgjg_gjyh_mb 和非线性约束函数 lgjg_gjyh_ys)
%设计变量：x(1)-机架;x(2)-曲柄;x(3)-连杆;x(4)-摇杆;x(5)-连杆附杆;
%x(6)-机架倾斜角 beta;x(7)-连杆与附杆夹角 gamma;x(8)-曲柄初始角 theta0;
%设计变量初值
x0=[50;7;55;25;25;-12;15;50];
%设计变量边界
lb=[10;8;10;10;10;-20;5;5];
ub=[60;30;60;40;30;30;15;60];
%线性不等式约束(g(2)~g(20))中设计变量的系数矩阵 a 省略,定义为空矩阵"[]"
%线性不等式约束(g(2)~g(20)中的常数项列阵 b 省略,定义为空矩阵"[]"
%没有等式约束,参数 Aeq 和 beq 定义为空矩阵"[]"
%调用非线性优化函数
[xopt,fopt]=fmincon(@lgjg_gjyh_mb,x0,[],[],[],[],lb,ub,@lgjg_gjyh_ys);
disp'  ********   曲柄摇杆机构实现连杆轨迹的优化设计最优解   ********'
fprintf('         机架长度                d=%3.4f mm     \n',xopt(1))
fprintf('         曲柄长度                a=%3.4f mm \n',xopt(2))
fprintf('         连杆长度                b=%3.4f mm \n',xopt(3))
fprintf('         摇杆长度                c=%3.4f mm \n',xopt(4))
fprintf('         连杆附杆长度            h=%3.4f mm \n',xopt(5))
fprintf('         机架倾斜角           beta=%3.4f° \n',xopt(6))
fprintf('         连杆与附杆夹角      gamma=%3.4f° \n',xopt(7))
fprintf('         曲柄初始位置角     theta0=%3.4f° \n',xopt(8))
fprintf('         M 点轨迹坐标偏差       f*=%3.4f     \n',fopt)
hd=pi/180;
delta_n=acos((xopt(3)^2+xopt(4)^2-(xopt(1)-xopt(2))^2)/(2*xopt(3)*xopt(4)));
fprintf('机构最小传动角 delta_min=%3.4f° \n',delta_n/hd);
%调用多维约束优化函数(lgjg_gjyh_ys)计算最优点 x*的性能约束函数值
[g,ceq]=lgjg_gjyh_ys(xopt);
disp'          ========      最优点的约束函数值      ========'
fprintf('         最小传动角约束函数值      g1*=%3.4f \n',g(1))
fprintf('         曲柄长度<=机架长度        g2*=%3.4f \n',g(2))
```

```
fprintf('        曲柄长度<=连杆长度          g3*=%3.4f \n',g(3))
fprintf('        曲柄长度<=摇杆长度          g4*=%3.4f \n',g(4))
fprintf('        曲柄+机架<=摇杆+连杆        g5*=%3.4f \n',g(5))
fprintf('        曲柄+连杆<=摇杆+机架        g6*=%3.4f \n',g(6))
fprintf('        曲柄+摇杆<=连杆+机架        g7*=%3.4f \n',g(7))
fprintf('        机架长度<=60                g8*=%3.4f \n',g(8))
fprintf('        曲柄长度>=8                 g9*=%3.4f \n',g(9))
fprintf('        曲柄长度<=30               g10*=%3.4f \n',g(10))
fprintf('        连杆长度<=60               g11*=%3.4f \n',g(11))
fprintf('        摇杆长度<=40               g12*=%3.4f \n',g(12))
fprintf('        附杆长度>=10               g13*=%3.4f \n',g(13))
fprintf('        附杆长度<=30               g14*=%3.4f \n',g(14))
fprintf('        机架倾斜角>=-20°           g15*=%3.4f \n',g(15))
fprintf('        机架倾斜角<=30°            g16*=%3.4f \n',g(16))
fprintf('        连杆附杆夹角>=0°           g17*=%3.4f \n',g(17))
fprintf('        连杆附杆夹角<=15°          g18*=%3.4f \n',g(18))
fprintf('        曲柄初始角>=0°             g19*=%3.4f \n',g(19))
fprintf('        曲柄初始角<=15°            g20*=%3.4f \n',g(20))

%凑整解的计算
xz=[52,8,54,25,23,11.5,15,50];
fz=lgjg_gjyh_mb(xz);
gz=lgjg_gjyh_ys(xz);
delta_z=acos((xz(3)^2+xz(4)^2-(xz(1)-xz(2))^2)/(2*xz(3)*xz(4)));
disp'  ********    曲柄摇杆机构实现连杆轨迹的优化设计凑整解    ********'
fprintf('        M点轨迹坐标偏差              f*=%3.4f \n',fz)
fprintf('        机构最小传动角               delta_z=%3.4f° \n',delta_z/hd)
if gz<=0
    disp'            &&&&&&&&    凑整解在可行域内    &&&&&&&&'
else
    disp'            &&&&&&&&    凑整解在可行域外    &&&&&&&&'
end

%曲柄摇杆机构实现连杆轨迹的优化设计--目标函数文件---lgjg_gjyh_mb.m
function f=lgjg_gjyh_mb(x)
%曲柄输入角增量
Dtheta=[0,22,44,66,88,129,221,314];
%连杆上M点给定的坐标
Sx=[26,23,20,17,13,10,20,30];
Sy=[16,17,17,16,15,11,6,12];
%目标函数
hd=pi/180;
theta=x(8)+Dtheta;                              %曲柄输入角=初始角+角增量
epsilon=atan(x(2).*sin((theta-x(6))*hd)/(x(1)-x(2).*cos((theta-x(6))*hd)));
etaz=x(1)^2+x(2)^2+x(3)^2-x(4)^2-2*x(1)*x(2).*cos((theta-x(6))*hd);
etam=2*x(3)*sqrt(x(1)^2+x(2)^2-2*x(1)*x(2).*cos((theta-x(6))*hd));
```

```
eta = etaz. /etam;
phi = x(6) + x(7) + eta - epsilon;
Mx = x(2). * cos(theta * hd) + x(5). * cos(phi * hd);    % 连杆上 M 点实际 x 坐标
My = x(2). * sin(theta * hd) + x(5). * sin(phi * hd);    % 连杆上 M 点实际 y 坐标
f = sqrt(sum((Mx - Sx).^2 + (My - Sy).^2)/8);            % M 点坐标偏差均方根值

% 曲柄摇杆机构实现连杆轨迹的优化设计 -- 约束函数文件 --- lgjg_gjyh_ys.m
function [g,ceq] = lgjg_gjyh_ys(x)
% 机构最小传动角(40 度)约束
g(1) = x(3)^2 + x(4)^2 - (x(1) - x(2))^2 - 2 * x(3) * x(4) * cos(40 * pi/180);
% 曲柄存在条件约束
g(2) = -x(1) + x(2);                          % 曲柄长度 <= 机架长度
g(3) = -x(3) + x(2);                          % 曲柄长度 <= 连杆长度
g(4) = -x(4) + x(2);                          % 曲柄长度 <= 摇杆长度
g(5) = x(1) + x(2) - x(3) - x(4);             % 曲柄 + 机架 <= 摇杆 + 连杆
g(6) = -x(1) + x(2) + x(3) - x(4);            % 曲柄 + 连杆 <= 摇杆 + 机架
g(7) = -x(1) + x(2) - x(3) + x(4);            % 曲柄 + 摇杆 <= 连杆 + 机架
% 边界约束
g(8) = x(1) - 60;% 机架 <= 60
g(9) = 8 - x(2);g(10) = x(2) - 30;            % 8 <= 曲柄 <= 30
g(11) = x(3) - 60;                            % 连杆 <= 60
g(12) = x(4) - 40;                            % 摇杆 <= 40
g(13) = 10 - x(5);g(14) = x(5) - 30;          % 10 <= 连杆附杆 <= 30
g(15) = -x(6) - 20;g(16) = x(6) - 30;         % -20° <= 机架倾斜角 <= 30°
g(17) = -x(7);g(18) = x(7) - 15;              % 0° <= 连杆附杆夹角 <= 15°
g(19) = -x(8);g(20) = x(8) - 60;              % 0° <= 曲柄初始角 <= 60°
ceq = [];                                     % 没有非线性等式约束
```

计算结果：

```
********    曲柄摇杆机构实现连杆轨迹的优化设计最优解    ********
        机架长度                          d = 51.7446 mm
        曲柄长度                          a = 8.0000 mm
        连杆长度                          b = 53.6230 mm
        摇杆长度                          c = 25.4846 mm
        连杆附杆长度                      h = 22.6784 mm
        机架倾斜角                     beta = 11.4185°
        连杆与附杆夹角                gamma = 14.9999°
        曲柄初始位置角               theta0 = 50.0664°
        M 点轨迹坐标偏差                 f * = 1.9718
        机构最小传动角            delta_min = 53.8751°

    ========      最优点的约束函数值      ========
        最小传动角约束函数值          g1 * = -482.3881
        曲柄长度 <= 机架长度          g2 * = -43.7446
        曲柄长度 <= 连杆长度          g3 * = -45.6230
        曲柄长度 <= 摇杆长度          g4 * = -17.4846
```

```
曲柄+机架<=摇杆+连杆          g5*= -19.3631
曲柄+连杆<=摇杆+机架          g6*= -15.6062
曲柄+摇杆<=连杆+机架          g7*= -71.8830
机架长度<=60g                  8*= -8.2554
曲柄长度>=8                   g9*=0.0000
曲柄长度<=30                 g10*= -22.0000
连杆长度<=60                 g11*= -6.3770
摇杆长度<=40                 g12*= -14.5154
附杆长度>=10                 g13*= -12.6784
附杆长度<=30                 g14*= -7.3216
机架倾斜角>= -20°            g15*= -31.4185
机架倾斜角<=30°              g16*= -18.5815
连杆附杆夹角>=0°             g17*= -14.9999
连杆附杆夹角<=15°            g18*= -0.0001
曲柄初始角>=0°               g19*= -50.0664
曲柄初始角<=15°              g20*= -9.9336

********  曲柄摇杆机构实现连杆轨迹的优化设计凑整解  ********
      M点轨迹坐标偏差                f*=1.9989
      机构最小传动角                 delta_z=53.5270°
   &&&&&&&&   凑整解在可行域内   &&&&&&&&
```

因此经过迭代计算得到最优解后，再四舍五入为凑整解：

$$\text{连续最优解 } \boldsymbol{X}^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \\ x_4^* \\ x_5^* \\ x_6^* \\ x_7^* \\ x_8^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 51.7446 \\ 8.0000 \\ 53.6230 \\ 25.4846 \\ 22.6784 \\ 11.4185° \\ 14.9999° \\ 50.0664° \end{bmatrix} \qquad \text{凑整解 } \boldsymbol{X}^* = \begin{bmatrix} x_1^{*\prime} \\ x_2^{*\prime} \\ x_3^{*\prime} \\ x_4^{*\prime} \\ x_5^{*\prime} \\ x_6^{*\prime} \\ x_7^{*\prime} \\ x_8^{*\prime} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 52 \\ 8 \\ 54 \\ 25 \\ 23 \\ 11.5° \\ 15° \\ 50° \end{bmatrix}$$

目标函数值 $f(\boldsymbol{X}^*) = 1.9718$ $\qquad f(\boldsymbol{X}^{*\prime}) = 1.9989$

最小传动角 $\delta_{\min} = 53.8751°$ $\qquad \delta'_{\min} = 53.5270°$

经检验，最优点 $\boldsymbol{X}^*$ 位于边界约束 $g_9(\boldsymbol{X}^*) = 0$ 和 $g_{18}(\boldsymbol{X}^*) = 0$ 的交集上，凑整解在可行域内。

9.3 曲柄摇杆机构的运动分析

曲柄摇杆机构是平面连杆机构中最基本的由转动副组成的四杆机构，它可以用来实现转动和摆动之间运动形式的转换或传递动力。

对曲柄摇杆机构进行运动分析的意义是：在机构尺度参数已知的情况下，假定主动件

（曲柄）作匀速转动，撇开力的作用，仅从运动几何关系上分析从动件（摇杆）的位移、速度和加速度等运动参数变化情况。还可以根据机构闭环矢量方程计算从动件的位移误差。运动分析可以为研究机构的运动性能和动力性能提供必要的依据。

采用解析法进行机构运动分析时，一般先建立机构的闭环矢量方程（即角位移方程），然后将其分量形式对时间求一阶导数得到角速度方程，对时间求二阶导数得到角加速度方程。

9.3.1　机构运动分析的数学模型和求解方法

1. 建立机构的闭环矢量方程和角位移方程

如图 9-8 所示，机构的闭环矢量方程为

$$\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_4$$

只要满足几何装配条件，在机构运动的任何位置都能够满足该矢量方程。

如图 9-8 所示，角位移方程的分量形式是

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{r}_2\cos\theta_2+\boldsymbol{r}_3\cos\theta_3=\boldsymbol{r}_1\cos\theta_1+\boldsymbol{r}_4\cos\theta_4\\ \boldsymbol{r}_2\sin\theta_2+\boldsymbol{r}_3\sin\theta_3=\boldsymbol{r}_1\sin\theta_1+\boldsymbol{r}_4\sin\theta_4\end{aligned}\right\}\tag{9-14}$$

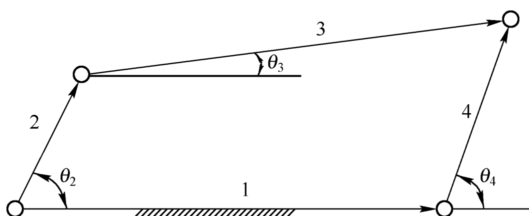


图 9-8　铰链四杆机构的运动角

2. 建立机构的角速度方程

将机构角位移方程的分量形式式（9-14）对时间求一阶导数，得到矩阵形式的角速度方程

$$\begin{bmatrix}-\boldsymbol{r}_3\sin\theta_3 & \boldsymbol{r}_4\sin\theta_4\\ \boldsymbol{r}_3\cos\theta_3 & -\boldsymbol{r}_4\cos\theta_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_3\\ \omega_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\omega_2\boldsymbol{r}_2\sin\theta_2\\ -\omega_2\boldsymbol{r}_2\cos\theta_2\end{bmatrix}\tag{9-15}$$

3. 建立机构的角加速度方程

将机构角位移方程的分量形式式（9-14）对时间求二阶导数，得到矩阵形式的角加速度方程

$$\begin{bmatrix}-\boldsymbol{r}_3\sin\theta_3 & \boldsymbol{r}_4\sin\theta_4\\ \boldsymbol{r}_3\cos\theta_3 & -\boldsymbol{r}_4\cos\theta_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_3\\ a_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_2\boldsymbol{r}_2\sin\theta_2+\omega_2^2\boldsymbol{r}_2\cos\theta_2+\omega_3^2\boldsymbol{r}_3\cos\theta_3-\omega_4^2\boldsymbol{r}_4\cos\theta_4\\ -a_2\boldsymbol{r}_2\cos\theta_2+\omega_2^2\boldsymbol{r}_2\sin\theta_2+\omega_3^2\boldsymbol{r}_3\sin\theta_3-\omega_4^2\boldsymbol{r}_4\sin\theta_4\end{bmatrix}\tag{9-16}$$

式（9-14）~式（9-16）中，$\boldsymbol{r}_i(i=1,2,3,4)$分别表示机架 1、曲柄 2、连杆 3 和摇杆 4 的长度；$\theta_i(i=1,2,3,4)$是各杆与 x 轴正向所夹的角度（rad）；$\omega_i=\dfrac{\mathrm{d}\theta_i}{\mathrm{d}t}$是各杆角速度（rad/s）；$a_i=\dfrac{\mathrm{d}\omega_i}{\mathrm{d}t}=\dfrac{d^2\theta_i}{\mathrm{d}t^2}$是各杆角加速度（rad/s^2）。

式（9-15）和式（9-16）是求解连杆3和摇杆4的角速度 ω_3、ω_4 与角加速度 a_3、a_4 的依据。

9.3.2 机构运动方程的求解方法

1）在计算运动参数时使用了正弦、余弦和复合函数求导的有关公式

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\sin\theta}{\mathrm{d}t}&=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\cos\theta=\omega\cos\theta\\ \frac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}t}&=-\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\sin\theta=-\omega\sin\theta\\ (uv)'&=vu'+uv'\end{aligned}\right\}\tag{9-17}$$

2）在角位移方程分量形式式（9-14）中，由于假定机架为参考系，矢量 $\boldsymbol{r}_1$ 与 x 轴重合，$\theta_1=0$，则有非线性超越方程组

$$\left.\begin{aligned}f_1(\theta_3,\theta_4)&=\boldsymbol{r}_2\cos\theta_2+\boldsymbol{r}_3\cos\theta_3-\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_4\cos\theta_4=0\\ f_2(\theta_3,\theta_4)&=\boldsymbol{r}_2\sin\theta_2+\boldsymbol{r}_3\sin\theta_3-\boldsymbol{r}_4\sin\theta_4=0\end{aligned}\right\}\tag{9-18}$$

可以借助牛顿-辛普森数值解法，求出连杆3角位移 θ_3 和摇杆4的角位移 θ_4。

3）求解具有 n 个未知量 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的线性方程组

$$\left.\begin{aligned}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n&=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n&=b_2\\ &\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n&=b_n\end{aligned}\right\}\tag{9-19}$$

式中，系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $n\times n$ 阶方阵，它的逆阵表示为 $\boldsymbol{A}^{-1}$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}$$

常数项 $\boldsymbol{b}$ 是一个 n 维矢量

$$\boldsymbol{b}=[b_1,b_2,\cdots,b_n]^{\mathrm{T}}$$

因此，线性方程组解的矢量为

$$\boldsymbol{X}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}\tag{9-20}$$

9.3.3 机构运动误差分析

1. 机构运动误差矢量方程及其求解

根据闭环矢量方程得到机构运动误差矢量 $\boldsymbol{e}$ 的分量形式

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{e}x&=\boldsymbol{r}_2\cos\theta_2+\boldsymbol{r}_3\cos\theta_3-\boldsymbol{r}_4\cos\theta_4-\boldsymbol{r}_1\\ \boldsymbol{e}y&=\boldsymbol{r}_2\sin\theta_2+\boldsymbol{r}_3\sin\theta_3-\boldsymbol{r}_4\sin\theta_4\end{aligned}\right\}\tag{9-21}$$

利用 MATLAB 的正态高斯分布函数 norm([ex ey])，计算误差矢量 $\boldsymbol{e}$ 的范数。

2. 机构运动参数和误差线图

运行 M 文件后输出如图 9-9 所示的机构运动参数和误差线图。

从铰链四杆机构的运动线图（图 9-9）可见，连杆 3 和摇杆 4 的角位移 θ_3、θ_4，角速度 ω_3、ω_4和角加速度 a_3、a_4，是随着曲柄转角（或时间）改变作周期性变化，因此在运动过程中会产生动载荷和惯性力。从动件的 X 向和 Y 向的运动误差，也是随着时间改变有规律地作相应的变化。

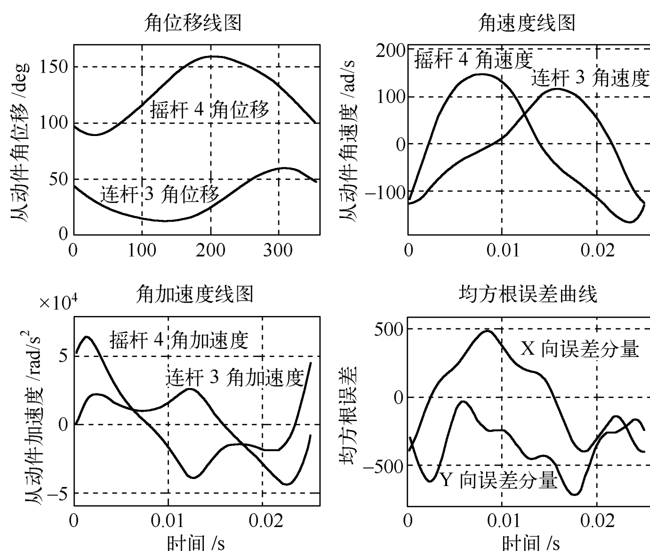


图 9-9　铰链四杆机构运动参数和误差线图

3. 计算实例的 M 文件和运算结果

例 9-5　已知曲柄摇杆机构的四杆长度为：$r_1=304.8$、$r_2=101.6$、$r_3=254.0$ 和 $r_4=177.8$，曲柄作匀速转动的角速度为 $\omega_1=250\ \mathrm{rad/s}$。试计算连杆 3 和摇杆 4 的角位移 θ_3、θ_4，角速度 ω_3、ω_4和角加速度 a_3、a_4，以及运动误差，并且绘制出运动线图。

```
% 曲柄摇杆机构运动分析
% (1)计算连杆的输出角 th3 和摇杆的输出角 th4
% 设定各杆的长度(单位:毫米)
rs(1) = 304.8;                    % 设定机架 1 长度
rs(2) = 101.6;                    % 设定曲柄 2 长度
rs(3) = 254.0;                    % 设定连杆 3 长度
rs(4) = 177.8;                    % 设定摇杆 4 长度
dr = pi/180.0;% 角度与弧度的转换系数
% 设定初始推测的输入
% 机构的初始位置
th(1) = 0.0;                      % 设定曲柄 2 初始位置角是 0°(与机架 1 共线)
th(2) = 45 * dr;                  % 连杆 3 的初始位置角是 45°
th(3) = 135 * dr;                 % 摇杆 4 的初始位置角是 135°
% 摇杆 4 的初始位置角可以用三角形的正弦定理确定
th(3) = pi - asin(sin(th(2)) * rs(3)/rs(4))
dth = 5 * dr;                     % 循环增量
% 曲柄输入角从 0°变化到 360°,步长为 5°,计算 th34
for i = 1:72
```

```
    [th3,th4] = ntrps(th,rs); % 调用牛顿－辛普森方程求解机构位置非线性方程函数文件
    % Store results in a matrix - th34,in degrees
    % 在矩阵 th34 中储存结果,以度为单位;(i,:)表示第 i 行所有列的元素;(:,i)表示第 i 列所有行的元素
    th34(i,:) = [th(1)/dr th3/dr th4/dr];% 矩阵[曲柄转角 连杆转角 摇杆转角]
    th(1) = th(1) + dth;              % 曲柄转角递增
    th(2) = th3;                      % 连杆转角中间计算值
    th(3) = th4;                      % 摇杆转角中间计算值
end
% 绘制输出角 th(2)与 th(3)—输入角 th(1)的关系曲线
subplot(2,2,1)                        % 选择第 1 个子窗口
plot(th34(:,1),th34(:,2),th34(:,1),th34(:,3))
axis([0 360 0 170])
grid                                  % 网格线
ylabel('从动件角位移/deg')
title('角位移线图')
text(110,110,'摇杆 4 角位移')
text(50,35,'连杆 3 角位移')
% (2)计算连杆的角速度 om3 和摇杆的角速度 om4
% Setting initial conditions
% 设置初始条件
om2 = 250;                            % 曲柄角速度(等速输入)
T = 2 * pi/om2;                       % 机构周期－曲柄旋转 1 周的时间(秒)
% 曲柄输入角从 0°变化到 360°,步长为 5°,计算 om34
for i = 1:72
    ct(2) = i * dth;
    A = [ - rs(3) * sin(th34(i,2) * dr)   rs(4) * sin(th34(i,3) * dr); rs(3) * cos(th34(i,2) * dr)  - rs(4) * cos(th34(i,3) * dr)];
    B = [om2 * rs(2) * sin(ct(2)); - om2 * rs(2) * cos(ct(2))];
    om = inv(A) * B;                  % 输出角速度矩阵
    om3 = om(1);
    om4 = om(2);
    om34(i,:) = [i om3 om4];          % 矩阵[序号 连杆角速度 摇杆角速度]
    t(i) = i * T/72;
end
% 绘制连杆的角速度 om3 和摇杆的角速度 om4—时间 Times 的关系曲线
subplot(2,2,2)                        % 选择第 2 个子窗口
plot(t,om34(:,2),t,om34(:,3))
axis([0 0.026  - 190 210])
grid                                  % 网格线
title('角速度线图')
ylabel('从动件角速度/rad/s')
text(0.001,170,'摇杆 4 角速度')
text(0.013,130,'连杆 3 角速度')
% (3)计算连杆的角加速度 a3 和摇杆的角加速度 a4
a2 = 0;             % 曲柄角速度是等速,角加速度 a2 = dom2/dt = 0
```

```
%曲柄输入角从 0°变化到 360°,步长为 5°,计算 a34
for i = 1:72
    c(2) = i * dth;
    C = [ -rs(3) * sin(th34(i,2) * dr) rs(4) * sin(th34(i,3) * dr); rs(3) * cos(th34(i,2) * dr)
-rs(4) * cos(th34(i,3) * dr)];
    D(1) = a2 * rs(2) * sin(c(2)) + om2^2 * rs(2) * cos(c(2)) + om34(i,2)^2 * rs(3) * cos(th34
(i,2) * dr) - om34(i,3)^2 * rs(4) * cos(th34(i,3) * dr);
D(2) = -a2 * rs(2) * cos(c(2)) + om2^2 * rs(2) * sin(c(2)) + om34(i,2)^2 * rs(3) * sin(th34
(i,2) * dr) - om34(i,3)^2 * rs(4) * sin(th34(i,3) * dr);
    a = inv(C) * D';                    %输出角加速度矩阵
    a3 = a(1);
    a4 = a(2);
    a34(i,:) = [i a3 a4];               %矩阵[序号 连杆角加速度 摇杆加角速度]
    t(i) = i * T/72;
end
%绘制连杆的角加速度 a3 和摇杆的角加速度 a4—时间 Times 的关系曲线
subplot(2,2,3)                          %选择第 3 个子窗口
plot(t,a34(:,2),t,a34(:,3))
axis([0 0.026 -6 * 1e4 8 * 1e4])
grid                                    %网格线
title('角加速度线图')
xlabel('时间/s')
ylabel('从动件加速度/rad/s^{2}')
text(0.003,6.2 * 1e4','摇杆 4 角加速度')
text(0.010,3.3 * 1e4','连杆 3 角加速度')

%求解曲柄摇杆机构中连杆的输出角 th(3)和摇杆的输出角 th(4)—函数文件
function [th3,th4] = ntrps(th,rs)
%使用基于牛顿-辛普森方程解答四杆机构位置的非线性问题
%变量设置
%th(1) = theta_2                        %输入变量
%th(2) = theta_3_bar(starting guess)    %输出变量
%th(3) = theta_4_bar(starting guess)    %输出变量
%rs(1) = r_1,机架长度;rs(2) = r_2,曲柄长度;rs(3) = r_3,rs(4) = r_4,摇杆长度
th2 = th(1);
th3bar = th(2);
th4bar = th(3);
%设定收敛条件
epsilon = 1.0E-6;
%计算二维矢量的函数
%四杆机构闭环矢量方程的矩阵形式
f = [rs(3) * cos(th3bar) - rs(4) * cos(th4bar) + rs(2) * cos(th2) - rs(1); rs(3) * sin(th3bar) - rs
(4) * sin(th4bar) + rs(2) * sin(th2)];
%重复计算每个方程式的修正量因子
while norm(f) > epsilon
    J = [ -rs(3) * sin(th3bar) rs(4) * sin(th4bar);rs(3) * cos(th3bar) rs(4) * cos(th4bar)];
```

```
dth = inv(J) * ( -1.0 * f);
    th3bar = th3bar + dth(1);
    th4bar = th4bar + dth(2);
    % 四杆机构闭环矢量方程的矩阵形式
    f = [rs(3) * cos(th3bar) - rs(4) * cos(th4bar) + rs(2) * cos(th2) - rs(1); rs(3) * sin
(th3bar) - rs(4) * sin(th4bar) + rs(2) * sin(th2)];
    norm(f);                          % 计算矩阵或向量的范数(模)
end;
th3 = th3bar;                         % 弧度值
th4 = th4bar;                         % 弧度值

% 输出 1:四杆机构运动周期(0:5:360),时间,角位移,角速度,角加速度数据
disp('  曲柄转角  连杆转角 - 摇杆转角 - 连杆角速度 - 摇杆角速度 - 连杆加速度 - 摇杆加速度')
ydcs = [th34(:,1),th34(:,2),th34(:,3),om34(:,2),om34(:,3),a34(:,2),a34(:,3)];
disp (ydcs)
% 输出参数的数量级必须一致
%
% (4)运动误差分析
% 闭环矢量方程:r2 + r3 - r4 - r1 = 0
% 误差矢量 E = r2 + r3 - r4 - r1 的模是表示仿真有效程度的标量(ex 和 ey 是误差分量)
ex = rs(2) * cos(th34(:,1) * dth) + rs(3) * cos(th34(:,2) * dth) - rs(4) * cos(th34(:,3) * dth)
- rs(1);
ey = rs(2) * sin(th34(:,2) * dth) + rs(3) * sin(th34(:,2) * dth) - rs(4) * sin(th34(:,3) * dth);
ee = norm([ex ey]);                   % 计算误差矢量矩阵的范数(模)
%
% 输出 2:四杆机构运动周期(0:5:360),时间,X 向误差分量,Y 向误差分量
disp('  曲柄转角  时间(秒)  X 向误差  Y 向误差')
wc = [th34(:,1),t(:),ex(:,1),ey(:,1)];
disp (wc)
fprintf (1',  误差矢量矩阵的模  ee = %3.4f \n' ,ee)
%
% 绘制均方根相容性误差曲线
subplot(2,2,4)                        % 选择第 4 个子窗口
plot(t,ex(:,1),t,ey(:,1))
axis([0 0.026 -800 600])
grid                                  % 网格线
title('均方根误差曲线')
xlabel('时间/s')
ylabel('均方根误差')
text(0.012,350','X 向误差分量')
text(0.003,-600','Y 向误差分量')
```

运算结果：

```
曲柄转角  连杆转角 - 摇杆转角 - 连杆角速度 - 摇杆角速度 - 连杆加速度 - 摇杆加速度
  1.0e+004 *
```

0	0.0044	0.0097	-0.0126	-0.0113	-0.0124	5.3555
0.0005	0.0042	0.0094	-0.0125	-0.0094	0.7204	5.9522
0.0010	0.0039	0.0092	-0.0122	-0.0073	1.3202	6.3066
…						
0.0355	0.0047	0.0099	-0.0124	-0.0130	-0.8320	4.5520

曲柄转角	时间(秒)	X向误差	Y向误差
0	0.0003	-299.3941	-378.2894
5.0000	0.0007	-371.8295	-330.4447
10.0000	0.0010	-447.4833	-267.2525
…			
355.0000	0.0251	-237.7617	-404.6036

误差矢量矩阵的模　　ee = 3454.3057

9.4　导杆机构的运动分析

在导杆机构中，如果导杆能作整周转动，则称为转动导杆机构；如果导杆仅能在某一角度范围内往复摆动，则称为摆动导杆机构。

9.4.1　转动导杆机构的运动分析

如图9-10所示的转动导杆机构中，长度可以测量的构件是曲柄3和机架4，组成移动副的构件1和2的长度是不定的。由于构件长度 $l_4 < l_3$，则最短杆4上有两个周转副 A 与 B。选取最短杆4作为机架，则周转副 A 与 B 都是固定铰链，连架杆1（转动导杆）和3（曲柄）都可以分别绕固定铰链 B 和 A 作整周转动，它们都可以分别作为机构的主动件。

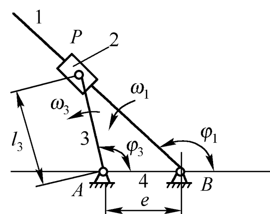


图9-10　转动导杆机构简图

转动导杆机构实现变速功能的机构是指主动件作匀速转动，从动件作变速运动，平均传动比为1，从而满足特定的工艺动作要求。如图9-11所示的插床插刀机构，主动件曲柄3绕轴 A 的整周匀速转动，通过转动导杆1和连杆5，驱动切削头6上固定的插刀，完成往复切削运动（切削行程较慢，回程较快）。如图9-12所示的轴心线不重合的联轴器机构，当带有导槽的盘1绕轴 A 转动时，通过圆盘3上的圆销带动圆盘3绕轴 B 转动，同时圆盘3上的圆销在盘1的导槽中滑动，从而带动导槽的盘1匀速转动，可以实现从动盘3的变速转动。当轴 A 和 B 的偏距 e 很小时，从动盘3的速度变化平缓。转动导杆机构在高速单张纸印刷机的输纸系统、回转柱塞泵、叶片泵和旋转式发动机等机器上也有应用。

1. 机构从动件的角位移和角速度

（1）机构从动件的运动几何方程　如图9-10所示，取转动导杆机构的导杆1作为主动件，则 φ_1 是输入角；曲柄3是从动件，则 φ_3 是输出角。在机构△APB 中，$\angle APB = \varphi_1 - \varphi_3$，应用三角形的正弦定理得到机构从动件的运动几何方程

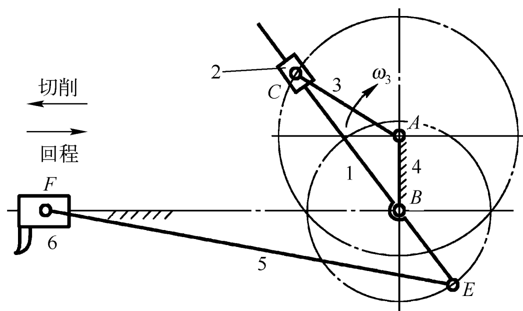


图 9-11　插床插刀机构

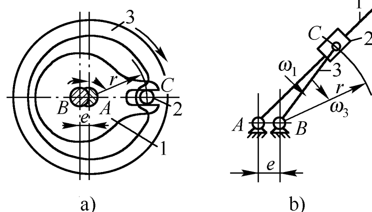


图 9-12　轴心线不重合的联轴器机构

$$\frac{e}{\sin(\varphi_1-\varphi_3)}=\frac{l_3}{\sin(180°-\varphi_1)}$$

即

$$\sin(\varphi_1-\varphi_3)=\frac{e\sin\varphi_1}{l_3} \tag{9-22}$$

其中，e 是固定铰链 A 和 B 的偏距，l_3是曲柄长度。

（2）机构从动件的角位移和角速度方程　令机构尺度系数 $\lambda=\dfrac{e}{l_3}$，将机构尺度系数 λ 代入式（9-22），整理得到从动件曲柄 3 的角位移

$$\varphi_3=\varphi_1-\text{asin}(\lambda\sin\varphi_1) \tag{9-23}$$

再对式（9-22）求导，得到从动件曲柄 3 的角速度

$$\omega_3=\omega_1\left(1-\frac{\lambda\cos\varphi_1}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi_1}}\right) \tag{9-24}$$

从动件角位移和角速度线图如图 9-13 所示。

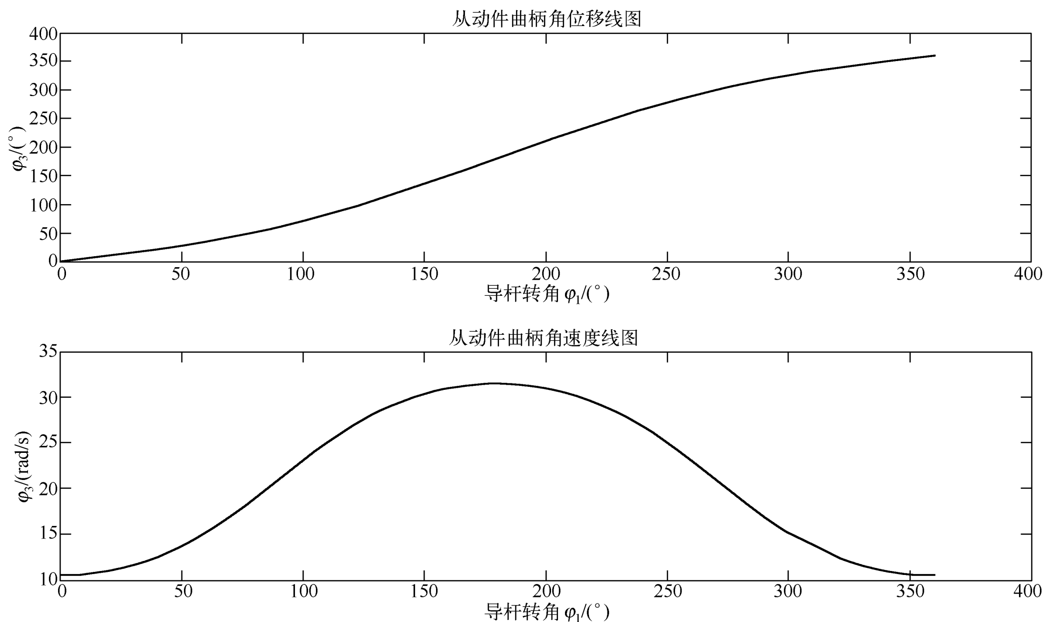


图 9-13　从动件角位移和角速度线图

2. 机构的压力角和传动比

（1）机构的压力角　在机构运动的任一瞬间，从动件曲柄 3 受到主动件导杆 1 通过滑块 2 施加作用力方向与导杆 P 点垂直，而从动件曲柄 3 的速度方向应该与它的转动半径 PA 垂直，它们两者之间所夹的锐角，就是机构等压力角。因而 $\alpha=\angle APB=\varphi_1-\varphi_3$，根据 $\sin(\varphi_1-\varphi_3)=\sin\alpha=\frac{e\sin\varphi_1}{l_3}$，得到机构压力角公式

$$\alpha=\operatorname{asin}\frac{e}{l_3}\sin\varphi_1=\operatorname{asin}(\lambda\sin\varphi_1) \tag{9-25}$$

机构压力角线图如图 9-14 所示。机构压力角 α 随着主动件导杆 1 的角位移 φ_1 的变动，按照正弦规律变化。

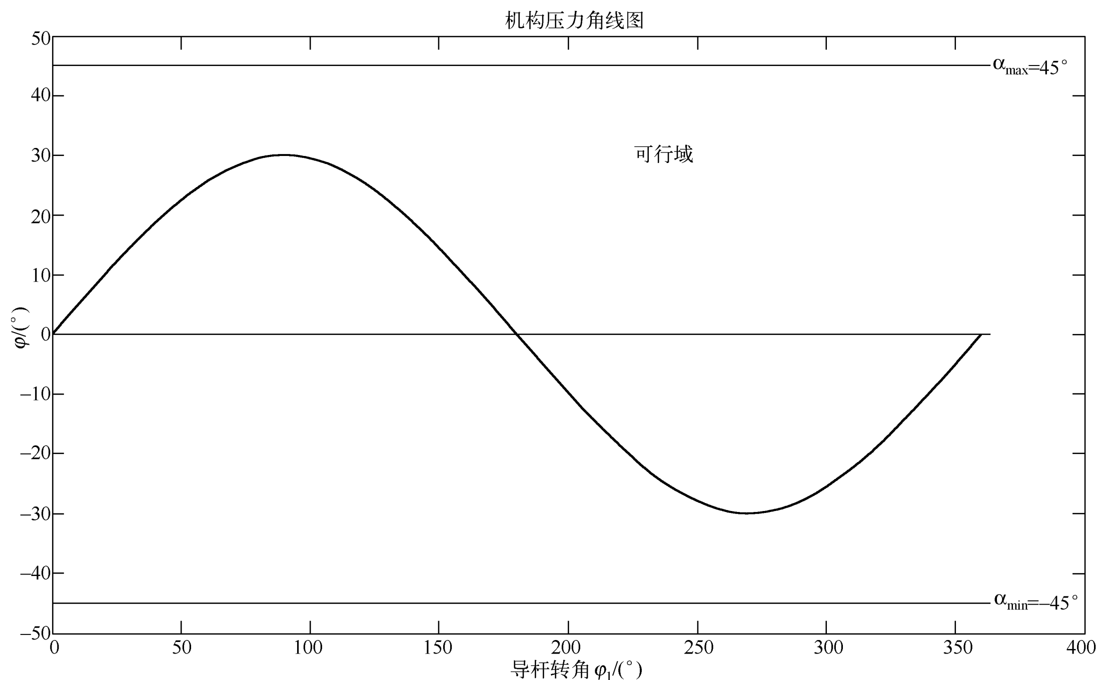


图 9-14　转动导杆机构的压力角线图

为使机构具有良好的传力性能，应该使 $\alpha_{max}\leqslant45°$。由于固定铰链 B 是周转副，即 $\varphi_1\in[0,360°]$，就要求 $\alpha_{max}\leqslant\operatorname{asin}\lambda$，即机构的尺度系数 $\lambda\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$。

（2）机构的传动比　从动件曲柄 3 与主动件导杆 1 的传动比

$$i_{31}=\frac{\omega_3}{\omega_1}=1-\frac{\lambda\cos\varphi_1}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi_1}} \tag{9-26}$$

当 $\varphi_1=180°$（主动件导杆 1 与机架 BA 反向共线）时，传动比 $i_{31max}=1+\lambda$，曲柄输出角速度 ω_3 为最大；当 $\varphi_1=0°$（主动件导杆 1 与机架 AB 正向共线）时，传动比 $i_{31min}=1-\lambda$，曲柄输出角速度 ω_3 为最小。

机构传动比是关于主动件导杆 1 的输入角 φ_1 和机构尺度系数 λ 的函数，即 $i_{31}=f(\varphi_1,\lambda)$。当取尺度系数 λ 为定值时，传动比 i_{31} 与主动件导杆 1 的输入角 φ_1 的关系线图 $i_{31}=$

$f(\varphi_1)$，如图 9-15a 所示。传动比 $i_{31\max}=1+\lambda$ 和 $i_{31\min}=1-\lambda$ 时，传动比 i_{31} 与尺度系数 λ 的关系线图 $i_{31}=f(\lambda)$，如图 9-15b 所示。

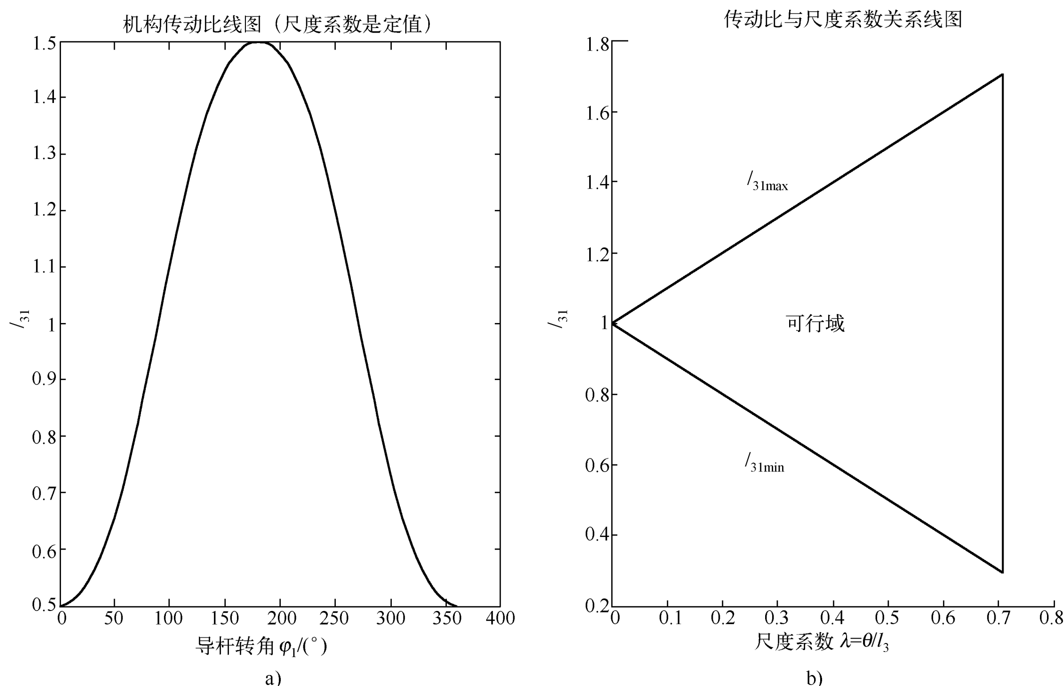


图 9-15　机构传动比与导杆转角和尺度系数关系线图

9.4.2　摆动导杆机构设计

图 9-16a 所示为摆动导杆机构，构件长度 $l_2<l_1$，则最短杆 2 上有两个周转副 B 与 C。如果选取构件 1 作为机架，则周转副 B 是固定铰链，得到摆动导杆机构。连架杆 2 是曲柄，它绕固定铰链 B 作整周转动，通过滑块 3 带动导杆 4 绕固定铰链 A 作往复摆动。如图 9-16b 所示的刨床刨刀切削机构，就是摆动导杆机构的应用实例。它将曲柄 2 的整周连续转动，通过摆动导杆 4 和构件 5，驱动滑枕 6 上固定的刨刀，完成往复切削运动。

这种机构具有急回特性，其行程速度变化系数 k 可以根据下式确定

$$k=\frac{180^\circ+\theta}{180^\circ-\theta} \tag{9-27}$$

当已知机构的行程速度变化系数 k 时，由式（9-27）变换后得到机构的极位夹角

$$\theta=180^\circ\frac{k-1}{k+1} \tag{9-28}$$

θ 与导杆 4 的摆角相等。

如图 9-16a 所示的摆动导杆机构的 $\triangle ABC_1$ 中，有

$$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{l_2}{l_1}=\tau \tag{9-29}$$

τ 是与机构运动特性有关的结构参数，l_1 是机架长度，l_2 是曲柄长度。

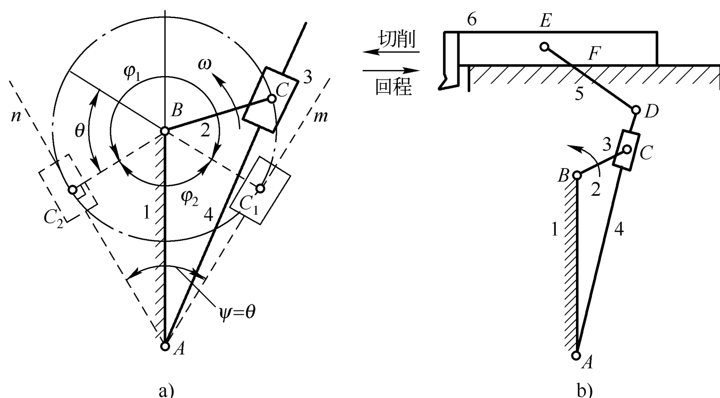


图 9-16　摆动导杆机构

机构在整周运动中，当导杆 4 与曲柄 2 和机架 1 呈共线状态时，为保证此时滑块 3 不会从导杆 4 上滑脱，导杆 4 长度必须满足

$$l_4 \geqslant l_1 + l_2 + \frac{b}{2} \tag{9-30}$$

b 是滑块 3 的长度。

对于摆动导杆机构，有关参数的推荐用值是：$\tau \leqslant 0.5$，$\theta \leqslant 60°$，$k \leqslant 2$。

9.4.3　计算实例的 M 文件和运算结果

例 9-6　已知转动导杆机构（见图 9-12b）中主动件导杆转速 $n_1 = 200\ \mathrm{r/min}$，机构尺度系数 $\lambda = \frac{e}{l_3} = 0.5$，机构许用压力角 $[\alpha] = 45°$。试分析从动件曲柄的角速度和角加速度，以及机构的压力角和传动比变化规律，并且绘制机构的分析线图。

编制转动导杆机构运动分析的 M 文件如下：

```
%转动导杆机构运动分析
%已知条件
n=200;omega_1=pi*n/30;%主动件导杆转速和角速度(rad/s)
lambda=0.5;              %机构尺度系数
alpha_p=45;              %机构许用压力角
du=180/pi;hd=pi/180;     %角度与弧度转换系数
disp('        ********  已知条件   ********')
fprintf('       导杆转速          n=%3.4f r/min \n',n)
fprintf('       导杆角速度        omega_1=%3.4f rad/s \n',omega_1)
fprintf('       机构尺度系数      lambda=%3.4f \n',lambda)
fprintf('       机构许用压力角    alpha_p=%3.4f°\n',alpha_p)
%1-计算机构运动参数
for phi_1=1:360
    phi_3(phi_1)=phi_1-asin(lambda*sin(phi_1*hd))*du;   %从动件曲柄角位移
    omega_3_z=lambda*cos(phi_1*hd);
    omega_3_m=sqrt(1-lambda^2*sin(phi_1*hd)^2);
    omega_3(phi_1)=omega_1*(1-omega_3_z/omega_3_m);     %从动件曲柄角速度
```

```
        i_31(phi_1) = omega_3(phi_1)/omega_1;                    % 机构传动比
        alpha(phi_1) = asin(lambda * sin(phi_1 * hd)) * du;      % 机构压力角
end
disp''
disp'    *** 变速导杆机构的运动参数 ***'
disp'    导杆转角    曲柄角位移    曲柄角速度'
disp'       (°)          (°)          (rad/s)'
for phi_1 = 10:10:360
        ydcs = [phi_1 phi_3(phi_1) omega_3(phi_1)];
        disp(ydcs)
end
%2 - 绘制机构的运动线图
figure(1);
subplot(2,1,1)                              % 曲柄角位移线图
phi_1 = 1:360;plot(phi_1,phi_3);
xlabel('导杆转角 \it \phi_1 / \rm(°)')
ylabel('\it \phi_3 / \rm(°)')
title('从动件曲柄角位移线图');
subplot(2,1,2)                              % 曲柄角速度线图
phi_1 = 1:360;plot(phi_1,omega_3);
xlabel('导杆转角 \it \phi_1 / \rm(°)')
ylabel('\it \omega_3 / \rm(rad/s)')
title('从动件曲柄角速度线图');
%3 - 绘制机构的压力角线图
figure(2);
phi_1 = 1:360;plot(phi_1,alpha);
xlabel('导杆转角 \it \phi_1 / \rm(°)');
ylabel('\it \alpha / \rm(°)');
line([0,360],[alpha_p,alpha_p]);
text(365,45,'\alpha_{max} =45°');
line([0,360],[0,0]);                        % 横坐标
line([0,360],[-alpha_p,-alpha_p]);
text(365,-45,'\alpha_{min} = -45°');
title('机构压力角线图');
text(230,30,'可行域');
%4 - 绘制机构的传动比线图和传动比与尺度系数关系线图
figure(3);
subplot(1,2,1)                              % 机构传动比线图
phi_1 = 1:360;plot(phi_1,i_31);
xlabel('导杆转角 \it \phi_1 / \rm(°)')
ylabel('\it i_{31}')
title('机构传动比线图(尺度系数是定值)');
subplot(1,2,2)                              % 机构传动比与尺度系数关系线图
line([0,sin(alpha_p * hd)],[1,1 + sin(alpha_p * hd)]);
line([0,sin(alpha_p * hd)],[1,1 - sin(alpha_p * hd)]);
line([sin(alpha_p * hd),sin(alpha_p * hd)],[1 + sin(alpha_p * hd),1 - sin(alpha_p * hd)]);
```

```
xlabel('尺度系数 \it \lambda = e / l_3')
ylabel('\it i_{31}')
title('传动比与尺度系数关系线图');
text(0.25,1.4,'\it i_{31max}')
text(0.32,1.0,'可行域')
text(0.25,0.6,'\it i_{31min}')
```

运算结果：

```
      ********    已知条件    ********
      导杆转速                 n = 200.0000 r/min
      导杆角速度          omega_1 = 20.9440 rad/s
      机构尺度系数         lambda = 0.5000
      机构许用压力角      alpha_p = 45.0000°

   ***  变速导杆机构的运动参数  ***
导杆转角     曲柄角位移    曲柄角速度
  (°)          (°)         (rad/s)
 10.0000      5.0191       10.5920
 20.0000     10.1534       10.9564
 30.0000     15.5225       11.5775
   …
340.0000    349.8466       10.9564
350.0000    354.9809       10.5920
360.0000    360.0000       10.4720
```

机构的运动线图如图 9-13 所示，压力角线如图 9-14 所示，传动比线图如图 9-15 所示。

例 9-7　已知摆动导杆机构中机架 1 长度 $l_1 = 100$ mm，行程速度变化系数 $k = 1.4$，滑块 3 的长度 $b = 6$ mm，试确定曲柄长度 l_2 和导杆的最小长度 $l_{4\min}$。

求解步骤：先按照式（9-28）计算机构的极位夹角 θ，再按照式（9-29）计算机构的结构参数 τ，从而按照式（9-29）和式（9-30）分别计算机构的曲柄长度 l_2 和导杆的最小长度 $l_{4\min}$。

编制摆动导杆机构设计的 M 文件如下：

```
%摆动导杆机构设计
k = 1.40;                            %行程速比系数
L1 = 100;                            %摇杆长度
b = 6;                               %滑块长度
theta = pi * (k - 1)/(k + 1);        %极位夹角
tau = sin(theta/2);                  %结构参数
L2 = tau * L1;                       %曲柄长度
L4min = L1 + L2 + b/2;               %摆杆最小长度
psi = theta;                         %摇杆摆角
disp('            ********    已知条件    ********')
fprintf('           行程速比系数          k = %3.4f   \n',k)
fprintf('           机架长度             L1 = %3.4f mm \n',L1)
```

```
fprintf ('        滑块长度          b = %3.4f mm \n',b)
disp('  ********   计算结果   ********')
fprintf ('        极位夹角       theta = %3.4f° \n',theta * 180/pi)
fprintf ('        结构参数         tau = %3.4f \n',tau)
fprintf ('        曲柄长度          L2 = %3.4f mm \n',L2)
fprintf ('        摆杆最小长度   L4min = %3.4f mm \n',L4min)
fprintf ('        摇杆摆角         psi = %3.4f°  \n',psi * 180/pi)
```

运算结果：

```
  ********   已知条件   ********
行程速比系数          k = 1.4000
机架长度             L1 = 100.0000 mm
滑块长度              b = 6.0000 mm
  ********   计算结果   ********
极位夹角          theta = 30.0000°
结构参数            tau = 0.2588
曲柄长度             L2 = 25.8819 mm
摆杆最小长度      L4min = 128.8819 mm
摇杆摆角            psi = 30.0000°
```

9.5 曲柄滑块机构的运动精度综合

曲柄滑块机构是一种单移动副的四杆机构，如图 9-17 所示，它可以用来实现转动和移动之间运动形式的转换或传递动力。曲柄滑块机构可测量长度的构件是曲柄和连杆，组成移动副的滑块和导路两个构件的长度是不可测量的。

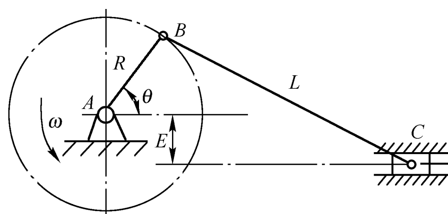


图 9-17　偏置曲柄滑块机构

由于构件制造误差和运动副配合的间隙等因素，会使机构装配后产生输出误差，甚至可能超过机构设计时允许的误差。对曲柄滑块机构进行运动分析和精度综合的意义是：通过概率计算，既是考虑构件制造尺度的随机变化，保证机构的运动精度在允许的范围之内，也可以根据允许的误差，配备构件的公差。

9.5.1 机构的尺度参数和运动参数分析

1. 构件尺度参数的标准离差

根据大批量构件制造统计数据，其线性尺寸的变化服从正态分布，在区间$(-3\sigma, 3\sigma)$中的概率为 99.73%，因此可以取构件线性尺寸偏差的三分之一作为它的标准离差

$$\left.\begin{aligned} \sigma_R &= \Delta R/3 \\ \sigma_L &= \Delta L/3 \\ \sigma_E &= \Delta E/3 \end{aligned}\right\} \tag{9-31}$$

式中，ΔR、ΔL、ΔE 分别是曲柄、连杆和偏距的尺寸偏差。

令尺度系数 $\lambda = \dfrac{R}{L}$ 和 $\varepsilon = \dfrac{E}{L}$，根据正态分布二元随机变量的综合方法，得到尺度系数标准离差

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\lambda &= \frac{\sqrt{(\mu_R\sigma_L)^2 + (\sigma_R\mu_L)^2}}{u_L^2}\\ \sigma_\varepsilon &= \frac{\sqrt{(\mu_E\sigma_L)^2 + (\sigma_E\mu_L)^2}}{\mu_L^2}\end{aligned}\right\} \tag{9-32}$$

式中，μ_R、μ_L、μ_E分别是曲柄、连杆和偏距的尺寸均值。

2. 滑块的运动参数及其均值

如图 9-17 所示偏置曲柄滑块机构，曲柄是主动件，设 R 是曲柄长度，L 是连杆长度，E 是偏距，θ 和 ω 是曲柄的转角和角速度，则有

滑块位移及其均值

$$\left.\begin{aligned}s &= R(1-\cos\theta-\varepsilon\sin\theta+0.5\lambda\sin^2\theta)\\ \mu_s &= \mu_R(1-\cos\theta-\mu_\varepsilon\sin\theta+0.5\mu_\lambda\sin^2\theta)\end{aligned}\right\} \tag{9-33}$$

滑块速度及其均值

$$\left.\begin{aligned}v &= R\omega(\sin\theta-\varepsilon\cos\theta+0.5\lambda\sin2\theta)\\ \mu_v &= \mu_R\omega(\sin\theta-\mu_\varepsilon\cos\theta+0.5\mu_\lambda\sin2\theta)\end{aligned}\right\} \tag{9-34}$$

滑块加速度及其均值

$$\left.\begin{aligned}a &= R\omega^2(\cos\theta+\varepsilon\sin\theta+\lambda\cos2\theta)\\ \mu_a &= \mu_R\omega^2(\cos\theta+\mu_\varepsilon\sin\theta+\mu_\lambda\cos2\theta)\end{aligned}\right\} \tag{9-35}$$

式中，$\mu_{R'}$，$\mu_{L'}$、μ_E分别是曲柄、连杆和偏距尺寸的均值。

3. 滑块运动学参数的标准离差

$$\left.\begin{aligned}\sigma_s &= \sqrt{[1-\cos\theta+(0.5\mu_\lambda\sin\theta-\mu_\varepsilon)\sin\theta]^2\sigma_R^2+(0.5\sigma_\lambda^2\sin^2\theta-\sigma_\varepsilon^2)\mu_R^2\sin^2\theta}\\ \sigma_v &= \omega\sqrt{(\sin\theta-\mu_\varepsilon\cos\theta+0.5\mu_\lambda\sin2\theta)^2\sigma_R^2+(0.5\sigma_\lambda^2\sin^2\theta-\sigma_\varepsilon^2\cos^2\theta)^2\mu_R^2}\\ \sigma_a &= \omega^2\sqrt{(\cos\theta-\mu_\varepsilon\sin\theta+\mu_\lambda\cos2\theta)^2\sigma_R^2+(\sigma_\varepsilon\mu_R\sin\theta)^2+(\mu_\lambda\sigma_\lambda\cos2\theta)^2}\end{aligned}\right\} \tag{9-36}$$

4. 滑块运动参数的偏差及其最大值和最小值

根据正态分布随机变量的 3σ 原则，得到滑块运动参数的偏差为

$$\left.\begin{aligned}\Delta s &= 3\sigma_s\\ \Delta v &= 3\sigma_v\\ \Delta a &= 3\sigma_a\end{aligned}\right\} \tag{9-37}$$

因此，滑块运动参数的最大值和最小值为

$$\left.\begin{aligned}s &= \mu_s \pm \Delta s\\ v &= \mu_v \pm \Delta v\\ a &= \mu_a \pm \Delta a\end{aligned}\right\} \tag{9-38}$$

9.5.2　曲柄滑块机构等影响法精度综合

机构的等影响法精度综合的目的是根据允许的输出偏差，确定各构件的尺寸公差和铰链

间隙。

1. 机构输出函数及其标准偏差

若机构中 n 个构件的尺寸参数 $L_i(i=1,\cdots,n)$ 和输入参数 θ 是随机变量，则机构的输出函数 ψ 也是随机变量的函数

$$\psi=f(\theta,L_1,L_2,\cdots,L_n) \tag{9-39}$$

将式（9-39）在 $\mu_x=(\mu_{L1},\mu_{L2},\cdots,\mu_{Ln})$ 展开成泰勒级数，则输出参数的标准偏差为

$$\sigma_\psi=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial L_i}\bigg|_{\mu_x}\Delta L_i\right)^2} \tag{9-40}$$

式中，ΔL_i 是机构第 i 个参数的偏差，它反映了公差和间隙的联合影响；$\frac{\partial f}{\partial L_i}\Big|_{\mu_x}$ 是输出参数对机构尺度在点 μ_x 处的偏导数，它反映了输出参数变化时，机构各参数的相对重要性和重要性程度，可视为机构尺度参数影响系数。

2. 机构输出函数偏差的等影响分配及其允许的最大偏差

机构每一个参数所允许的输出偏差，按等影响法可根据允许程度满足以下分配形式

$$\left(\frac{\partial F}{\partial L_1}\right)\Delta L_1=\left(\frac{\partial f}{\partial L_2}\right)\Delta L_2=\cdots=\left(\frac{\partial f}{\partial L_n}\right)\Delta L_n \tag{9-41}$$

即各构件的尺寸公差和铰链间隙对输出偏差具有相同的影响。

当某机构尺度 $\frac{\partial f}{\partial L_i}$ 的影响较大时，相应允许的偏差值 ΔL_i 就较小，使它们的乘积对输出偏差的影响与其他的保持一致。因此有输出参数的标准偏差

$$\sigma_\psi=\sqrt{n\left(\frac{\partial f}{\partial L_i}\bigg|_j\Delta L_i\right)^2} \tag{9-42}$$

式中，下标 j 是输入位置。

在满足精度的条件下，使各参数允许的偏差最大，即

$$\Delta L_i\Big|_{\max}=\frac{\sigma_\psi}{\sqrt{n}\,(\partial f/\partial L_i)_{\max}} \tag{9-43}$$

机构在不同的位置有不同的精度要求，但是对第 i 个尺度参数的允许偏差是唯一的，因此上式中的 σ_ψ 可以视为协调各位置运动偏差的综合允许偏差。

对于复杂机构或隐函数，偏导数 $\frac{\partial f}{\partial L_i}\Big|_j$ 可以通过数值计算方法求得。

9.5.3 计算实例和 M 文件

例 9-8 已知偏置曲柄滑块机构的有关参数：滑块行程 $S_C=800\,\text{mm}$，曲柄轴心到滑块销心最远的水平距离 $P=1200\,\text{mm}$，偏心距 $E=30\,\text{mm}$，长度比 $\lambda=\frac{R}{L}=0.20$，曲柄长度 R、连杆长度 L 和偏心距 E 的偏差 $\Delta R=0.06$、$\Delta L=0.12$ 和 $\Delta E=0.01$，曲柄转速 $n=60\,\text{r/min}$。试确定曲柄长度 R、连杆长度 L 和偏心距尺度系数 $\varepsilon=\frac{E}{L}$，并且绘制计算在曲柄一个运动周期（转角 $\theta=0°\sim360°$）时滑块的位移 s、速度 v 和加速度 a 的均值及其偏差的线图。

1）计算连杆长度和曲柄长度

$$L=\frac{\sqrt{(P-S_C)^2+E^2}}{1-\lambda}=\frac{\sqrt{(1200-800)^2+30^2}}{1-0.2}=501.404278\ \text{mm}$$

$$R=\lambda L=0.2\times 501.404278=100.280856\ \text{mm}$$

2）按照式（9-32），计算机构尺度参数影响系数的标准离差

$$\sigma_\lambda=\frac{\sqrt{(\mu_R\sigma_L)^2+(\sigma_R\mu_L)^2}}{\mu_L^2}=\frac{\sqrt{(100.280856\times 0.04)^2+(0.02\times 501.404278)^2}}{501.404278^2}=0.000043$$

$$\sigma_\varepsilon=\frac{\sqrt{(\mu_E\sigma_L)^2+(\sigma_E\mu_L)^2}}{\mu_L^2}=\frac{\sqrt{(30\times 0.04)^2+(0.003333\times 501.404278)^2}}{501.404278^2}=0.000008$$

3）编制 M 文件和运算结果。

```
disp('           ******  偏置曲柄滑块机构的运动学分析  *******')
SC = input('           输入滑块行程的均值(mm)                SC = ');
P = input('            输入曲柄轴心至滑销最远距离(mm)        P = ');
E = input('            输入机构偏心距的均值(mm)              E = ');
lambda = input('       输入曲柄与连杆长度比的均值            lambda = ');
DR = input('           输入曲柄长度偏差(mm)                  DR = ');
DL = input('           输入连杆长度偏差(mm)                  DL = ');
DE = input('           输入机构偏心距偏差(mm)                DE = ');
n = input('            输入曲柄转速(r/min)                   n = ');
disp('             @@@@@@@@  计算结果 @@@@@@@@')
L = sqrt((P - SC)^2 + E^2)/(1 - lambda);
fprintf('            连杆长度的均值(mm)                    L = %3.6f \n',L)
R = lambda * L;
fprintf('            曲柄长度的均值(mm)                    R = %3.6f \n',R)
sigma_R = DR/3;sigma_L = DL/3;sigma_E = DE/3;
epsilon = E/L;
fprintf('            偏心距与连杆长度比的均值(mm)          epsilon = %3.6f \n',epsilon)
fprintf('            曲柄长度的标准离差(mm)                sigma_R = %3.6f \n',sigma_R)
fprintf('            连杆长度的标准离差(mm)                sigma_L = %3.6f \n',sigma_L)
fprintf('            偏心距的标准离差(mm)                  sigma_E = %3.6f \n',sigma_E)
W = pi * n/30;
fprintf('            曲柄的角速度(mm/s)                    W = %3.6f \n',W)
sigma_lambda = sqrt((R * sigma_L)^2 + (L * sigma_R)^2)/L^2;
fprintf('            曲柄与连杆长度比的标准离差        sigma_lambda = %3.6f \n',sigma_lambda)
sigma_epsilon = sqrt((E * sigma_L)^2 + (L * sigma_E)^2)/L^2;
fprintf('            偏心距与连杆长度比的标准离差    sigma_epsilon = %3.6f \n',sigma_epsilon)
theta = 0:10:360;
hd = theta. * pi/180;
%计算滑块位移、速度、加速度的均值
S = R. * (1 - cos(hd) - epsilon. * sin(hd) + 0.5. * lambda. * sin(hd).^2);
V = R. * W. * (sin(hd) - epsilon. * cos(hd) + 0.5. * lambda. * sin(2. * hd));
A = R. * W^2. * (cos(hd) + epsilon. * sin(hd) + lambda. * cos(2. * hd));
figure(1);
```

```
subplot(1,3,1);
plot(theta,S','r')
title('\bf \滑块位移均值')
ylabel('\bf\it\mu_s')
subplot(1,3,2);
plot(theta,V','k')
title('\bf \滑块速度均值')
ylabel('\bf\it\mu_v')
xlabel('\bf 曲柄转角\theta(°)')
subplot(1,3,3);
plot(theta,A','b')
title('\bf \滑块加速度均值')
ylabel('\bf\it\mu_a')
%计算滑块位移、速度、加速度的标准离差
CS=sqrt((1-cos(hd)+(0.5.*lambda.*sin(hd)-epsilon).*sin(hd)).^2.*sigma_R^2+
(0.5.*(sigma_lambda.*sin(hd)).^2-sigma_epsilon^2).^2.*(R.*sin(hd)).^2);
CV=W.*sqrt((sin(hd)-epsilon.*cos(hd)+0.5.*lambda.*sin(2.*hd)).^2.*sigma_R^2+
(0.5.*(sigma_lambda.*sin(hd)).^2-(sigma_epsilon.*cos(hd)).^2)*R^2);
CA=W^2.*sqrt((cos(hd)+epsilon.*sin(hd)+lambda.*cos(2.*hd)).^2.*sigma_R^2+(R.
*sigma_lambda.*sin(hd)).^2+(lambda.*sigma_epsilon.*cos(2.*hd)).^2);
figure(2);
subplot(1,3,1);
plot(theta,CS','r')
title('\bf \滑块位移标准离差')
ylabel('\bf\it\sigma_s')
subplot(1,3,2);
plot(theta,CV','k')
title('\bf \滑块速度标准离差')
ylabel('\bf\it\sigma_v')
xlabel('\bf 曲柄转角\theta(度)')
subplot(1,3,3);
plot(theta,CA','b')
title('\bf \滑块加速度标准离差')
ylabel('\bf\it\sigma_a')
%计算滑块位移、速度、加速度的偏差
DS=3.*CS;DV=3.*CV;DA=3.*CA;
%计算滑块位移、速度、加速度的最大值和最小值
SM=S+DS;SN=S-DS;
VM=V+DV;VN=V-DV;
AM=A+DA;AN=A-DA;
%计算滑块位移、速度、加速度的差值
SD=2.*DS;VD=2.*DV;AD=2.*DA;
figure(3);
subplot(1,3,1);
plot(theta,SD','r')
title('\bf \滑块位移误差')
```

```
ylabel(' \bf\it\Delta_s' )
subplot(1,3,2);
plot(theta,VD','k' )
title(' \bf \滑块速度误差' )
ylabel(' \bf\it\Delta_v' )
xlabel(' \bf 曲柄转角\theta(度)' )
subplot(1,3,3);
plot(theta,AD','b' )
title(' \bf \滑块加速度误差' )
ylabel(' \bf\it\Delta_a' )
```

M 文件运算结果：

```
 ******  偏置曲柄滑块机构的运动学分析  *******
输入滑块行程的均值(mm)                    SC = 800
输入曲柄轴心至滑销最远距离(mm)              P = 1200
输入机构偏心距的均值(mm)                   E = 30
输入曲柄与连杆长度比的均值              lambda = 0. 20
输入曲柄长度偏差(mm)                      DR = 0. 06
输入连杆长度偏差(mm)                      DL = 0. 12
输入机构偏心距偏差(mm)                    DE = 0. 01
输入曲柄转速(r/min)                        n = 60
      @@@@@@@@ 计算结果 @@@@@@@@
连杆长度的均值(mm)                          L = 501. 404278
曲柄长度的均值(mm)                          R = 100. 280856
偏心距与连杆长度比的均值(mm)          epsilon = 0. 059832
曲柄长度的标准离差(mm)                sigma_R = 0. 020000
连杆长度的标准离差(mm)                sigma_L = 0. 040000
偏心距的标准离差(mm)                  sigma_E = 0. 003333
曲柄的角速度(mm/s)                          W = 6. 283185
曲柄与连杆长度比的标准离差       sigma_lambda = 0. 000043
偏心距与连杆长度比的标准离差    sigma_epsilon = 0. 000008
```

绘制的偏置曲柄滑块机构的运动分析线图如图 9-18 所示。

例 9-9　已知对心曲柄滑块机构的有关参数：曲柄轴心到滑块销心最远距离 $P=300\ \text{mm}$，滑块行程 $H=100\ \text{mm}$，滑块位置允许误差 $\sigma_H = \pm 0.5\ \text{mm}$。试计算曲柄长度 R 和连杆长度 L，及其允许的最大偏差 ΔR 和 ΔL。

1）计算曲柄长度和连杆长度

$$R=\frac{H}{2}=\frac{100\ \text{mm}}{2}=50\ \text{mm}$$

$$L=P-R=300-50=250\ \text{mm}$$

2）计算机构尺度参数影响系数，即滑块位移函数 $h(R,L)$ 关于曲柄长度 R 和连杆长度 L 的偏导数。由于滑块销心 P 点的位移函数

$$h_j=R\left(1-\cos\theta_j+\frac{L}{2R}\sin^2\theta_j\right)\quad (j=1°,2°,\cdots,360°)$$

则关于曲柄长度 R 和连杆长度 L 的偏导数为

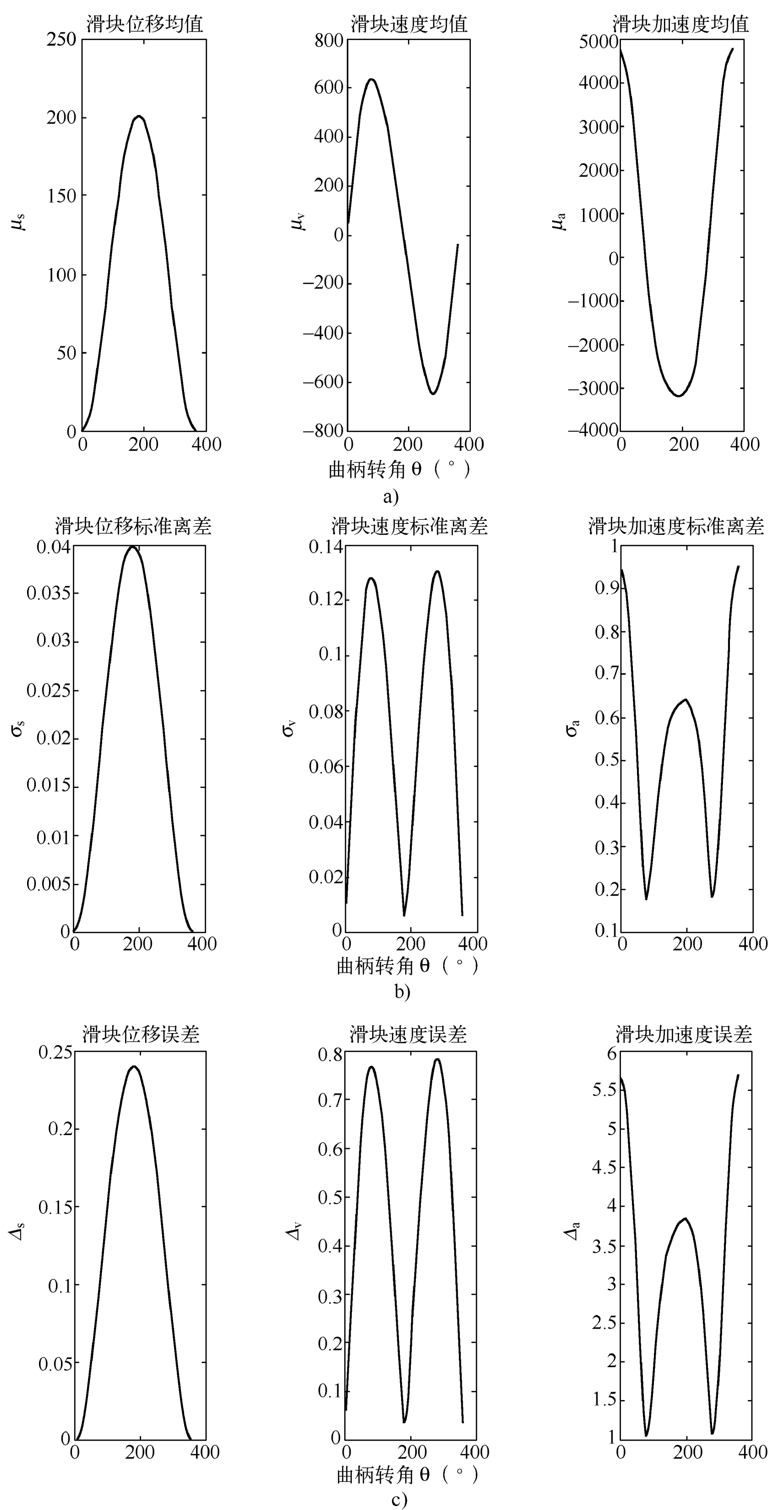


图 9-18　偏置曲柄滑块机构的运动分析

a）滑块运动参数的均值　b）滑块运动参数的标准离差　c）滑块运动参数的误差

$$\frac{\partial h}{\partial R} = 1 - \cos\theta_j$$

$$\frac{\partial h}{\partial L} = \frac{\sin^2\theta_j}{2}$$

取输入参数 $\theta_j (j = 1°, 2°, \cdots, 360°)$ 时，绝对值最大的偏导数值为$\left.\frac{\partial h}{\partial R}\right|_{\max}$和$\left.\frac{\partial h}{\partial L}\right|_{\max}$。

3）计算曲柄和连杆允许的最大偏差

$$\Delta R\Big|_{\max} = \frac{\sigma_\psi}{\sqrt{n}(\partial h/\partial L_i)_{\max}} = \frac{\sigma_H}{\sqrt{2}(\partial h/\partial R)_j\big|_{\max}} = \frac{0.5}{\sqrt{2}(1 - \cos\theta_j)_{\max}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{(1 - \cos\theta_j)_{\max}}$$

$$\Delta L\Big|_{\max} = \frac{\sigma_\psi}{\sqrt{n}(\partial h/\partial L_i)_{\max}} = \frac{\sigma_H}{\sqrt{2}(\partial h/\partial L)_j\big|_{\max}} = \frac{0.5}{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin^2\theta_j\big|_{\max}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{(\sin^2\theta_j)_{\max}}$$

4）编制 M 文件和运算结果：

```
disp('            ****** 曲柄滑块机构的等影响法精度综合 *******')
N = input('输入机构运动精度影响尺度数目            N = ');
H = input('输入滑块行程的均值(mm)                  H = ');
P = input('输入曲柄轴心至滑销心最远距离(mm)        P = ');
DH = input('输入滑块位置允许误差(mm)              DH = ');
disp('          @@@@@@ 计算结果 @@@@@@')
R = H/2;
fprintf('          曲柄长度的均值                    R = %3.3f mm \n',R)
L = P - R;
fprintf('          连杆长度的均值                    L = %3.3f mm \n',L)
theta = 0:10:360;
hd = theta.*pi/180;
%计算曲柄长度和滑块长度的影响系数(偏导数的最大绝对值)
CR = 1 - cos(hd);
CL = 0.5.*sin(hd).^2;
CRm = max(abs(1 - cos(hd)));
CLm = max(abs(0.5.*sin(hd).^2));
fprintf('          曲柄长度影响系数的最大绝对值  CRm = %3.6f \n',CRm)
fprintf('          连杆长度影响系数的最大绝对值  CLm = %3.6f \n',CLm)
%计算曲柄长度和滑块长度的最大允许偏差
DRm = DH/sqrt(N)/CRm;
DLm = DH/sqrt(N)/CLm;
fprintf('          曲柄长度允许的最大偏差        DRm = %3.6f mm \n',DRm)
fprintf('          连杆长度允许的最大偏差        DLm = %3.6f mm \n',DLm)
%绘制机构尺度影响系数线图
plot(theta,CR','r')
hold;
gtext('曲柄长度影响系数曲线')
title('\bf 机构尺度影响系数线图')
```

```
xlabel('\bf 曲柄转角\theta(°)')
ylabel('\bf 尺度影响系数')
plot(theta,CL','k')
gtext('连杆长度影响系数曲线')
grid on
```

M 文件运算结果：

```
        ******  曲柄滑块机构的等影响法精度综合  *******
输入机构运动精度影响尺度数目          N = 2
输入滑块行程的均值(mm)              H = 100
输入曲柄轴心至滑销最远距离(mm)       P = 300
输入滑块位置允许误差(mm)            DH = 0.5
        @@@@@@ 计算结果 @@@@@@
曲柄长度的均值                      R = 50.000 mm
连杆长度的均值                      L = 250.000 mm
曲柄长度影响系数的最大绝对值        CRm = 2.000000
连杆长度影响系数的最大绝对值        CLm = 0.500000
曲柄长度允许的最大偏差              DRm = 0.176777 mm
连杆长度允许的最大偏差              DLm = 0.707107 mm
```

绘制的机构尺度影响系数线图如图 9-19 所示。

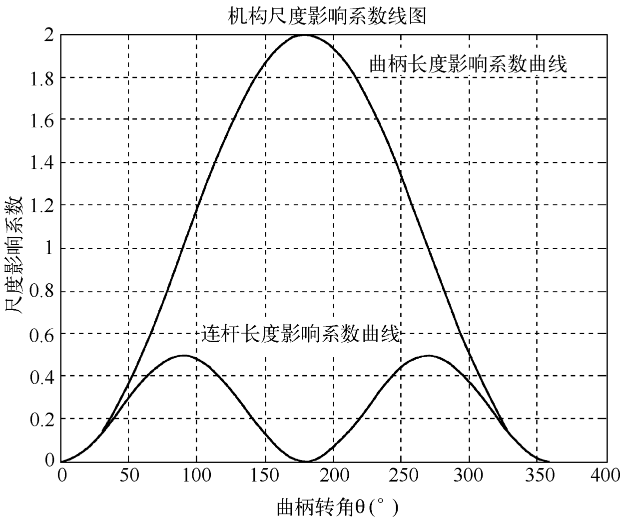


图 9-19　机构尺度影响系数线图

综上所述，在已知曲柄滑块机构的构件长度参数以及制造偏差的条件下，通过对滑块的位移 s、速度 v 和加速度 a 等运动参数进行均值和偏差的计算，可以确定各运动参数的变动范围。

在已知曲柄滑块机构的构件长度参数以及滑块运动位置允许误差条件下，通过计算机构尺度参数影响系数，按照等影响精度法，可以确定曲柄长度 R 和连杆长度 L 的允许的最大偏差 ΔR 和 ΔL。

第 10 章　间歇运动机构和轮系的运动分析

间歇运动机构（intermittent motion mechanism）是将主动件的连续运动转化为从动件有停歇的周期性运动的机构。单向间歇运动机构（如棘轮机构、槽轮机构、不完全齿轮机构和擒纵机构等）广泛应用于生产中，如牛头刨床上工件的进给运动，转塔车床上刀具的转位运动，装配线上的步进输送运动等。实现单向运动中的停歇是这种机构设计的关键。

在机器中，常将一系列相互啮合的齿轮组成传动系统，以实现变速、分路传动、运动分解与合成等功能。这种由一系列齿轮组成的传动系统称为轮系。若轮系中，所有齿轮几何轴线的位置都是固定的，称为定轴轮系；若至少有一个齿轮的几何轴线不固定，而绕其他齿轮的固定几何轴线回转，则称为行星轮系。

10.1　槽轮机构的运动分析和动力计算

槽轮机构是一种间歇运动机构，如图 10-1a 所示。它可以将主动件拨杆 2（其上安装了圆销 4）的匀速转动，转换为从动件槽轮 3 的间歇转动。槽轮机构的运动设计，主要是要求保证槽轮 3 有较高的运动精度，减少它在运动过程中产生的刚性冲击。

如图 10-1b 所示，构件 1 为机架。在拨杆 2 上的圆销 4 进入和退出槽轮 3 的啮合过程中，作匀速转动的拨杆就相当于曲柄 2，槽轮的径向槽相当于导杆 3，假想在拨杆 2 上的圆销外面套上与槽轮径向槽作相对移动的滑块 4。当两者接触时，等同于一个摆动导杆机构，匀速转动曲柄 2 带动导杆 3 作反向变速运动；当两者脱离时，曲柄 2 作匀速转动，导杆 3 则静止不动。

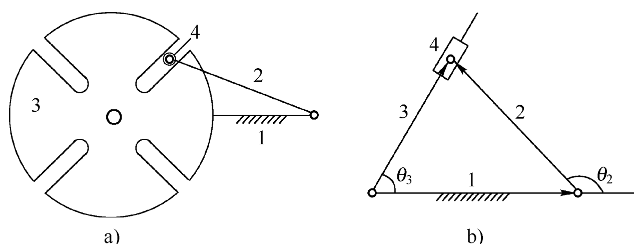


图 10-1　槽轮机构和摆动导杆机构

a）外槽轮机构简图　b）摆动导杆机构简图

槽轮机构的运动和动力特性，通常是用类角速度 ω_3/ω_2 和类角加速度 ε_3/ω_2^2 来衡量的。

10.1.1 槽轮机构的运动方程和运动参数

1）角位移方程（闭环矢量方程）

$$\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{r}_1 \tag{10-1}$$

2）角速度方程（矩阵形式）

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\boldsymbol{r}_3\sin\theta_3 \\ \sin\theta_3 & \boldsymbol{r}_3\cos\theta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{r}} \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_2\boldsymbol{r}_2\sin\theta_2 \\ \omega_2\boldsymbol{r}_2\cos\theta_2 \end{bmatrix} \tag{10-2}$$

3）角加速度方程（矩阵形式）

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\boldsymbol{r}_3\sin\theta_3 \\ \sin\theta_3 & \boldsymbol{r}_3\cos\theta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{r}} \\ \mathrm{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_2\boldsymbol{r}_2\sin\theta_2 - \omega_2^2\boldsymbol{r}_2\cos\theta_2 + 2\omega_3\dot{\boldsymbol{r}}_3\sin\theta_3 + \omega_3^2\boldsymbol{r}_3\cos\theta_3 \\ a_2\boldsymbol{r}_2\cos\theta_2 - \omega_2^2\boldsymbol{r}_2\sin\theta_2 - 2\omega_3\dot{\boldsymbol{r}}\cos\theta_3 + \omega_3^2\boldsymbol{r}_3\sin\theta_3 \end{bmatrix} \tag{10-3}$$

式中，θ_2、θ_3 分别是主动件曲柄 2、从动件导杆 3 与机架 1 正方向的夹角，如图 10-1b 所示。

4）从动件的运动参数。槽轮机构中从动件（槽轮或摆动导杆）3 的运动方程见表 10-1。

表 10-1 槽轮机构的运动方程

运动参数	外槽轮机构	内槽轮机构
角位移	$\theta_3 = \mathrm{atan}\dfrac{\lambda\sin\theta_2}{1-\lambda\cos\theta_2}$	$\theta_3 = \mathrm{atan}\dfrac{\lambda\sin\theta_2}{1+\lambda\cos\theta_2}$
角速度	$\omega_3 = \dfrac{\lambda(\cos\theta_2-\lambda)}{1-2\lambda\cos\theta_2+\lambda^2}\omega_2$	$\omega_3 = \dfrac{\lambda(\cos\theta_2+\lambda)}{1+2\lambda\cos\theta_2+\lambda^2}\omega_2$
角加速度	$\varepsilon_3 = -\dfrac{\lambda(1-\lambda^2)\sin\theta_2}{(1-2\lambda\cos\theta_2+\lambda^2)^2}\omega_2^2$	$\varepsilon_3 = \dfrac{\lambda(1-\lambda^2)\sin\theta_2}{(1+2\lambda\cos\theta_2+\lambda^2)^2}\omega_2^2$

式中，圆销中心轨迹半径 R_2 与中心距 a 的比 $\lambda = \dfrac{R_2}{a} = \sin\dfrac{\pi}{z}$，$z$ 是槽轮槽数；槽轮 3 的槽间角 $2\theta_{30} = \dfrac{2\pi}{z}$；拨杆 2 运动角（与槽轮 3 槽间角对应）$2\theta_{20} = \pi - 2\theta_{30}$（外槽轮机构），或 $2\theta_{20} = \pi + 2\theta_{30}$（内槽轮机构）；主动件拨杆 2 转角的取值范围是 $-\theta_{20} \leqslant \theta_2 \leqslant \theta_{20}$。

10.1.2 槽轮机构的动力学计算

槽轮机构带动工作台转位时，槽轮 3 轴上的阻力矩很小，可以忽略不计，仅考虑其上的惯性力矩时，作用在拨杆 2 轴上的最大转矩为

$$M_{2\max} = J_{3v}\left(\frac{\pi n_2}{30}\right)^2\left[\frac{\lambda^2(1-\lambda^2)(\cos\theta_{2\max}-\lambda)\sin\theta_{2\max}}{(1+\lambda^2-2\lambda\cos\theta_{2\max})}\right] \tag{10-4}$$

式中，J_{3v} 是所有从动构件转化到槽轮轴上的转动惯量，单位为 $\mathrm{kg \cdot m^2}$；n_2 是拨杆 2 的转速，单位为 r/min；$\theta_{2\max}$ 是外槽轮 3 发生最大角加速度 $\varepsilon_{3\max}$ 时拨杆 2 相应的位置角，按照下式计算

$$\theta_{2\max} = \text{acos}\left[\sqrt{\left(\frac{1+\lambda^2}{4\lambda}\right)^2 + 2} - \left(\frac{1+\lambda^2}{4\lambda}\right)\right] \tag{10-5}$$

主动件拨杆 2 所需要的输入功率为

$$N_{2\max} = \frac{M_{2\max} n_2}{9550\eta} \tag{10-6}$$

式中，η 是传动系统的效率。

10.1.3　计算实例的 M 文件和运算结果

例 10-1　外槽轮机构的槽数 $z=4$、6、8、10 时，计算从动件槽轮的运动参数 θ_3、ω_3、ε_3，并且绘制槽轮的运动线图（类角速度 ω_3/ω_2 和类角加速度 ε_3/ω_2^2）。

编制外槽轮机构运动分析的 M 文件：

```
%外槽轮机构运动分析
dr = pi/180.0;                          %角度与弧度的转换系数
%销轮 2 转角范围：- f20 < f2 < f20,步长为 bc 度,计算运动参数
for z = 4:2:10                          %设定槽轮槽数
    f30 = pi/z;                         %计算槽轮槽间半角
    f20 = pi/2 - f30;                   %计算销轮运动半角
    lmd = sin(pi/z);                    %计算曲柄 2 与机架 1 的长度比
    bc = 1;                             %循环步长
    cz = - f20/dr;                      %循环初值
    zz = f20/dr;                        %循环终值
    i = 1;                              %根据步长变化的运动参数矩阵 cs 行数计数器
    for f2 = cz:bc:zz                   %计算槽轮角位移、类角速度、类角加速度
        wy = atan(lmd * sin(f2 * dr)/(1 - lmd * cos(f2 * dr)));
        sd = lmd * (cos(f2 * dr) - lmd)/(1 - 2 * lmd * cos(f2 * dr) + lmd^2);
        jsd = - lmd * sin(f2 * dr) * (1 - lmd^2)/(1 - 2 * lmd * cos(f2 * dr) + lmd^2)^2;
        switch z                        %矩阵 c(i,:)表示第 i 行的各列元素
            case 4,c4(i,:) = [f2 wy/dr sd jsd];
            case 6,c6(i,:) = [f2 wy/dr sd jsd];
            case 8,c8(i,:) = [f2 wy/dr sd jsd];
            case 10,c10(i,:) = [f2 wy/dr sd jsd];
        end
        i = i + 1;
    end
end
%输出外槽轮机构运动参数
['轮槽数 z=4 ']
['销轮转角' ',   槽轮角位移' ',   角速度' ',    角加速度' ']
%矩阵 c(:,j)表示第 j 列的各行元素
[c4(:,1),c4(:,2),c4(:,3),c4(:,4)]
['轮槽数 z=6 ']
['销轮转角' ',   槽轮角位移' ',   角速度' ',    角加速度' ']
%矩阵 c(:,j)表示第 j 列的各行元素
[c6(:,1),c6(:,2),c6(:,3),c6(:,4)]
```

```
[ '轮槽数 z=8' ]
[ '销轮转角' ',   '槽轮角位移' ',   '角速度' ',    '角加速度' ]
%矩阵 c(:,j)表示第 j 列的各行元素
[c8(:,1),c8(:,2),c8(:,3),c8(:,4)]
[ '轮槽数 z=10' ]
[ '销轮转角' ',   '槽轮角位移' ',   '角速度' ',    '角加速度' ]
%矩阵 c(:,j)表示第 j 列的各行元素
[c10(:,1),c10(:,2),c10(:,3),c10(:,4)]
%
%绘制槽轮机构运动参数曲线
figure(1);                                       %生成槽轮运动线图窗口
subplot(2,2,1);                                  %选择第 1 个子窗口
plot(c4(:,1),c4(:,3),c4(:,1),c4(:,4))            %绘制 z=4 的线图
title('\bf 外槽轮槽数 z=4')                      %标注子窗口名称
axis([-pi/4/dr pi/4/dr -6 6])                    %定义坐标轴范围
grid                                             %栅格线
text(-2,4.2','\bf \epsilon_3/\omega_2^{2}')      %标注类角加速度线图
text(20,1.6','\bf \omega_3/\omega_2')            %标注类角速度线图
ylabel('\bf 槽轮运动线图')                       %定义纵坐标轴名称
%
subplot(2,2,2);                                  %选择第 2 个子窗口
plot(c6(:,1),c6(:,3),c6(:,1),c6(:,4))            %绘制 z=6 的线图
title('\bf 外槽轮槽数 z=6')
axis([-pi/3/dr pi/3/dr -1.5 1.5])
grid
text(10,-0.7','\bf \epsilon_3/\omega_2^{2}')
text(30,0.7','\bf \omega_3/\omega_2')
ylabel('\bf 槽轮运动线图')
%
subplot(2,2,3);                                  %选择第 3 个子窗口
plot(c8(:,1),c8(:,3),c8(:,1),c8(:,4))            %绘制 z=8 的线图
title('\bf 外槽轮槽数 z=8')
axis([-3*pi/8/dr 3*pi/8/dr -0.8 0.8])
grid
text(12,-0.3','\bf \epsilon_3/\omega_2^{2}')
text(40,0.4','\bf \omega_3/\omega_2')
ylabel('\bf 槽轮运动线图')
%
subplot(2,2,4);                                  %选择第 4 个子窗口
plot(c10(:,1),c10(:,3),c10(:,1),c10(:,4))%绘制 z=10 的线图
title('\bf 外槽轮槽数 z=10')
axis([-2*pi/5/dr 2*pi/5/dr -0.5 0.5])
grid
text(15,-0.2','\bf \epsilon_3/\omega_2^{2}')
text(40,0.3','\bf \omega_3/\omega_2')
ylabel('\bf 槽轮运动线图')
```

```
%
figure(2);                              %生成类线图窗口
subplot(1,2,1);                         %选择第1个子窗口
plot(c4(:,1),c4(:,3),c6(:,1),c6(:,3),c8(:,1),c8(:,3),c10(:,1),c10(:,3))
title('\bf \omega_3/\omega_2')
axis([-f20/dr f20/dr -0.1 2.5])
grid
text(-10,0.35,'z=10')
text(-8,0.7,'z=8')
text(-8,1.1,'z=6')
text(10,2.1,'z=4')
ylabel('\bf 槽轮类角速度线图')
%
subplot(1,2,2);                         %选择第2个子窗口
plot(c4(:,1),c4(:,4),c6(:,1),c6(:,4),c8(:,1),c8(:,4),c10(:,1),c10(:,4))
title('\bf \epsilon_3/\omega_2^{2}')
axis([-f20/dr f20/dr -5.5 5.5])
grid
text(-50,0.2,'z=10')
text(-30,0.9,'z=8')
text(-25,1.6,'z=6')
text(0,3.5,'z=4')
ylabel('\bf 槽轮类角加速度线图')
%
```

M 文件运行结果：

```
轮槽数 z=4
  销轮转角     槽轮角位移    角速度    角加速度
  -45.0000    -45.0000    0.0000    1.0000
  -35.0000    -43.9468    0.2320    1.7384
  -25.0000    -39.7632    0.6453    3.1358
     …
   45.0000     45.0000    0.0000   -1.0000

轮槽数 z=6
  销轮转角     槽轮角位移    角速度    角加速度
  -60.0000    -30.0000   -0.0000    0.5774
  -50.0000    -29.4415    0.1176    0.7791
     …
   60.0000     30.0000    0.0000   -0.5774

轮槽数 z=8
  销轮转角     槽轮角位移    角速度    角加速度
  -67.5000    -22.5000    0.0000    0.4142
  -57.5000    -22.1115    0.0805    0.5096
     …
   62.5000     22.4063    0.0382   -0.4607
```

轮槽数 z = 10

销轮转角	槽轮角位移	角速度	角加速度
− 72. 0000	− 18. 0000	0. 0000	0. 3249
− 62. 0000	− 17. 7003	0. 0616	0. 3805
…			
68. 0000	17. 9536	0. 0235	− 0. 3472

绘制的外槽轮机构运动线图如图 10−2 和 10−3 所示。

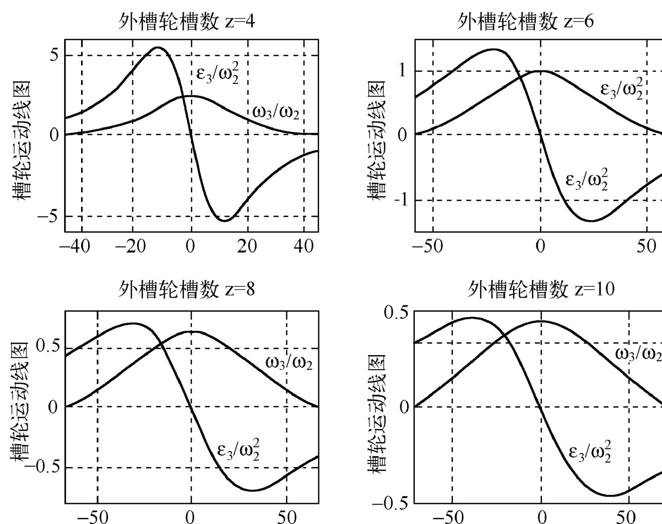


图 10−2　不同槽数时外槽轮机构的运动线图

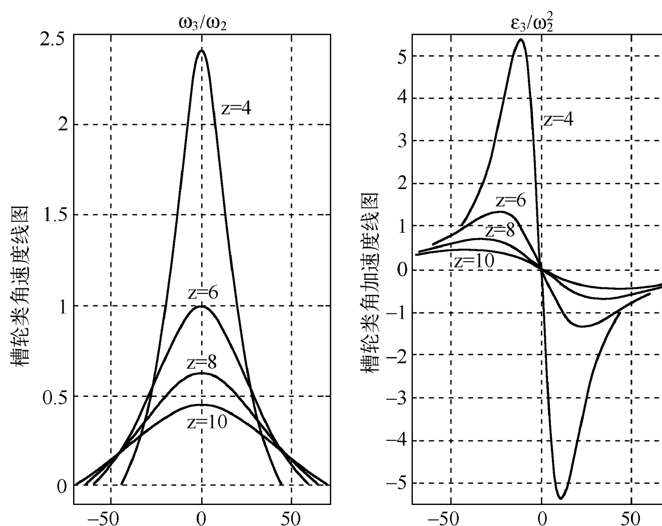


图 10−3　外槽轮机构的类角速度和类角加速度运动线图

从图 10−3 可以看出，随着槽轮槽数 z 的增大，外槽轮机构的运动趋于平稳，动力特性也得到改善。但是槽数过多会使槽轮的体积过大，产生较大的惯性力矩。因此，槽轮的槽数

一般取 $z=4\sim8$。

例 10-2　内槽轮机构的槽数 $z=4$、6、8、10 时，计算从动件槽轮的运动参数 θ_3、ω_3、ε_3，并且绘制槽轮的运动线图（类角速度 ω_3/ω_2和类角加速度 ε_3/ω_2^2）。

编制内槽轮机构运动分析的 M 文件：

```
%内槽轮机构运动分析
dr = pi/180.0;                          %角度与弧度的转换系数
%销轮 2 转角范围: - f20 < f2 < f20,步长为 bc 度,计算运动参数
for z = 4:2:10                          %设定槽轮槽数
    f30 = pi/z;                         %计算槽轮槽间半角
    f20 = pi/2 + f30;                   %计算销轮运动半角
    lmd = sin(pi/z);                    %计算曲柄 2 与机架 1 的长度比
    bc = 1;                             %循环步长
    cz = - f20/dr;                      %循环初值
    zz = f20/dr;                        %循环终值
    i = 1;                              %根据步长变化的运动参数矩阵 cs 行数计数器
    for f2 = cz:bc:zz                   %计算槽轮角位移、类角速度、类角加速度
        wy = atan(lmd * sin(f2 * dr)/(1 + lmd * cos(f2 * dr)));
        sd = lmd * (cos(f2 * dr) + lmd)/(1 + 2 * lmd * cos(f2 * dr) + lmd^2);
        jsd = lmd * sin(f2 * dr) * (1 - lmd^2)/(1 + 2 * lmd * cos(f2 * dr) + lmd^2)^2;
        switch z %矩阵 c(i,:)表示第 i 行的各列元素
            case 4,c4(i,:) = [f2 wy/dr sd jsd];
            case 6,c6(i,:) = [f2 wy/dr sd jsd];
            case 8,c8(i,:) = [f2 wy/dr sd jsd];
            case 10,c10(i,:) = [f2 wy/dr sd jsd];
        end
        i = i + 1;
    end
end
%输出内槽轮机构运动参数
['轮槽数 z=4 ']
['销轮转角'',   槽轮角位移'',   角速度'',    角加速度' ]
%矩阵 c(:,j)表示第 j 列的各行元素
[c4(:,1),c4(:,2),c4(:,3),c4(:,4)]
['轮槽数 z=6 ']
['销轮转角'',   槽轮角位移'',   角速度'',    角加速度' ]
%矩阵 c(:,j)表示第 j 列的各行元素
[c6(:,1),c6(:,2),c6(:,3),c6(:,4)]
['轮槽数 z=8 ']
['销轮转角'',   槽轮角位移'',   角速度'',    角加速度' ]
%矩阵 c(:,j)表示第 j 列的各行元素
[c8(:,1),c8(:,2),c8(:,3),c8(:,4)]
['轮槽数 z=10 ']
['销轮转角'',   槽轮角位移'',   角速度'',    角加速度' ]
%矩阵 c(:,j)表示第 j 列的各行元素
[c10(:,1),c10(:,2),c10(:,3),c10(:,4)]
```

```
%
%绘制槽轮机构运动参数曲线
figure(1);                                          %生成槽轮运动线图窗口
subplot(2,2,1);                                     %选择第 1 个子窗口
plot(c4(:,1),c4(:,3),c4(:,1),c4(:,4))               %绘制 z=4 的线图
title('\bf 内槽轮槽数 z=4')                          %标注子窗口名称
axis([-3*pi/4/dr 3*pi/4/dr -1 1])                   %定义坐标轴范围
grid                                                %栅格线
text(-85,-0.2,'\bf \epsilon_3/\omega_2^{2}')        %标注类角加速度线图
text(10,0.55,'\bf \omega_3/\omega_2')               %标注类角速度线图
ylabel('\bf 槽轮运动线图')                           %定义纵坐标轴名称
%
subplot(2,2,2);                                     %选择第 2 个子窗口
plot(c6(:,1),c6(:,3),c6(:,1),c6(:,4))               %绘制 z=6 的线图
title('内槽轮槽数 z=6')
axis([-3*pi/4/dr 3*pi/4/dr -0.6 0.6])
grid
text(-85,-0.3,'\bf \epsilon_3/\omega_2^{2}')
text(10,0.4,'\bf \omega_3/\omega_2')
ylabel('\bf 槽轮运动线图')
%
subplot(2,2,3);                                     %选择第 3 个子窗口
plot(c8(:,1),c8(:,3),c8(:,1),c8(:,4))               %绘制 z=8 的线图
title('\bf 内槽轮槽数 z=8')
axis([-3*pi/4/dr 3*pi/4/dr -0.40 0.40])
grid
text(-85,-0.3,'\bf \epsilon_3/\omega_2^{2}')
text(10,0.32,'\bf \omega_3/\omega_2')
ylabel('\bf 槽轮运动线图')
%
subplot(2,2,4);                                     %选择第 4 个子窗口
plot(c10(:,1),c10(:,3),c10(:,1),c10(:,4))           %绘制 z=10 的线图
title('\bf 内槽轮槽数 z=10')
axis([-3*pi/4/dr 3*pi/4/dr -0.35 0.35])
grid
text(-80,-0.22,'\bf \epsilon_3/\omega_2^{2}')
text(10,0.28,'\bf \omega_3/\omega_2')
ylabel('\bf 槽轮运动线图')
%
figure(2);                                          %生成类线图窗口
subplot(1,2,1);                                     %选择第 1 个子窗口
plot(c4(:,1),c4(:,3),c6(:,1),c6(:,3),c8(:,1),c8(:,3),c10(:,1),c10(:,3))
title('\bf \omega_3/\omega_2')
axis([-3*pi/4/dr 3*pi/4/dr -0.05 0.45])
grid
text(-12,0.43,'z=4')
```

```
text( -12,0.35','z=6' )
text( -12,0.29','z=8' )
text( -15,0.21','z=10' )
ylabel('\bf 槽轮类角速度线图' )
%
subplot(1,2,2);                                    %选择第 2 个子窗口
plot(c4(:,1),c4(:,4),c6(:,1),c6(:,4),c8(:,1),c8(:,4),c10(:,1),c10(:,4))
title('\bf \epsilon_3/\omega_2^{2}' )
axis([ -3*pi/4/dr 3*pi/4/dr  -0.6 0.6])
grid
text(40,0.22','z=10' )
text( -60, -0.15','z=8' )
text( -110, -0.45','z=6' )
text(60,0.05','z=4' )
ylabel('\bf 槽轮类角加速度线图' )
```

运算结果：

```
轮槽数 z=4
   销轮转角     槽轮角位移   角速度   角加速度
  -135.0000    -45.0000      0      -1.0000
  -125.0000    -44.2584   0.1371    -0.6104
      …
   135.0000     45.0000      0       1.0000

轮槽数 z=6
   销轮转角     槽轮角位移    角速度    角加速度
  -120.0000    -30.0000    0.0000    -0.5774
  -110.0000    -29.5432    0.0870    -0.4274
      …
   120.0000     30.0000   -0.0000     0.5774

轮槽数 z=8
   销轮转角     槽轮角位移   角速度   角加速度
  -112.5000    -22.5000   0.0000   -0.4142
  -102.5000    -22.1636   0.0649   -0.3315
      …
   107.5000     22.4128   0.0342    0.3710

轮槽数 z=10
   销轮转角     槽轮角位移
  -108.0000    -18.0000
   -98.0000    -17.7323
      …
   102.0000     17.9014
```

绘制的内槽轮机构运动线图如图 10-4 和图 10-5 所示。

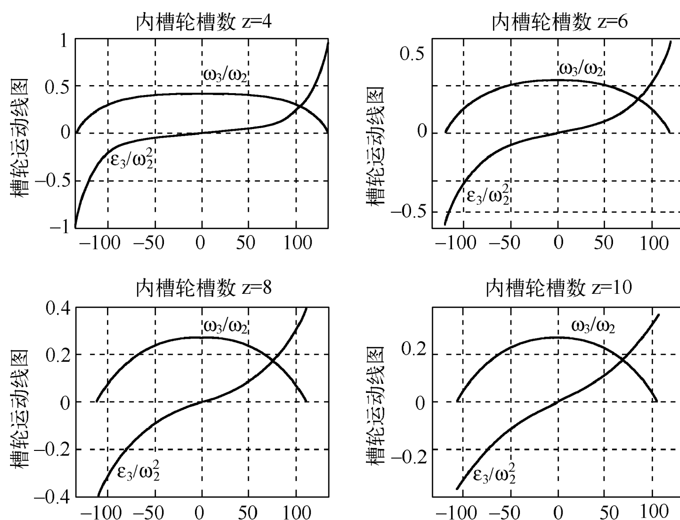


图 10-4　不同槽数时内槽轮机构的运动线图

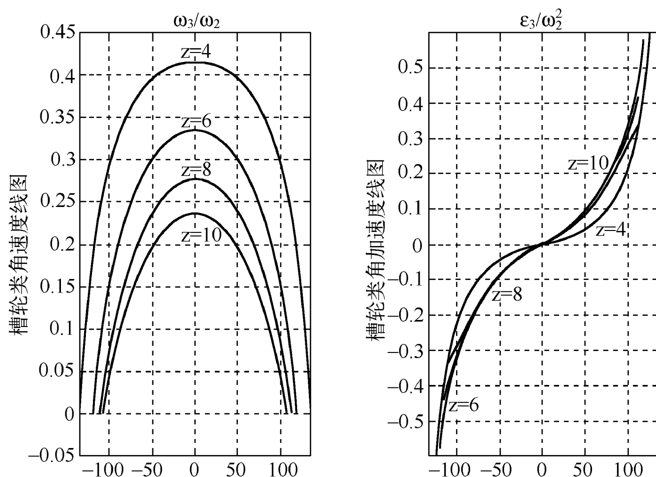


图 10-5　内槽轮机构的类角速度和类角加速度运动线图

从图 10-5 可以看出，随着槽轮槽数 z 的增大，内槽轮机构的类角速度降低，但是它们的类角加速度与槽轮槽数 z 的关系不十分明显。

例 10-3　某 12 工位转盘设备采用单圆销外槽轮机构实现转位，最长工序的工艺时间 1.4 s，槽轮机构中心距 $a=120$ mm，槽轮轴上等效转动惯量 $J_{3v}=150\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$。试计算机构运动系数 τ、拨盘的转速 n_2、槽轮机构的结构尺寸和所需要的电动机功率。

说明：MATLAB 默认的运算精度是双精度的，但是一般书上显示计算结果只保留 4 位小数，所以表面上 M 文件计算结果与依照公式手算结果在最后一两位小数可能有差异，实际上是不可能的。下面的所有计算实例都如此。

解：

1）计算机构运动系数 τ：槽轮的槽数等于转盘设备的工位数，即 $z=12$。由于圆销数 $k=1$，根据参考文献［1］式（6-7）得到外槽轮机构的运动系数

$$\tau = k\frac{z-2}{2z} = 1 \times \frac{12-2}{2 \times 12} = 0.417$$

2）确定拨盘的转速 n_1 和设备的生产率 Q：在槽轮静止时，设备处于工艺动作状态，因此最长工序的工艺时间就是槽轮的静止时间 t'_2，根据参考文献［1］式（6－6）得到机构的运动循环周期

$$t_1 = \frac{2zt'_2}{z+2} = \frac{2 \times 12 \times 1.4}{12+2} = 2.4\ \text{s}$$

拨盘的转速为

$$n_2 = \frac{60}{t_1} = \frac{60}{2.4} = 25\ \text{r/min}$$

设备的生产率为

$$Q = 60n_2 = 60 \times 25 = 1500/\text{h}$$

3）计算槽轮机构的几何尺寸（参考文献［1］表 6－3）：拨杆 2 上圆销转动半径为

$$R_2 = a\sin\frac{\pi}{\text{z}} = 120\sin\frac{\pi}{12} = 31.058\ \text{mm}$$

取 $R_2 = 31$ mm。

槽轮半径为

$$R_3 = a\cos\frac{\pi}{\text{z}} = 120\cos\frac{\pi}{12} = 115.911\ \text{mm}$$

取 $R_3 = 116$ mm。

根据结构取圆销半径 $r = 8$ mm，槽顶口壁厚 $e = 5$ mm，则槽底高

$$b \leqslant a - (R_1 + r) = 120 - (31 + 8) = 81\ \text{mm 取 } b = 76\ \text{mm。}$$

槽深为

$$h = R_3 - b = 116 - 76 = 40\ \text{mm}$$

锁住弧半径

$$R_x = R_2 - r - e = 31 - 8 - 5 = 18\ \text{mm}$$

锁住弧张开角

$$\gamma = 360°\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{z} - 0.5\right) = 360° \times \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{12} - 0.5\right) = 210°$$

槽轮厚度根据结构取 20 mm。

4）计算槽轮 3 发生最大角加速度时拨杆 2 相应的位置角。圆销中心轨迹半径 R_2 与中心距 a 的比

$$\lambda = \sin\frac{\pi}{\text{z}} = \sin\frac{\pi}{12} = 0.2588$$

槽轮最大加速度时拨销的位置角

$$\theta_{2\max} = \text{acos}\left[\sqrt{\left(\frac{1+\lambda^2}{4\lambda}\right)^2 + 2} - \left(\frac{1+\lambda^2}{4\lambda}\right)\right]$$

$$= \text{acos}\left[\sqrt{\left(\frac{1+0.2588^2}{4 \times 0.2588}\right)^2 + 2} - \left(\frac{1+0.2588^2}{4 \times 0.2588}\right)\right] = 44°$$

拨盘轴上的最大转矩

$$M_{2\max}=J_{3v}\left(\frac{\pi n_2}{30}\right)^2\left[\frac{\lambda^2(1-\lambda^2)(\cos\theta_{2\max}-\lambda)\sin\theta_{2\max}}{(1+\lambda^2-2\lambda\cos\theta_{2\max})^3}\right]$$

$$=150\times\left(\frac{25\pi}{30}\right)^2\left[\frac{0.2588^2\times(1-0.2588^2)(\cos 44^\circ-0.2588)\times\sin 44^\circ}{(1+0.2588^2-2\times0.2588\times\cos 44^\circ)^3}\right]=61.3194\ \text{N}\cdot\text{m}$$

拨盘轴上的输入功率

$$N_{2\max}=\frac{M_{2\max}n_2}{9550\eta}=\frac{61.3194\times25}{9550\times0.9}=0.1784\ \text{kW}$$

5）绘制槽轮和拨盘的工作图，如参考文献［1］图 6－20 所示。

编制 M 文件如下：

```
%外槽轮机构设计计算
%已知条件:工位数、最长工序时间、中心距、圆销数、槽轮轴系转动惯量、设备效率
z=12;t2p=1.4;a=120;k=1;J3v=150;eta=0.9;
%计算机构运动参数
tau=k*(z-2)/(2*z);
t1=2*z*t2p/(z+2);
n2=60/t1;
Q=60*n2;
fprintf('        运动系数                    tau=%3.3f \n',tau);
fprintf('        运动周期                     t1=%3.3f s \n',t1);
fprintf('        拨杆转速                     n2=%3.3f r/min \n',n2);
fprintf('        设备生产率                    Q=%3.3f \n',Q);
%计算机构结构尺寸(参考文献[1]表6-3)
R2=a*sin(pi/z)
R2=input('确定圆销转到半径(mm)        R2=');
R3=a*cos(pi/z)
R3=input('确定圆销转到半径(mm)        R3=');
r=input('根据结构选取圆销半径(mm)     r=');
e=input('根据结构选取槽顶口壁厚(mm) e=');
bmax=a-(R2+r)
b=input('确定槽底高(mm)                b=');
h=R3-b;
fprintf('        槽深                          h=%3.2f mm \n',h);
Rx=R2-r-e;
fprintf('        锁住弧半径                   Rx=%3.2f mm \n',Rx);
gamma=360*(1/k+1/z-0.5);
fprintf('        锁住弧张开角              gamma=%3.2f°\n',gamma);
%计算机构动力参数
lambda=sin(pi/z);
lam=(1+lambda^2)/(4*lambda);
theta=acos(sqrt(lam^2+2)-lam);thetm=theta*180/pi;
m2s=lambda^2*(1-lambda^2)*(cos(theta)-lambda)*sin(theta);
m2x=(1+lambda^2-2*lambda*cos(theta))^3;
M2max=J3v*(n2*pi/30)^2*(m2s/m2x);
N2max=M2max*n2/(9550*eta);
```

```
fprintf('  圆销中心轨迹半径与中心距比      lambda = %3.4f \n' ,lambda);
fprintf('  槽轮最大加速度时拨销位置角        theta = %3.4f°\n' ,thetm);
fprintf('  拨盘轴上的最大转矩               M2max = %3.4f Nm \n' ,M2max);
fprintf('  拨盘轴上的输入功率               N2max = %3.4f kW \n' ,N2max);
```

计算结果：

```
      运动系数 tau = 0.417
      运动周期  t1 = 2.400 s
      拨杆转速  n2 = 25.000 r/min
      设备生产率Q = 1500.000
R2 =    31.0583
    确定圆销转到半径(mm)                R2 = 31
R3 =    115.9111
    确定圆销转到半径(mm)                R3 = 116
    根据结构选取圆销半径(mm)              r = 8
    根据结构选取槽顶口壁厚(mm)            e = 5
bmax =       81
    确定槽底高(mm)                       b = 76
      槽深                               h = 40.00 mm
      锁住弧半径                        Rx = 18.00 mm
      锁住弧张开角                   gamma = 210.00°
    圆销中心轨迹半径与中心距比      lambda = 0.2588
    槽轮最大加速度时拨销位置角        theta = 44.0046°
    拨盘轴上的最大转矩               M2max = 61.3194 Nm
    拨盘轴上的输入功率               N2max = 0.1784 kW
```

10.2　针轮机构的设计计算和运动分析

针轮机构的运动状况与槽轮机构相似，都可以实现间歇运动。由于槽轮机构为保证其运动的可能性，槽轮的槽数不能小于 3，因此从动件槽轮的每次运动循环的转角不能大于 120°，而针轮机构则没有这个限制。

针轮机构又称为星轮机构，如图 10-6 所示。针轮机构的主动轮（针轮）1 上装有若干个针销和一段锁止凸圆弧；从动轮（星轮）2 上有若干个不完全摆线齿廓轮齿，每隔若干个摆线齿，就间隔一个特殊齿形的锁止凹圆弧，它与摆线齿有始末两段过渡曲线。

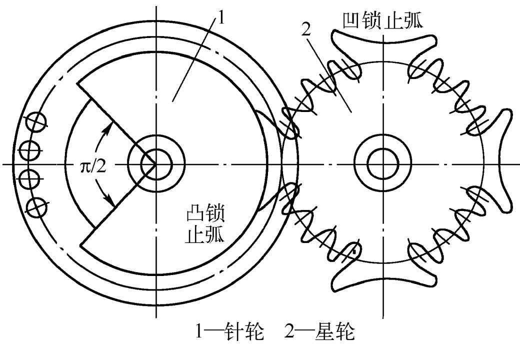


图 10-6　外针轮机构

针轮上的针销数目至少有两个或以上。如图 10-6 所示的针轮 1 等速连续转动时，当第 1 个针销进入星轮的第 1 个齿槽与过渡曲线啮合时，使星轮从静止开始逐渐加速运动，它运动到正中位置（两轮中心连线位置）

时，星轮的角速度达到最大值并且保持不变；针轮的第 2、3……个针销依次进入啮合时，星轮保持等速运动，直至最后 1 个针销运动到正中位置时止；最后 1 个针销越过正中位置与星轮齿槽过渡曲线啮合时，使星轮运动从等速开始逐渐降低，当它脱离齿槽时，星轮被锁止弧锁住不动。

外针轮机构中针轮旋转一周为一个工作循环。如图 10-6 所示的外针轮机构在一个工作循环中，针轮的动程角 $\theta_d=\pi/2$，停程角 $\theta_j=2\pi-\theta_d=2\pi-\pi/2=3\pi/2$；星轮的转位角 $\varphi_d=\pi/2$，即星轮每个工作循环的转角是 $\pi/2$。

机构的运动系数 τ 是指星轮在每个工作循环中转位时间所占的比率，如图 10-6 所示外针轮机构

$$\tau=\frac{\theta_d}{\theta_d+\theta_j}=\frac{\pi/2}{2\pi}=0.25$$

也可以根据转角比 σ 和停歇数 n 由下式计算

$$\tau=\frac{\sigma}{n}=\frac{\theta_d/\varphi_d}{n}=\frac{0.5\pi/0.5\pi}{4}=0.25$$

10.2.1 针轮机构的设计计算

例 10-4 已知条件：星轮停歇数 $n=4$，针轮动程角 $\theta_d=\pi/2$，星轮转位角 $\varphi_d=\pi/2$，中心距 $C=192$ mm。

1）计算两轮的节圆半径比 μ。已知星轮上有 n 个锁止弧，则在针轮一个工作循环中星轮的停歇数为 n，针轮与星轮的转角比 $\sigma=\theta_d/\varphi_d$，两轮的节圆半径比为 μ。σ、μ、n 三者关系是

$$\sigma=\mu\left(1-\frac{n}{2}\right)+n\left(\frac{4+3\mu}{\pi}\right)\text{asin}\frac{\mu}{2(1+\mu)} \quad (10\text{-}7)$$

得到两轮的节圆半径比 μ。

在式（10-7）中代入转角比 $\sigma=\theta_d/\varphi_d$ 和停歇数 $n=4$，采用 MATLAB 函数 fzero 求解超越方程（10-7），得到节圆半径比 $\mu=0.7773$。

由于停歇数 n 是整数，转角比 σ 是整数或分数，节圆半径比 μ 一般采用分数。因此利用 MATLAB 函数 rat 将计算得到的小数 μ 转化为指定精度的分数 $\mu=7/9\approx 0.7778$，可见与原值相差微小。

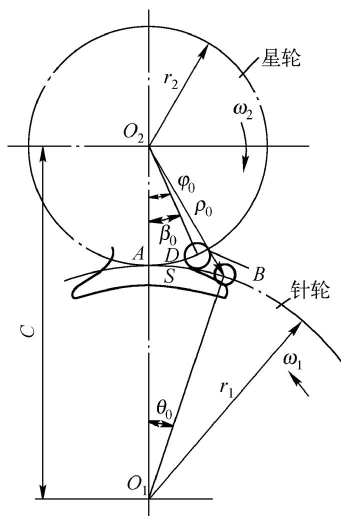


图 10-7 外针轮机构的运动几何关系

以下进行针轮机构的运动几何关系计算，相关参数如图 10-7 所示。

2）计算星轮加速段对应的针轮转角 θ_0

$$\theta_0=2\text{asin}\frac{\mu}{2(1+\mu)}=2\text{asin}\frac{0.7778}{2(1+0.7778)}=25.2713° \quad (10\text{-}8)$$

3）计算星轮齿槽外端中心位置角 φ_0

$$\varphi_0=45°-1.5\arcsin\frac{\mu}{2(1+\mu)}=45°-1.5\arcsin\frac{0.7778}{2(1+0.7778)}=26.0466° \quad (10\text{-}9)$$

4）计算星轮齿槽内端中心位置角 β_0

$$\beta_0 = 90° - \frac{2+3\mu}{\mu}\arcsin\frac{\mu}{2(1+\mu)} = 90° - \frac{2+3\times0.7778}{0.7778}\arcsin\frac{0.7778}{2(1+0.7778)} = 19.6015° \tag{10-10}$$

5）计算两轮节圆半径 r_1 与 r_2

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= \frac{C}{1+\mu} = \frac{192}{1+0.7778} = 108.000\ \text{mm} \\ r_2 &= \frac{C\mu}{1+\mu} = \frac{192\times0.7778}{1+0.7778} = 84.000\ \text{mm} \end{aligned}\right\} \tag{10-11}$$

6）计算星轮齿槽外端中心点 B 的半径 ρ_0

$$\rho_0 = \frac{2C\mu}{1+\mu}\cos\left(45° + \frac{\theta_0}{4}\right) = \frac{2\times192\times0.7778}{1+0.7778}\cos\left(45° + \frac{19.6015°}{4}\right) = 105.000\ \text{mm} \tag{10-12}$$

7）计算针轮起始啮合位置弦长 s

$$s = \frac{C\mu}{(1+\mu)^2} = \frac{192\times0.7778}{(1+0.7778)^2} = 47.250\ \text{mm} \tag{10-13}$$

8）校核两轮转角比 σ。计算两轮转角比的实际值

$$\begin{aligned} \sigma_j &= \mu\left(1-\frac{n}{2}\right) + \frac{n(4+3\mu)}{\pi}\text{asin}\frac{\mu}{2(1+\mu)} \\ &= 0.7778\left(1-\frac{4}{2}\right) + \frac{4(4+3\times0.7778)}{\pi}\text{asin}\frac{0.7778}{2(1+0.7778)} = 1.000569 \approx 1 \end{aligned} \tag{10-14}$$

可见，两轮节圆半径比 μ 的微小变动对机构转角比的影响很小。

9）计算针轮锁止弧所对的中心角 γ

$$\begin{aligned} \gamma &= 2\left[\pi\left(1-\frac{\mu}{n}\right) - \theta_0 + \mu\beta_0\right] \\ &= 2\left[90°\left(1-\frac{0.7778}{4}\right) - 25.2713° + 0.7778\times19.6015°\right] = 269.949° \end{aligned} \tag{10-15}$$

10）计算星轮上齿槽中心线坐标 (x, y)。星轮上齿槽中心线是外摆线，其直角坐标方程式为

$$\left.\begin{aligned} x &= C\cos\theta - r_1\cos\left[\left(1+\frac{r_2}{r_1}\right)\theta\right] \\ y &= C\cos\theta - r_1\sin\left[\left(1+\frac{r_2}{r_1}\right)\theta\right] \end{aligned}\right\} \tag{10-16}$$

式中，θ 是针轮转角。

11）计算星轮上齿槽廓线（包络线）坐标 (x_k, y_k)

$$\left.\begin{aligned} x_k &= x \pm r_T\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta}{\sqrt{(\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta)^2 + (\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta)^2}} \\ y_k &= y \mp r_T\frac{\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta}{\sqrt{(\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta)^2 + (\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta)^2}} \end{aligned}\right\} \tag{10-17}$$

式中，上方的符号用于外包络线，下方的符号用于内包络线。

齿槽中心线坐标 (x, y) 对针轮转角 θ 的导数为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}&=C\sin\theta+C\sin\left[\left(1+\frac{r_2}{r_1}\right)\theta\right]\\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}&=C\cos\theta-C\cos\left[\left(1+\frac{r_2}{r_1}\right)\theta\right]\end{aligned}\right\}\tag{10-18}$$

星轮齿槽中线和齿槽廓线如图 10-8 所示。

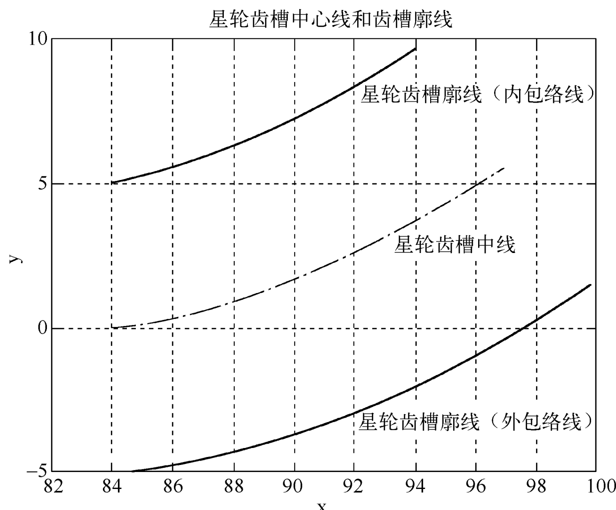


图 10-8　星轮齿槽中线和齿槽廓线

10.2.2　针轮机构的运动分析

1）计算星轮最大类角速度$(\omega_2/\omega_1)_{\max}$

$$\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)_{\max}=\frac{1}{\mu}=\frac{1}{0.7778}=1.2857\tag{10-19}$$

发生在针轮第 1 个针销处于两轮连心线 O_1O_2上，即 $\theta=0°$时。

2）计算星轮最大类角加速度$(\varepsilon_2/\omega_1^2)_{\max}$。星轮$(\varepsilon_2/\omega_1^2)_{\max}$发生的位置角

$$\begin{aligned}\theta_{\mathrm{m}}&=\arccos\left\{-\frac{\mu^2+2(1+\mu)}{4(1+\mu)}+\sqrt{\left[\frac{\mu^2+2(1+\mu)}{4(1+\mu)}\right]^2+2}\right\}\\&=\arccos\left\{-\frac{0.7778^2+2(1+0.7778)}{4(1+0.7778)}+\sqrt{\left[\frac{0.7778^2+2(1+0.7778)}{4(1+0.7778)}\right]^2+2}\right\}\\&=19.0226°\end{aligned}\tag{10-20}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\varepsilon_2}{\omega_1^2}\right)_{\max}&=\left|\frac{-2\mu(1+\mu)(2+\mu)\sin\theta_{\mathrm{m}}}{[(1+\mu)^2+1-2(1+\mu)\cos\theta_{\mathrm{m}}]^2}\right|\\&=\frac{2\times0.7778(1+0.7778)(2+0.7778)\sin19.0226°}{[(1+0.7778)^2+1-2(1+0.7778)\cos19.0226°]^2}\end{aligned}\tag{10-21}$$

验算星轮是否存在理论最大角加速度，由于

$$\mu^5-6\mu^3-4\mu^2=0.7778^5-6\times0.7778^3-4\times0.7778^2=-4.9582<0\tag{10-22}$$

所以星轮存在理论最大角加速度$(\varepsilon_2)_{\max}$。

如图 10-9 所示，当针轮转角 $\theta=0°$（即针轮第 1 个针销处于两轮连心线 O_1O_2上）时，

星轮最大类角速度$(\omega_2/\omega_1)_{max}=1.2857$；当针轮转角$\theta=\theta_0=25.2713°$时，星轮的类角加速度达到最大值$(\varepsilon_2/\omega_1^2)_{max}=3.9209$。

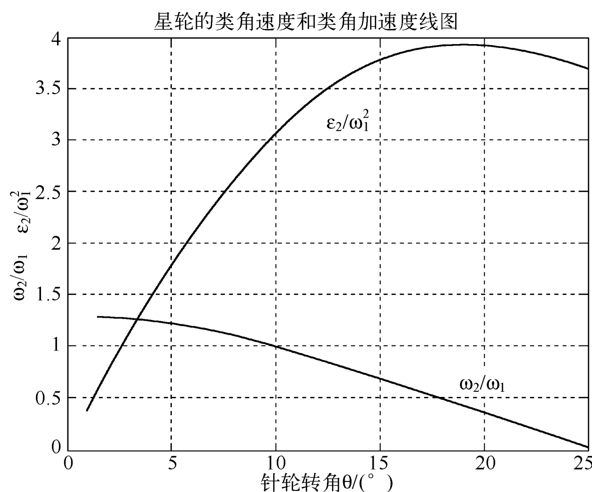


图 10-9　星轮的类角速度和类角加速度线图

10.2.3　M 文件和计算结果

```
%外针轮机构设计计算和运动分析
n=4;C=192;                              %一个工作循环中星轮停歇数,中心距
theta_d=pi/2;phi_d=pi/2;                %针轮动程角和星轮转位角
hd=pi/180;du=180/pi;                    %角度与弧度转换
rt=5; %针销半径
%1-设计计算
disp('        ########  已知条件  ########')
fprintf('        星轮停歇数              n=%3.0f \n',n)
fprintf('        针销半径                rt=%3.2f mm \n',rt)
fprintf('        中心距                  C=%3.2f mm \n',C)
fprintf('        针轮动程角          theta_d=%3.2f°\n',theta_d*du)
fprintf('        星轮转位角            phi_d=%3.2f°\n',phi_d*du)
sigma=theta_d/phi_d;                    %转角比
tau=sigma/n;
disp('        ********  计算结果  ********')
fprintf('        两轮转角比            sigma=%3.4f \n',sigma)
fprintf('        运动系数                tau=%3.4f \n',tau)
%计算两轮节圆半径比(求解超越方程)
x_mu0=1;                        %节圆半径比初值
x_mu=fzero('-x+4/pi*(4+3*x)*asin(x/(2*(1+x)))-1',x_mu0);
fprintf('        节圆半径比计算值      x_mu=%3.4f \n',x_mu)
[N,D]=rat(x_mu,1e-2);                   %将节圆半径比小数值化为分数
fprintf('        节圆半径比的分子          N=%3.0f \n',N)
fprintf('        节圆半径比的分母          D=%3.0f \n',D)
```

```
mu = N/D;
fprintf('          节圆半径比分数值           mu = %3.4f \n',mu)
%计算星轮加速段对应的针轮转角
mu1 = 1 + mu;mu2 = 2 + mu;                %中间变量
theta_0 = 2 * asin(mu/(2 * mu1));
fprintf('       星轮加速段对应针轮转角       theta_0 = %3.4f°\n',theta_0 * du)
%计算星轮齿槽外端中心位置角
phi_0 = 0.25 * pi - 1.5 * asin(mu/(2 * mu1));
fprintf('       星轮齿槽外端中心位置角         phi_0 = %3.4f°\n',phi_0 * du)
%计算星轮齿槽内端中心位置角
beta_0 = pi/2 - (2/mu + 3) * asin(mu/(2 * mu1));
fprintf('       星轮齿槽内端中心位置角       beta_0 = %3.4f°\n',beta_0 * du)
%计算针轮与星轮的节圆半径
r1 = C/mu1;r2 = C * mu/mu1;
fprintf('       针轮节圆半径                          r1 = %3.4f mm \n',r1)
fprintf('       星轮节圆半径                          r2 = %3.4f mm \n',r2)
%计算星轮齿槽外端中心 B 点半径
rho_0 = 2 * C * mu/mu1 * cos((pi + theta_0)/4);
fprintf('       星轮齿槽外端中心点半径         rho_0 = %3.4f mm \n',rho_0)
%计算针轮起始啮合位置弦长 BA
s = C * mu/mu1^2;
fprintf('       针轮起始啮合位置弦长                  s = %3.4f mm \n',s)
%校核两轮转角比
sigma_j = mu * (1 - n/2) + n/pi * (4 + 3 * mu) * asin(mu/(2 * mu1));
fprintf('       两轮转角比的实际值              sigma_j = %3.6f \n',sigma_j)
%计算针轮锁止弧所对中心角
gamma = 2 * (pi * (1 - mu/n) - theta_0 + mu * beta_0);
fprintf('       针轮锁止弧所对的中心角       gamma = %3.4f°\n',gamma * du)
%2 - 运动分析
%计算星轮最大类角速度
omega21_m = 1/mu;                        %发生在第 1 个针销处于两轮连心线上
%计算星轮最大类角加速度 epsilon2_m 及其发生处针轮的位置角
tm = (mu^2 + 2 * mu1)/(4 * mu1);  %中间变量
theta_m = acos(sqrt(tm^2 + 2) - tm);
epsilon2_m = abs( - 2 * mu * mu1 * mu2 * sin(theta_m)/(mu1^2 + 1 - 2 * mu1 * cos(theta_m))^2);
fprintf('            星轮最大类角速度              omega21_m = %3.4f \n',omega21_m)
fprintf('            星轮最大类角加速度           epsilon2_m = %3.4f \n',epsilon2_m)
fprintf('            发生处针轮的位置角                theta_m = %3.4f°\n',theta_m * du)
%判别星轮是否存在理论最大角加速度
mu_pbs = mu^5 - 6 * mu^3 - 4 * mu^2;           %epsilon2_m 存在判别式
fprintf('            星轮最大角加速度存在判别      mu_pbs = %3.4f \n',mu_pbs)
if mu_pbs < 0
      disp('                @@ 星轮存在理论最大角加速度 @@')
else
      disp('              @@ 星轮不存在理论最大角加速度 @@')
end
```

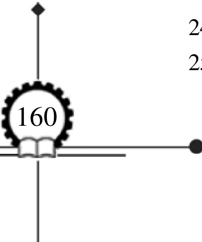
```
h = 1;                          % 运动参数矩阵 ydcs 的行数计数器
% 计算星轮的类角速度和类角加速度
for theta = 1:1:theta_0 * du
    omega21 = (2 * mu1 * cos(theta * hd) - 2)/(mu1^2 + 1 - 2 * mu1 * cos(theta * hd)) - 1/mu;
    epsilon21 = 2 * mu * mu1 * mu2 * sin(theta * hd)/(mu1^2 + 1 - 2 * mu1 * cos(theta * hd))^2;
    % 运动参数矩阵 ydcs(h,:)表示第 i 行的各列元素
    ydcs(h,:) = [theta omega21 epsilon21];
    h = h + 1;
end
disp'          针轮机构运动参数'
['针轮转角'  ','星轮类角速度'  ','类角加速度'  ]
% 运动参数矩阵 ydcs(:,j)表示第 j 列的各行元素
[ydcs(:,1),ydcs(:,2),ydcs(:,3)]
% 绘制针轮机构运动线图
figure(1)
plot(ydcs(:,2))                                    % 绘制星轮类角速度线图
grid
gtext('\omega_2/\omega_1' )                        % 标注星轮类角速度线图
hold on
plot(ydcs(:,3))                                    % 绘制星轮类角加速度线图
gtext('\epsilon_2/\omega_1^{2}' )                  % 标注星轮类角加速度线图
title('星轮的类角速度和类角加速度线图' )            % 标注图形标题
xlabel('针轮转角 \theta (°)')                      % 定义横坐标轴名称
ylabel('\omega_2/\omega_1       \epsilon_2/\omega_1^{2}' )
% 3 - 计算星轮齿槽中线坐标(x,y)和齿槽廓线坐标
q = 1;r21 = 1 + r2/r1;                             % r21 是中间变量
zbcs = zeros(25,7);                                % 创建 25 行 7 列的零矩阵
for theta = 1:1:theta_0 * du
    x = C * cos(theta * hd) - r1 * cos(r21 * theta * hd);
    dx = - C * sin(theta * hd) + C * sin(r21 * theta * hd);
    y = C * sin(theta * hd) - r1 * sin(r21 * theta * hd);
    dy = C * cos(theta * hd) - C * cos(r21 * theta * hd);
    xw = x + rt * (dy/sqrt(dx^2 + dy^2));yw = y - rt * (dx/sqrt(dx^2 + dy^2));   % 外包络线
    xn = x - rt * (dy/sqrt(dx^2 + dy^2));yn = y + rt * (dx/sqrt(dx^2 + dy^2));   % 内包络线
    % 运动参数矩阵 zbcs(h,:)表示第 i 行的各列元素
    zbcs(q,:) = [theta x y xw yw xn yn];
    q = q + 1;                                     % q 是矩阵 zbcs 的行数计数器
end
disp'          星轮齿槽中线坐标和齿槽廓线坐标'
['针轮转角'  ',齿槽中线 - x' ',齿槽中线 - y' ',外包络 - xw' ',外包络 - yw' ',   内包络 - xn' ',内包络
 - yn' ]
% 运动参数矩阵 zbcs(:,j)表示第 j 列的各行元素
[zbcs(:,1),zbcs(:,2),zbcs(:,3),zbcs(:,4),zbcs(:,5),zbcs(:,6),zbcs(:,7)]
% 绘制星轮齿槽中线和齿槽廓线
figure(2)
plot(zbcs(:,2),zbcs(:,3)','r-.' )
```

```
grid
hold on
plot(zbcs(:,4),zbcs(:,5)','b')
plot(zbcs(:,6),zbcs(:,7)','b')
title('星轮齿槽中线和齿槽廓线')
gtext('星轮齿槽中线')
gtext('星轮齿槽廓线(内包络线)');gtext('星轮齿槽廓线(外包络线)');
xlabel('x');ylabel('y')
```

计算结果：

```
########已知条件  ########
星轮停歇数                          n =    4
中心距                              C = 192.00 mm
针销半径                           rt = 5.00 mm
针轮动程角                     theta_d = 90.00°
星轮转位角                       phi_d = 90.00°
         ********   计算结果   ********
两轮转角比                       sigma = 1.0000
运动系数                           tau = 0.2500
节圆半径比计算值                  x_mu = 0.7773
节圆半径比的分子                     N = 7
节圆半径比的分母                     D = 9
节圆半径比分数值                    mu = 0.7778
星轮加速段对应针轮转角         theta_0 = 25.2713°
星轮齿槽外端中心位置角           phi_0 = 26.0466°
星轮齿槽内端中心位置角          beta_0 = 19.6015°
针轮节圆半径                        r1 = 108.0000 mm
星轮节圆半径                        r2 = 84.0000 mm
星轮齿槽外端中心点半径           rho_0 = 105.0000 mm
针轮起始啮合位置弦长                 s = 47.2500 mm
两轮转角比的实际值             sigma_j = 1.000569
针轮锁止弧所对的中心角           gamma = 269.9487°
星轮最大类角速度            omega21_m = 1.2857
星轮最大类角加速度          epsilon2_m = 3.9209
发生处针轮的位置角             theta_m = 19.0226°
星轮最大角加速度存在判别        mu_pbs = -4.9582
          @@ 星轮存在理论最大角加速度 @@

        针轮机构运动参数
针轮转角  星轮类角速度  类角加速度
 1.0000      1.2825       0.3657
 2.0000      1.2730       0.7274
 3.0000      1.2572       1.0811
   …
23.0000      0.1484       3.8099
24.0000      0.0824       3.7538
25.0000      0.0174       3.6893
```



星轮齿槽中线坐标和齿槽廓线坐标

针轮转角	齿槽中线 – x	齿槽中线 – y	外包络 – xw	外包络 – yw	内包络 – xn	内包络 – yn
1. 0000	84. 0227	0. 0004	84. 1439	– 4. 9982	83. 9015	4. 9989
2. 0000	84. 0909	0. 0029	84. 3332	– 4. 9912	83. 8486	4. 9971
3. 0000	84. 2044	0. 0099	84. 5677	– 4. 9769	83. 8411	4. 9967
…						
23. 0000	95. 0910	4. 3242	97. 7365	0. 0814	92. 4456	8. 5670
24. 0000	95. 9874	4. 8984	98. 7349	0. 7209	93. 2398	9. 0758
25. 0000	96. 9067	5. 5192	99. 7547	1. 4096	94. 0587	9. 628

10. 3　面粉搅拌机工作头旋轮轨迹分析和仿真

为了实现面粉搅拌机的工作头所需要的运动轨迹，采用了结构简单的内外啮合圆锥齿轮行星机构引导，以获得精确综合的空间对称旋轮曲线。该实例中使用 MATLAB 对机构工作头旋轮轨迹进行了运动分析和运动模拟。

例 10–5　某面粉搅拌机的设计要求是：采用某公司自产 W76 或 W88 系列微特电动机（使用电压 120/230 V，标称功率 450 ~ 550 W），设计一种合成机械运动，模仿人们手工搓揉面粉的方法，并且达到与其相同的效果。要求搅拌的最大质量是面粉 2000 g 与水 1333 ml 的混合物。为了节省产品的成本，要求搅拌机机械传动系统的结构尽可能简单，并且运动参数符合设计要求。

10. 3. 1　搅拌机的传动系统

面粉搅拌机的动力源采用串激式微特电动机，通过机械传动将动力和运动传递到搅拌杆，完成均匀、平稳的搅拌功能。

该面粉搅拌机可以采用的传动系统方案是：微特电动机通过同步齿形带传动和两级圆柱齿轮传动（总减速比是 $\frac{d_2 Z_2 Z_5}{d_1 Z_1 Z_3} = \frac{37 \times 36 \times 50}{12 \times 10 \times 14} = 39.64$）后，带动外内啮合圆锥齿轮行星机构（由圆锥齿轮 6、7、8 和行星架 H 组成），搅拌机传动系统如图 10–10 所示。

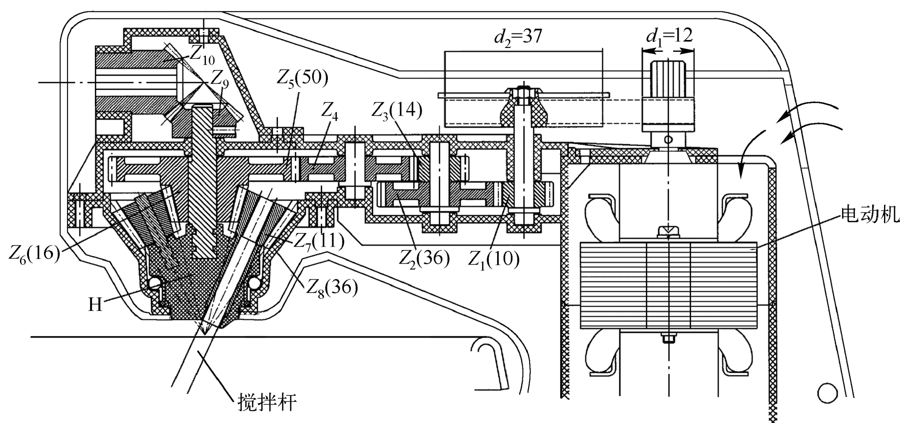


图 10–10　搅拌机传动系统

10.3.2 内外啮合圆锥齿轮行星传动的运动分析

1. 搅拌杆空间对称旋轮轨迹的实现

在圆锥齿轮行星轮系中，圆锥行星轮 7 的轴线与中心圆锥齿轮 6 夹一个锐角（大小等于它们的轴交角），圆锥行星轮 7 公转时轴线在空间的轨迹是一个圆锥角为轴交角的正圆锥面。行星轮在自转时带动与其固定联接的搅拌杆一起绕其动轴线转动。因此，采用结构简单的圆锥齿轮行星轮系引导，可以使搅拌杆在容器中实现精确综合的空间对称运动轨迹。

与行星轮同步转动的搅拌杆臂上的某一动点 A 轨迹是旋轮线，从圆锥齿轮 7 与 8 的啮合展开平面（图 10-11）可知其参数方程

$$\begin{cases} x = (r_7 + r_8)\cos\theta + l\cos\left(\dfrac{r_7 + r_8}{r_7}\theta\right) \\ x = (r_7 + r_8)\sin\theta + l\sin\left(\dfrac{r_7 + r_8}{r_7}\theta\right) \end{cases} \tag{10-23}$$

式中，r_7和 r_8分别是行星轮 7 和中心内圆锥齿轮 8 的分度圆半径；l 是动点 A 到行星轮轴心 M 的距离；θ 是行星轮 7 绕中心内圆锥齿轮 8 公转的角位移。

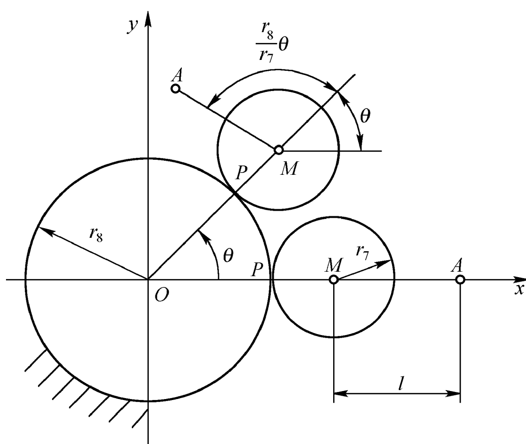


图 10-11 行星传动运动分析

采用 MATLAB 模拟二维旋轮线（见图 10-13）和三维旋轮线（见图 10-14）。由于该行星传动中行星轮 7 与中心内圆锥齿轮齿数比是 $z_8/z_7 = 36/11 = 3.27$，因此在行星轮公转将近一周过程中，行星轮 7 自转带动固定连接的搅拌杆臂上的动点 A 形成三瓣旋轮线。

考虑到行星轮 7 与中心轮 8 的轴交角 $\delta_7 + \delta_8 = 65.25°$，因此搅拌杆臂上的动点实际形成空间旋轮线，实现容器内整体均匀的搅拌功能。

2. 行星轮自转和公转运动分析

圆锥齿轮行星轮系运动简图如图 10-12a 所示。根据相对运动的合成原理，列出中心轮 6、行星轮 7 与行星架 H 的角速度矢量关系式

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_7 &= \boldsymbol{\omega}_6 + \boldsymbol{\omega}_{76} \\ \boldsymbol{\omega}_7 &= \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{H}} + \boldsymbol{\omega}_{7\mathrm{H}} \end{aligned}\right\} \tag{10-24}$$

因此

$$\boldsymbol{\omega}_6 + \boldsymbol{\omega}_{76} = \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{H}} + \boldsymbol{\omega}_{7\mathrm{H}} = \boldsymbol{\omega}_7 \tag{10-25}$$

式中，$\boldsymbol{\omega}_6$是中心轮 6 的角速度；$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{H}}$是行星架 H 的角速度；$\boldsymbol{\omega}_{76}$是行星轮 7 相对于中心轮 6 的角速度；$\boldsymbol{\omega}_{7\mathrm{H}}$是行星轮 7 相对于行星架 H 的角速度。

由矢量图解法得到如图 10-12b 所示的角速度矢量图。根据 $\boldsymbol{\omega}_6$、$\boldsymbol{\omega}_7$和 $\boldsymbol{\omega}_{76}$组成角速度矢量三角形，得到行星轮绝对角速度

$$\boldsymbol{\omega}_7 = \frac{\boldsymbol{\omega}_6 \sin\delta_6}{\sin(2\delta_7)} \tag{10-26}$$

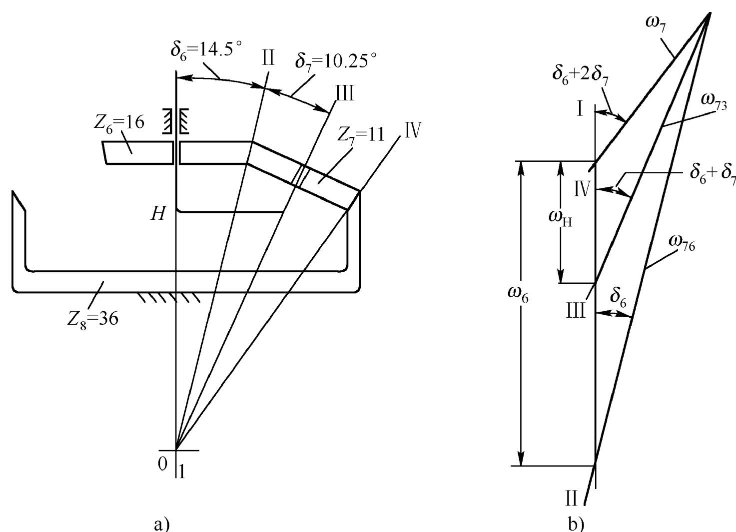


图 10-12　圆锥齿轮行星传动的角速度矢量

根据 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{H}}$、$\boldsymbol{\omega}_7$ 和 $\boldsymbol{\omega}_{7\mathrm{H}}$ 组成角速度矢量三角形，得到行星架绝对角速度（即行星轮公转角速度）

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{H}}=\frac{\boldsymbol{\omega}_7\sin\delta_7}{\sin(\delta_6+\delta_7)}=\frac{\boldsymbol{\omega}_6\sin\delta_6\sin\delta_7}{\sin(2\delta_7)\sin(\delta_6+\delta_7)} \tag{10-27}$$

同理，行星轮 7 相对于行星架 H 角速度，即行星轮自转角速度

$$\boldsymbol{\omega}_{7\mathrm{H}}=\frac{\boldsymbol{\omega}_7\sin(\delta_6+2\delta_7)}{\sin(\delta_6+\delta_7)}=\frac{\boldsymbol{\omega}_6\sin\delta_6\sin(\delta_6+2\delta_7)}{\sin(2\delta_7)\sin(\delta_6+\delta_7)} \tag{10-28}$$

10.3.3　行星机构运动模拟分析的 M 文件和运算结果

1）M 文件中采用 plot 和 plot3 函数分别绘制二维和三维点线图。

```
%1 - 锥齿轮行星机构运动分析
i = 37/12 * 36/10 * 50/14;                          % 前置圆柱轮系传动比
hd = pi/180; d6 = 14.5 * hd; d7 = 10.25 * hd;        % 锥齿轮节锥角
n1 = [7755 11221 16021];                             % 电动机转速(第 1、5、10 档)
for j = 1:3
    n6 = n1(1:j)/i;                                  % 中心锥齿轮 6 的绝对转速
    n7 = n6 * sin(d6)/sin(2 * d7);                   % 行星锥齿轮 7 的绝对转速
    nh = n7 * sin(d7)/sin(d6 + d7);                  % 行星锥齿轮 7 的公转速度
    n7h = n7 * sin(d6 + 2 * d7)/sin(d6 + d7);        % 行星锥齿轮 7 的自转速度
end
disp('        ========  已知条件  ========')
fprintf('           前置圆柱轮系传动比     i = %3.3f \n',i);
fprintf('                 锥齿轮节锥角     d7 = %3.3f° \n',d7/hd);
disp('          ========   输出计算结果   ========')
for j = 1:3
    fprintf('                 电动机转速     n1 = %3.0f r/min \n',n1(j));
    fprintf('             中心锥齿轮转速     n6 = %3.3f r/min \n',n6(j));
```

```
    fprintf('        行星锥齿轮转速      n7 = %3.3f r/min \n',n7(j));
  fprintf('      行星锥齿轮公转转速     nh = %3.3f r/min \n',nh(j));
    fprintf('    行星锥齿轮自转转速    n7h = %3.3f r/min \n',n7h(j));
    disp('')
end
```

计算结果：

```
          ========  已知条件  ========
前置圆柱轮系传动比              i = 39.643
      锥齿轮节锥角            d7 = 10.250°
      ========   输出计算结果    ========
        电动机转速            n1 = 7755 r/min
    中心锥齿轮转速            n6 = 195.622 r/min
    行星锥齿轮转速            n7 = 139.859 r/min
行星锥齿轮公转转速            nh = 59.445 r/min
行星锥齿轮自转转速           n7h = 191.611 r/min
        电动机转速            n1 = 11221 r/min
    中心锥齿轮转速            n6 = 283.052 r/min
    行星锥齿轮转速            n7 = 202.368 r/min
行星锥齿轮公转转速            nh = 86.013 r/min
行星锥齿轮自转转速           n7h = 277.250 r/min
        电动机转速            n1 = 16021 r/min
    中心锥齿轮转速            n6 = 404.133 r/min
    行星锥齿轮转速            n7 = 288.934 r/min
行星锥齿轮公转转速            nh = 122.806 r/min
行星锥齿轮自转转速           n7h = 395.849 r/min
```

表 10-2　搅拌杆公转转速和自转转速计算结果　　（单位：r/min）

挡　　位	电动机转速	搅拌杆公转转速	搅拌杆自转转速
1	7755	59.445	191.611
5	11221	86.013	277.250
10	16012	122.806	396.849

结论：检测结果表明，在每次 10 min、连续 6 次的运动周期的运转中，公司自产的 W88 电动机定子线圈的温度不超过 80℃，能够正常工作。除了开始工作时有少量面粉洒出搅拌机容器之外，整个工作过程搅拌效果均匀良好。

```
%2 - 搅拌杆旋轮线轨迹模拟
%圆锥齿轮传动参数
m = 2;z7 = 11;z8 = 36;
dt7 = 10.5;dt8 = 35;
bt = 65.25;                          %行星轮轴线与 XOY 平面夹角
%搅拌杆外点旋转半径
l = 65;
hd = pi/180;
%圆锥齿轮几何尺寸
```

```
r7 = 0.5 * m * z7;
% r7v = r7/cos(dt7 * hd);
r8 = 0.5 * m * z8;
% r8v = r8/cos(dt8 * hd);
k1 = r7 + r8;
k2 = (r7 + r8)/r7;
% (1)二维旋轮线参数计算
for i = 1:1:360
    x = k1 * cos(i * hd) + l * cos(k2 * i * hd);
    y = k1 * sin(i * hd) + l * sin(k2 * i * hd);
    xl1(i,:) = [i x y];
end
for i = 1:1:720
    x = k1 * cos(i * hd) + l * cos(k2 * i * hd);
    y = k1 * sin(i * hd) + l * sin(k2 * i * hd);
    xl2(i,:) = [i x y];
end
for i = 1:1:1080
    x = k1 * cos(i * hd) + l * cos(k2 * i * hd);
    y = k1 * sin(i * hd) + l * sin(k2 * i * hd);
    xl3(i,:) = [i x y];
end
for i = 1:1:1440
    x = k1 * cos(i * hd) + l * cos(k2 * i * hd);
    y = k1 * sin(i * hd) + l * sin(k2 * i * hd);
    xl4(i,:) = [i x y];
end
% 绘制二维旋轮线
figure(1);                                % 生成第 1 个图形窗口
subplot(2,2,1);                           % 选择第 1 个子窗口
plot(xl1(:,2),xl1(:,3))
grid                                      % 绘制网格线
title('\bf 二维旋轮线(\theta = 360°)')
subplot(2,2,2);                           % 选择第 2 个子窗口
plot(xl2(:,2),xl2(:,3))
grid                                      % 绘制网格线
title('\bf 二维旋轮线(\theta = 720°)')
subplot(2,2,3);                           % 选择第 3 个子窗口
plot(xl3(:,2),xl3(:,3))
grid                                      % 绘制网格线
title('\bf 二维旋轮线(\theta = 1080°)')
subplot(2,2,4);                           % 选择第 4 个子窗口
plot(xl4(:,2),xl4(:,3))
grid                                      % 绘制网格线
title('\bf 二维旋轮线(\theta = 1440°)')
```

绘制的二维旋轮线如图 10-13 所示。

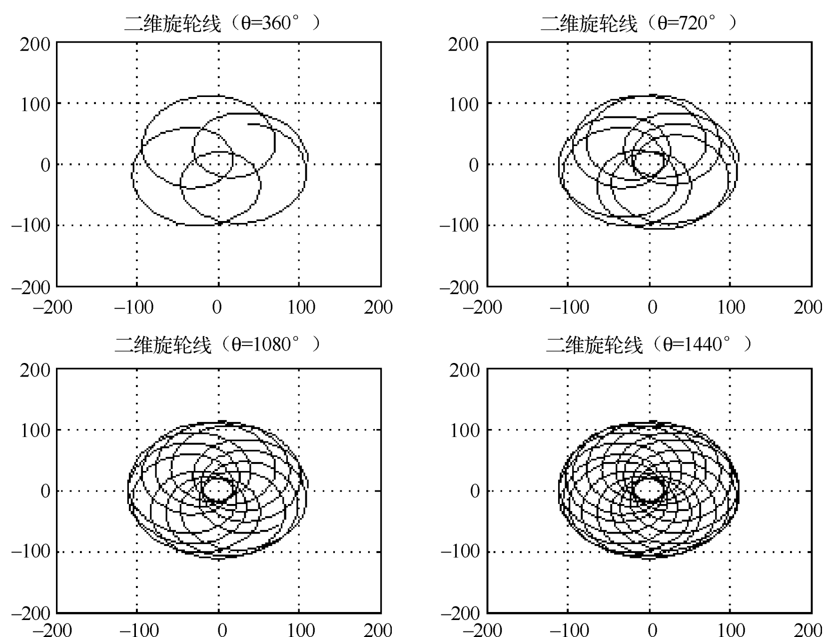


图 10-13　二维旋轮线

2）三维旋轮线参数计算：

```
for i = 1:1:360
    x = (k1 * cos(i * hd) + l * cos(k2 * i * hd)) * cos(bt * hd);
    y = (k1 * sin(i * hd) + l * sin(k2 * i * hd)) * cos(bt * hd);
    z = sqrt(x^2 + y^2) * tan(bt * hd);
    xlx1(i,:) = [i x y z];
end
for i = 1:1:720
    x = (k1 * cos(i * hd) + l * cos(k2 * i * hd)) * cos(bt * hd);
    y = (k1 * sin(i * hd) + l * sin(k2 * i * hd)) * cos(bt * hd);
    z = sqrt(x^2 + y^2) * tan(bt * hd);
    xlx2(i,:) = [i x y z];
end
for i = 1:1:1080
    x = (k1 * cos(i * hd) + l * cos(k2 * i * hd)) * cos(bt * hd);
    y = (k1 * sin(i * hd) + l * sin(k2 * i * hd)) * cos(bt * hd);
    z = sqrt(x^2 + y^2) * tan(bt * hd);
    xlx3(i,:) = [i x y z];
end
for i = 1:1:1440
    x = (k1 * cos(i * hd) + l * cos(k2 * i * hd)) * cos(bt * hd);
    y = (k1 * sin(i * hd) + l * sin(k2 * i * hd)) * cos(bt * hd);
    z = sqrt(x^2 + y^2) * tan(bt * hd);
    xlx4(i,:) = [i x y z];
end
```

```
%矩阵 cs(:,j)表示第 j 列的各行元素
%绘制三维旋轮线
figure(2);                    %生成第 2 个图形窗口
subplot(2,2,1);               %选择第 1 个子窗口
plot3(xlx1(:,2),xlx1(:,3),xlx1(:,4))
grid
title('\bf 三维旋轮线(\theta =360°)')
subplot(2,2,2);               %选择第 2 个子窗口
plot3(xlx2(:,2),xlx2(:,3),xlx2(:,4))
grid
title('\bf 三维旋轮线(\theta =720°)')
subplot(2,2,3);               %选择第 3 个子窗口
plot3(xlx3(:,2),xlx3(:,3),xlx3(:,4))
grid
title('\bf 三维旋轮线(\theta =1080°)')
subplot(2,2,4);               %选择第 4 个子窗口
plot3(xlx4(:,2),xlx4(:,3),xlx4(:,4))
grid
title('\bf 三维旋轮线(\theta =1440°)')
%输出数据
disp''
disp'          ==========  圆锥齿轮传动参数  =========='   ;
fprintf('              行星轮齿数        z7 =%3.0f \n',z7);
fprintf('              分度圆半径        r7 =%3.3f mm \n',r7);
fprintf('              分度圆锥角       dt7 =%3.3f° \n',dt7);
fprintf('              中心轮齿数        z8 =%3.0f \n',z8);
fprintf('              分度圆半径        r8 =%3.3f mm \n',r8);
fprintf('              分度圆锥角       dt8 =%3.3f° \n',dt8);
fprintf('中心轮与行星轮当量半径之比        rb =%3.0f \n',r8/r7);
disp''
['行星轮公转''  ','动点 x 坐标''  ','动点 y 坐标''  ','动点 z 坐标'' ']
[xlx1(:,1),xlx1(:,2),xlx1(:,3),xlx1(:,4)]
```

运算结果:

```
          ==========  圆锥齿轮传动参数  ==========
              行星轮齿数                z7 =11
              分度圆半径                r7 =11.000 mm
              分度圆锥角               dt7 =10.500°
              中心轮齿数                z8 =36
              分度圆半径                r8 =36.000 mm
              分度圆锥角               dt8 =35.000°
   中心轮与行星轮当量半径之比             rb =3
```

行星轮公转	动点 x 坐标	动点 y 坐标	动点 z 坐标
1. 0000	46. 8113	2. 3709	101. 6716
2. 0000	46. 5758	4. 7304	101. 5504
3. 0000	46. 1848	7. 0672	101. 3486
…			
100. 0000	7. 0967	44. 4780	97. 7006
101. 0000	4. 8597	45. 1289	98. 4582
102. 0000	2. 5761	45. 6305	99. 1379
…			
200. 0000	−37. 5795	12. 6645	86. 0208
201. 0000	−38. 8511	10. 8667	87. 5091
202. 0000	−40. 0033	8. 9715	88. 9294
…			
358. 0000	19. 8377	26. 5256	71. 8497
359. 0000	17. 8188	26. 8062	69. 8216
360. 0000	15. 8042	26. 9359	67. 7432

绘制的三维旋轮线如图 10−14 所示。

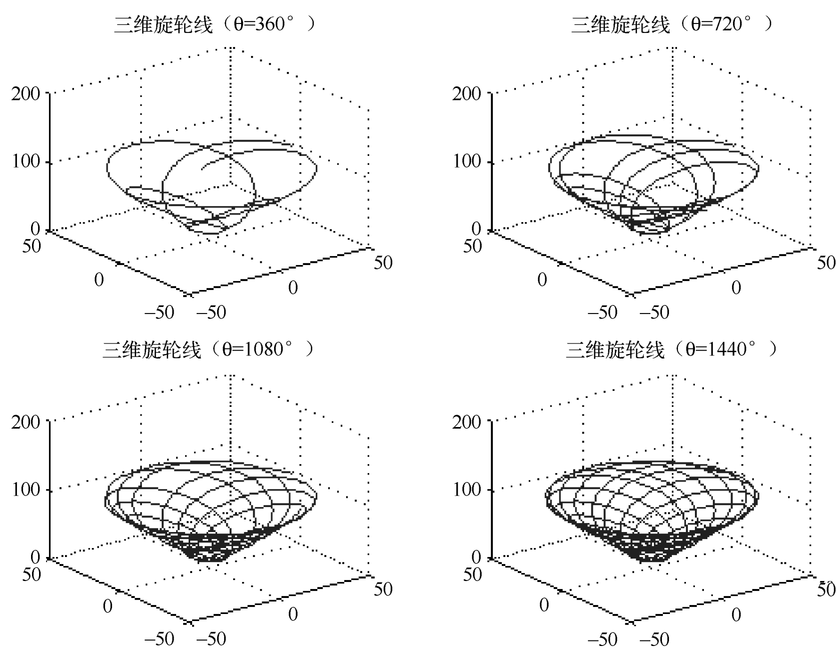


图 10−14　三维旋轮线

第 11 章　凸轮机构运动分析和设计计算

凸轮机构（cam mechanism）是由凸轮，从动件和机架三个基本构件组成的高副机构。凸轮是一个具有曲线轮廓或凹槽的构件，一般为主动件，作等速回转运动或往复直线运动，由凸轮的回转运动或往复运动推动从动件作规定往复移动或摆动。凸轮具有曲线轮廓或凹槽，有盘形凸轮、圆柱凸轮和移动凸轮等，其中圆柱凸轮的凹槽曲线是空间曲线，因而属于空间凸轮。从动件与凸轮作点接触或线接触，有滚子从动件、平底从动件和尖端从动件等。尖端从动件能与任意复杂的凸轮轮廓保持接触，可实现任意运动，但尖端容易磨损，适用于传力较小的低速机构。为了使从动件与凸轮始终保持接触，可采用弹簧或施加重力，或使用具有凹槽的凸轮。凸轮机构结构紧凑，工作可靠，在自动机床、内燃机、印刷机和纺织机中得到广泛应用。但凸轮机构易磨损，有噪声，高速凸轮的设计比较复杂，制造要求较高。

11.1　对心直动凸轮机构压力角的计算

凸轮机构的压力角，是指在不考虑摩擦力的情况下，凸轮对从动件作用力的方向与从动件上力作用点的速度方向之间所夹的锐角，用 α 表示，如图 11-1 所示。压力角的大小，反映了机构传力性能的好坏，是机构设计的重要参数。由于凸轮机构在工作过程中，从动件与凸轮轮廓的接触点是变化的，各接触点处的公法线方向不同，使得凸轮对从动件的作用力的方向也不同。因此，凸轮轮廓上各点处的压力角是不同的。为使凸轮机构工作可靠，受力情况良好，必须对压力角加以限制。在设计凸轮机构时，应使最大压力角 α_{max} 不超过许用值 $[\alpha]$。用图解法或解析法设计出凸轮轮廓后，为了确保运动和传力性能，通常需对推程的轮廓各处压力角进行校核，检验其最大压力角是否在许用范围内。

凸轮机构受力分析如图 11-2 所示。从凸轮机构的速度三角形可知，$\tan\alpha = \dfrac{v_2}{\omega(r_b + s)}$。当运动规律确定后，式中的 v_2、s、ω 均为定值，基圆半径 r_b 越小，压力角 α 越大。基圆半径过小，会使压力角超过许用值，从而使机构传力性能变差，甚至发生自锁。

综上所述，从改善凸轮机构的受力情况，提高效率，避免自锁的观点来看，压力角越小越好。但是从机构结构紧凑方面考虑，压力角较大为好。为了协调上述两个方面的矛盾，设计时通常要求凸轮轮廓上的最大压力角 α_{max} 在不超过许用值 $[\alpha]$ 的条件下，尽量采用较小的基圆半径。

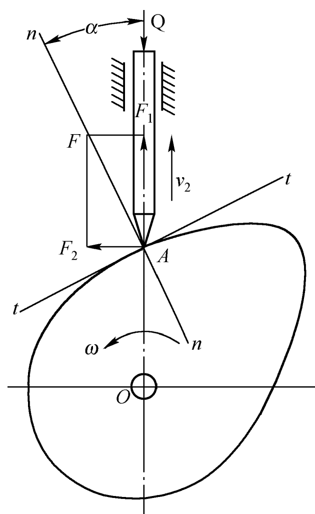


图 11-1　凸轮机构的压力角

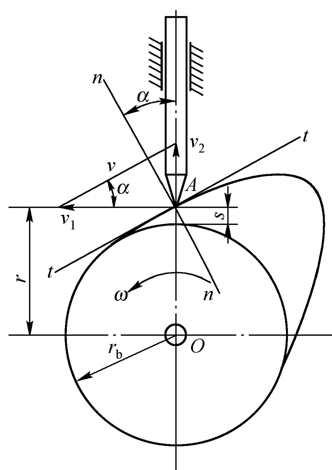


图 11-2　凸轮机构受力分析

11.1.1　凸轮机构压力角的图解

对心直动凸轮机构某处的压力角，就是凸轮轮廓该处上法线与径向线所夹的锐角。用图解法检验凸轮廓线压力角时，受到 α_{max} 在廓线上位置判定误差、作出廓线该位置的法线误差（特别是在某段曲线端点处很难准确作出法线）和用量角器测量 α_{max} 的值的误差等多个因素的影响，一般会产生较大的检验误差。

如图 11-3 所示的诺模图，给出了几种基本运动规律许用压力角和基圆半径的关系，可以用于确定凸轮的基圆半径，或校核凸轮机构的最大压力角。

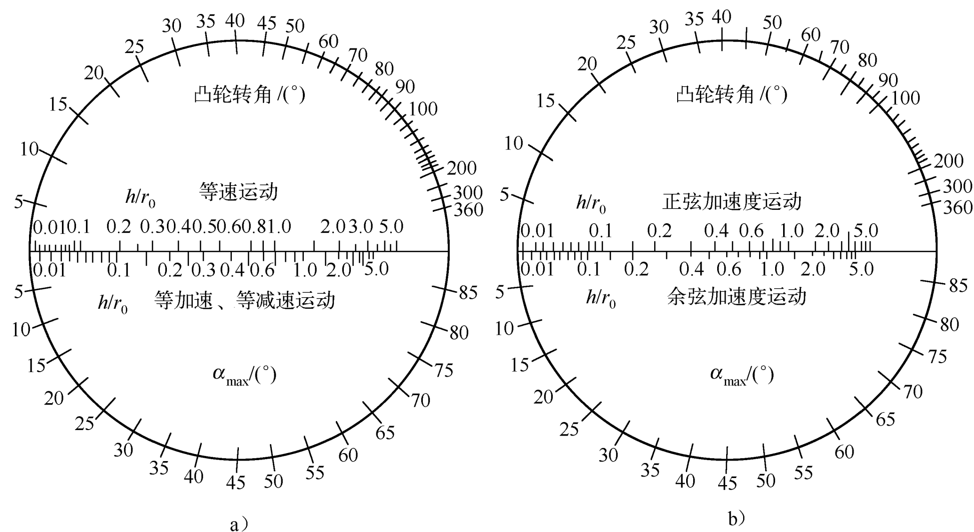


图 11-3　诺模图

以上图解校核凸轮机构压力角是近似方法，存在一定的误差。

11.1.2　凸轮机构压力角的计算

通过对几种基本运动规律位移方程及其导函数分析与计算，得到凸轮廓线 α_{max} 的值及其在凸轮廓线上的位置角 φ_m 的计算公式，见表 11–1。

表 11–1　凸轮廓线 α_{max} 的值及其在凸轮廓线上的位置角 φ_m

序号	从动件运动规律		α_{max} 在凸轮廓线的位置 φ_m	α_{max} 计算公式
1	等速		$\varphi_m = 0°$	$\alpha_{max} = \arctan \dfrac{k}{\Phi}$
2	等加速、等减速	$k \leqslant 2$	$\varphi_m = \dfrac{\Phi}{2}$	$\alpha_{max} = \arctan \dfrac{4k}{\Phi(2+k)}$
		$k > 2$	$\varphi_m = \dfrac{\Phi}{\sqrt{2k}}$	$\alpha_{max} = \arctan \dfrac{\sqrt{2k}}{\Phi}$
3	余弦加速度		$\varphi_m = \dfrac{\Phi}{\pi} \arccos \dfrac{k}{1+k}$	$\alpha_{max} = \arctan \dfrac{k\pi}{2\Phi \sqrt{1+k}}$
4	正弦加速度		$\varphi_m = \dfrac{\Phi}{\pi} \mathrm{arcinv} \dfrac{\pi}{k}$	$\alpha_{max} = \arctan \dfrac{k\left(1 - \mathrm{os}\dfrac{2\pi\varphi_m}{\Phi}\right)}{\Phi + k\varphi_m - \dfrac{k\Phi}{2\pi}\sin\dfrac{2\pi\varphi_m}{\Phi}}$

注：表中只讨论推程，φ_m 从凸轮推程廓线基圆起始位置反转计算；系数 $k = h/r_b$，是从动件升程 h 与凸轮基圆半径 r_b 的比值。正弦加速度中 arcinv 表示反渐开线函数，即 $\dfrac{\pi}{k} = \tan\left(\dfrac{\pi}{\Phi}\varphi_m\right) - \left(\dfrac{\pi}{\Phi}\varphi_m\right)$。

对于正弦加速度运动规律，根据给定的 (π/k)，使用 MATLAB 函数 fsolve 求解渐开线方程 $\dfrac{\pi}{k} = \tan\left(\dfrac{\pi}{\Phi}\varphi_m\right) - \left(\dfrac{\pi}{\Phi}\varphi_m\right)$，即可以得到机构最大压力角 α_{max} 在凸轮廓线的位置 φ_m。

采用表 11–1 中所列的公式，可以很方便地准确计算出对心直动凸轮轮廓最大压力角 α_{max} 的值，及其在凸轮轮廓上的位置角 φ_m，并有助于凸轮机构的计算机辅助设计。

从动件基本运动规律的位移方程及其一阶和二阶导数见表 11–2。

表 11–2　从动件基本运动规律的位移方程及其一阶和二阶导数

序号	运 动 规 律	推程（$\varphi = 0 \sim \Phi$）	回程（$\varphi = 0 \sim \Phi'$）
1	等速运动	$s = \dfrac{h}{\Phi}\varphi$ $\dfrac{ds}{d\varphi} = \dfrac{h}{\Phi}$ $\dfrac{d^2 s}{d\varphi^2} = 0$	$s' = h - \dfrac{h}{\Phi'}\varphi$ $\dfrac{ds'}{d\varphi} = -\dfrac{h}{\Phi'}$ $\dfrac{d^2 s'}{d\varphi^2} = 0$
2	等加速运动 （推程：$\varphi = 0 \sim \Phi/2$） （回程：$\varphi = \Phi'/2$）	$s = \dfrac{2h}{\Phi^2}\varphi^2$ $\dfrac{ds}{d\varphi} = \dfrac{4h\varphi}{\Phi^2}$ $\dfrac{d^2 s}{d\varphi^2} = \dfrac{4h}{\Phi^2}$	$s' = h - \dfrac{2h}{\Phi'^2}\varphi^2$ $\dfrac{ds'}{d\varphi} = -\dfrac{4h\varphi}{\Phi'^2}$ $\dfrac{d^2 s'}{d\varphi^2} = -\dfrac{4h}{\Phi'^2}$
	等减速运动 （推程：$\varphi = \Phi/2 \sim \Phi$） （回程：$\varphi = \Phi'/2 \sim \Phi'$）	$s = h - \dfrac{2h}{\Phi^2}(\Phi - \varphi)^2$ $\dfrac{ds}{d\varphi} = \dfrac{4h(\Phi - \varphi)}{\Phi^2}$ $\dfrac{d^2 s}{d\varphi^2} = -\dfrac{4h}{\Phi^2}$	$s' = \dfrac{2h}{\Phi'^2}(\Phi' - \varphi)^2$ $\dfrac{ds'}{d\varphi} = -\dfrac{4h(\Phi' - \varphi)}{\Phi'^2}$ $\dfrac{d^2 s'}{d\varphi^2} = \dfrac{4h}{'\Phi^2}$

（续）

序号	运动规律	推程（$\varphi=0\sim\Phi$）	回程（$\varphi=0\sim\Phi'$）
3	余弦加速度	$s=\frac{h}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{\Phi}\varphi\right)$ $\frac{ds}{d\varphi}=\frac{\pi h}{2\Phi}\sin\frac{\pi}{\Phi}\varphi$ $\frac{d^2s}{d\varphi^2}=\frac{\pi^2h}{2\Phi^2}\cos\frac{\pi}{\Phi}\varphi$	$s'=\frac{h}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{\Phi'}\varphi\right)$ $\frac{ds'}{d\varphi}=-\frac{\pi h}{2\Phi'}\sin\frac{\pi}{\Phi'}\varphi$ $\frac{d^2s'}{d\varphi^2}=-\frac{\pi^2h}{2\Phi'^2}\cos\frac{\pi}{\Phi'}\varphi$
4	正弦加速度	$s=h\left(\frac{\varphi}{\Phi}-\frac{1}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{\Phi}\varphi\right)$ $\frac{ds}{d\varphi}=\frac{h}{\Phi}\left(1-\cos\frac{2\pi}{\Phi}\varphi\right)$ $\frac{d^2s}{d\varphi^2}=\frac{2\pi h}{\Phi^2}\sin\frac{2\pi}{\Phi}\varphi$	$s'=h\left(1-\frac{\varphi}{\Phi'}+\frac{1}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{\Phi'}\varphi\right)$ $\frac{ds'}{d\varphi}=-\frac{h}{\Phi'}\left(1-\cos\frac{2\pi}{\Phi'}\varphi\right)$ $\frac{d^2s'}{d\varphi^2}=\frac{2\pi h}{\Phi'^2}\sin\frac{2\pi}{\Phi'}\varphi$

注：1. 回程与推程位移的关系是：$s'=h-s$。计算回程位移 s'、一阶导数 $ds'/d\varphi$ 和二阶导数 $d^2s'/d\varphi^2$ 时，公式中凸轮转角取值范围是 $\varphi=0\sim\Phi'$。

2. 计算凸轮回程理论轮廓坐标 x'，y' 和它们的一阶导数 $dx'/d\varphi$，$dy'/d\varphi$ 公式中的 $\sin\varphi$，$\cos\varphi$，凸轮转角取值范围是 $\varphi=(\Phi+\Phi_s)\sim(\Phi+\Phi_s+\Phi')$。

3. 表 11-1 和表 11-2 中的 Φ 表示推程运动角，Φ' 表示回程运动角，Φ_s 表示休止角。

11.1.3 计算实例 M 文件和运算结果

例 11-1 设计一个对心移动滚子从动件盘形凸轮机构。要求当凸轮转过推程运动角 $\Phi=45°$ 时，从动件以简谐运动规律（余弦加速度）上升 $h=14$ mm；限定凸轮机构的最大压力角为 $\alpha_{max}=30°$，如图 11-4 所示。试确定凸轮最小基圆半径 r_b。

解：根据表 11-1 中简谐运动规律 α_{max} 计算公式 $\tan\alpha_{max}=\frac{k\pi}{2\Phi\sqrt{1+k}}$，将已知数据代入得到

$$2\frac{\pi}{4}\sqrt{1+k}\tan 30°=k\pi$$

即 $$4k^2-0.333k-0.333=0$$

解方程得到 $k=0.333$，所以最小基圆半径

$$r_b=\frac{h}{k}=\frac{14}{0.333}\approx 42\text{ mm}$$

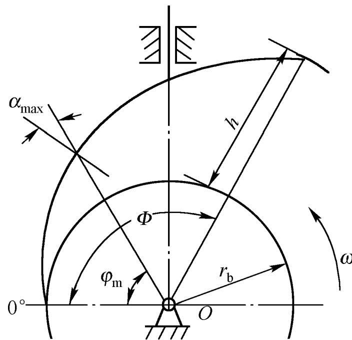


图 11-4 凸轮机构的最大压力角

据表 11-1，α_{max} 在凸轮升程廓线上的位置角

$$\varphi_m=\frac{\Phi}{\pi}\arccos\frac{k}{2+k}=\frac{\pi/4}{\pi}\arccos\frac{0.333}{2+0.333}=0.3569\text{ rad}\approx 20.4°$$

编制从动件实现 4 种基本运动规律时对心直动凸轮机构压力角计算的 M 文件：

```
%对心直动凸轮机构压力角的计算(调用 TLYLJ. M)
disp('            ********  对心直动凸轮机构压力角的计算  ********')
disp('          ========  已 知 条 件 ========')
rb = input('         基圆半径(mm)             rb = ');
h = input('          推程升程(mm)              h = ');
k = h/rb;hd = pi/180;
fai = input('        推程运动角(度)            fai = ');
```

```
fprintf('          运动结构系数            k = %3.4f \n',k)
YDGL = input('运动规律类型:等速 - "ZX";等加减速 - "PW";余弦加速 - "JX";正弦加速 - "BX" = ');
if YDGL == 'ZX'
    disp('          ========  等速运动(直线)规律 ========')
    fm = 0;
    alfm = atan(k/(phi * hd));
elseif YDGL == 'PW'
    disp('          ========  等加减速运动(抛物线)规律 ========')
    if k <= 2
        fm = phi * hd/2;
        alfm = atan(4 * k/(phi * hd * (2 + k)));
    elseif k > 2
        fm = phi * hd/sqrt(2 * k);
        alfm = atan(sqrt(2 * k)/(phi * hd));
    end
elseif YDGL == 'JX'
    disp('            ========  余弦加速度运动(简谐曲线)规律 ========')
    fm = phi * hd * acos(k/(2 + k))/pi;
    alfm = atan(k * pi/(2 * phi * hd * sqrt(1 + k)));
elseif YDGL == 'BX'
    disp('  ========  正弦加速度运动(摆线)规律 ========')
    x = fsolve(@TLYLJ,phi * hd/2);              % 使用 fsolve 求解渐开线函数方程
    fm = x/pi * (phi * hd);
alfm = atan(k * (1 - cos(2 * pi * fm/(phi * hd)))/(phi * hd + k * fm - k * phi * hd * sin(2 * pi * fm/(phi * hd))/(2 * pi)));
end
fprintf('          最大压力角             alfm = %3.4f 度 \n',alfm/hd)
fprintf('          最大压力角的位置角        fm = %3.4f 度 \n',fm/hd)

% 压力角渐开线函数
function f = TLYLJ(x)
global k                    % 定义全局变量
f = tan(x) - x - pi/k;
```

计算结果:

```
 ********  对心直动凸轮机构压力角的计算  ********
       ========  已 知 条 件 ========
            基圆半径(mm)                rb = 40
            推程升程(mm)                 h = 35
          推程运动角(度)                fai = 100
              运动结构系数               k = 0.8750
运动规律类型:等速 - "ZX";等加减速 - "PW";余弦加速 - "JX";正弦加速 - "BX" = 'ZX'
            ========  等速运动(直线)规律 ========
                最大压力角           alfm = 26.6264 度
      最大压力角的位置角               fm = 0.0000 度
```

```
        ========  等加速减速运动(抛物线)规律 ========
            最大压力角                    alfm = 34.8963 度
        最大压力角的位置角                   fm = 50.0000 度
        ========  余弦加速度运动(简谐曲线)规律 ========
            最大压力角                    alfm = 29.9036 度
        最大压力角的位置角                   fm = 40.1561 度
        ========  正弦加速度运动(摆线)规律 ========
  Optimization terminated successfully:
            最大压力角                    alfm = 35.8673 度
        最大压力角的位置角                   fm = 41.8677 度
```

11.2 凸轮机构的设计计算和运动分析

凸轮机构设计的基本要求是保证从动件实现预期的运动规律，并且使机构具有良好的传力性能和紧凑的结构。采用解析法设计时需要进行大量的分析与计算，以及绘制凸轮轮廓图形，借助 MATLAB 强大的数值计算功能和出色的数据可视化功能，可以方便可靠地实现凸轮机构设计。

11.2.1 凸轮设计和运动分析的步骤和数学模型

1. 凸轮设计和运动分析的步骤

1）输入已知的凸轮机构的结构参数，如凸轮基圆半径 r_b、滚子半径 r_t、偏置移动从动件的偏距 e、从动件升程 h、凸轮推程角 Φ、远休止角 Φ_s 和回程运动角 Φ' 等，以及运动和动力性能的许用值，如凸轮轮廓许用曲率半径[ρ]、推程许用压力角[α]和回程许用压力角[α']等。

2）校核凸轮机构的推程和回程最大压力角 α_{max} 和 α'_{max}，以及理论轮廓上最小曲率半径 ρ_{min}，使其不超过规定的许用值[α]、[α']和[ρ]，输出 α_{max}、α'_{max} 和 ρ_{min}，及其在凸轮轮廓的位置角。

3）计算凸轮的理论轮廓坐标值(x,y)和实际轮廓坐标值(x',y')。

4）计算从动件的运动参数（位移 s、速度 v 和加速度 a），绘制从动件运动参数线图。

5）绘制凸轮轮廓图形。

2. 建立凸轮设计的数学模型

以典型的偏置移动从动件盘形凸轮机构设计为例（见图 11-5）。

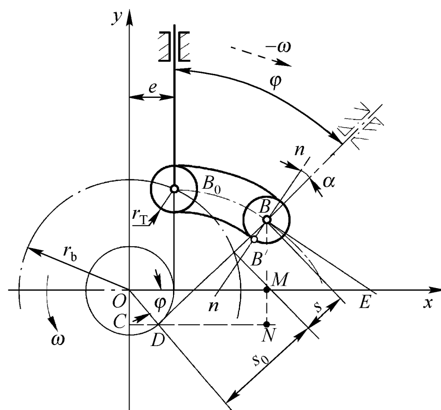


图 11-5 偏置移动从动件盘形凸轮机构解析法分析

1）凸轮理论轮廓的直角坐标方程

$$\left.\begin{aligned} x &= (s_0+s)\sin\varphi + e\cos\varphi \\ y &= (s_0+s)\cos\varphi - e\sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad (11\text{-}1)$$

式中，φ 是凸轮转角，s 是从动件位移，$s_0=\sqrt{r_b^2-e^2}$ 是结构常数。

2）凸轮实际轮廓的直角坐标方程式

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + r_t \frac{dy/d\varphi}{\sqrt{(dx/d\varphi)^2 + (dy/d\varphi)^2}} \\ y' &= y - r_t \frac{dx/d\varphi}{\sqrt{(dx/d\varphi)^2 + (dy/d\varphi)^2}} \end{aligned}\right\} \tag{11-2}$$

3）凸轮理论轮廓上的机构压力角

$$\tan\alpha = \frac{(ds/d\varphi) - e}{s_0 + s} \tag{11-3}$$

4）凸轮理论轮廓上的曲率半径

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{[(dx/d\varphi)^2 + (dy/d\varphi)^2]^{1.5}}{(dx/d\varphi)(d^2y/d\varphi^2) - (dy/d\varphi)(d^2x/d\varphi^2)} \\ &= \frac{[(s+s_0)^2 + (ds/d\varphi)^2]^{1.5}}{(s+s_0)(d^2s/d\varphi^2 - s - s_0) - (ds/d\varphi - e)(2ds/d\varphi - e)} \end{aligned} \tag{11-4}$$

5）凸轮轮廓直角坐标的一阶和二阶导函数是

$$\left.\begin{aligned} dx/d\varphi &= (ds/d\varphi - e)\sin\varphi + (s_0 + s)\cos\varphi \\ dy/d\varphi &= (ds/d\varphi - e)\cos\varphi - (s_0 + s)\sin\varphi \end{aligned}\right\} \tag{11-5}$$

$$\left.\begin{aligned} d^2x/d\varphi^2 &= (2ds/d\varphi - e)\cos\varphi + (d^2s/d\varphi^2 - s_0 - s)\sin\varphi \\ d_y^2/d\varphi^2 &= -(2ds/d\varphi - e)\sin\varphi + (d^2s/d\varphi^2 - s_0 - s)\cos\varphi \end{aligned}\right\} \tag{11-6}$$

因此，采用解析法设计凸轮轮廓，需要根据给定的从动件运动规律 $s=f(\varphi)$，推导出对应的一阶导函数 $ds/d\varphi$ 和二阶导函数 $d^2s/d\varphi^2$（参考表 11-2），然后代入到上述各式中进行计算。

11.2.2　凸轮设计计算实例和 CAD 基本方法

例 11-2　已知某偏置直动从动件盘形凸轮机构的结构参数：基圆半径 $r_b=40$ mm，滚子半径 $r_T=15$ mm，偏距 $e=15$ mm，从动件升程 $h=50$ mm，从动件偏置在凸轮轴心的右侧。凸轮以等角速度逆时针方向回转，从动件在推程作等加速、等减速运动，推程角 $\Phi=100°$；在回程作简谐运动，回程角 $\Phi=90°$；远休止角凸轮 $\Phi_s=60°$。推程许用压力角 $[\alpha]=35°$，轮廓许用曲率半径 $[\rho]=r_T+5=15$ mm。试采用计算机辅助设计方法，计算凸轮机构的运动参数和设计凸轮轮廓。

凸轮设计计算和运动分析有关公式的运用如下：

1）计算凸轮理论轮廓和实际轮廓的直角坐标分别使用式（11-1）和式（11-2）。

2）计算凸轮机构的压力角使用式（11-3）。

3）计算凸轮理论轮廓的曲率半径使用式（11-4）。

4）计算凸轮机构的运动参数，需要根据给定的从动件运动规律参考表 11-2 确定。

5）以上公式运用中涉及从动件位移方程及其一阶和二阶导函数，需要根据给定的从动件运动规律使用式（11-5）和式（11-6），以及参考表 11-2 确定。

11.2.3　编制 M 文件的基本方法和运算结果

1）运用“for-end”循环结构，以凸轮转角 φ 作为循环控制变量，对凸轮某个运动角

或整周 360°区域的轮廓，按照要求的分度进行逐点的参数计算。

2）运用流程控制“if – elseif – end”选择结构，检验凸轮转角 φ 变动的区域（推程角、回程角或休止角范围等）条件，或凸轮某个运动角区域的传力性能参数（如压力角）或结构参数（如轮廓曲率半径）数组中满足的极值条件，然后执行相应的运算。有时需要在满足一定条件时中断循环，采用“break”命令跳出循环体。

3）数据的显示输出：可以运用格式化输出命令“fprintf”将数据在命令窗口中按照自定义格式显示，包括注释、数据中保留的小数位数、数据之间的间隔和排列等。也可以运用自由格式输出命令“disp”，按照行与列的对应关系显示数组元素。

4）凸轮轮廓图形处理程序要点：

① 考虑到轮廓图形中含有理论轮廓、实际轮廓、基圆和滚子圆等多种线图，为了能够在同一个图形窗口中同时显示它们，可采用保持图形命令“hold on”。

② 为了避免通常在图形窗口中二维坐标轴的比例不同而造成显示的图形失真，可采用命令“axis equal”使二维坐标轴的比例相等。

③ 采用命令“text”和命令“title”对图形和图题进行标注。

④ 在二维绘图命令“plot”中还可以采用不同的颜色和线型参数描绘不同线图，使图形更直观。

通过计算机运算，在满足机构具有良好的传力性能和紧凑的结构的前提下，迅速获得可靠的精确结果，绘制出对应的直观清晰凸轮轮廓，并且还可以给出数控加工凸轮轮廓的刀具直角坐标轨迹，提高对凸轮机构综合运用 CAD/CAM 技术辅助的功能。

该例的凸轮机构的从动件运动线图如图 11–6 所示，分别绘制出从动件在推程和回程的位移、速度和加速度线图。凸轮轮廓如图 11–7 所示，包括基圆、偏距圆（点画线）、滚子、理论轮廓（点画线）和实际轮廓。

M 文件和运算结果：

```
%    ********  偏置移动从动件盘形凸轮设计绘图和运动分析  ********
disp('                    ######## 已知条件 ########')
disp('      凸轮作逆时针方向转动,从动件偏置在凸轮轴心的右边')
disp('      从动件在推程作等加速/等减速运动,在回程作余弦加速度运动')
%基圆半径;滚子半径;从动件偏距;从动件升程
rb = 40;rt = 10;e = 15;h = 50;
%推程运动角;远休止角;回程运动角;推程许用压力角;凸轮转速
ft = 100;fs = 60;fh = 90;alpha_p = 35;n = 200;
%角度和弧度转换系数;机构尺度
hd = pi/180;du = 180/pi;se = sqrt(rb^2 - e^2);
w = n * pi/30; omega = w * du;            %凸轮角速度(°/s)
fprintf('     基圆半径           rb = %3.4f mm \n',rb)
fprintf('     滚子半径           rt = %3.4f mm \n',rt)
fprintf('     推杆偏距            e = %3.4f mm \n',e)
fprintf('     推程升程            h = %3.4f mm \n',h)
fprintf('     推程运动角         ft = %3.4f 度 \n',ft)
fprintf('     远休止角           fs = %3.4f 度 \n',fs)
fprintf('     回程运动角         fh = %3.4f 度 \n',fh)
```

```
fprintf('          推程许用压力角   alpha_p = %3.4f 度 \n' ,alpha_p)
fprintf('          凸轮转速                 n = %3.4f r/min \n' ,n)
fprintf('          凸轮角速度(弧度)       w = %3.4f rad/s \n' ,w)
fprintf('          凸轮角速度(度)     omega = %3.4f 度 /s \n' ,omega)
disp' '
disp'                 @@@@@@   计算过程和输出结果   @@@@@@'
disp' '
%  (1) - 校核凸轮机构的压力角和轮廓曲率半径'
disp'           *** 计算凸轮理论轮廓的压力角和曲率半径 ***'
disp'               1 推程(等加速/等减速运动)'
for f = 1:ft
    if f <= ft/2
        s(f) = 2 * h * f^2/ft^2;s = s(f);                    % 等加速 - 位移方程
        ds(f) = 4 * h * f * hd/(ft * hd)^2;ds = ds(f);
        d2s(f) = 4 * h/(ft * hd)^2;d2s = d2s(f);
        vt(f) = 4 * h * omega * f/ft^2;                      % 等加速 - 速度方程
    else
        s(f) = h - 2 * h * (ft - f)^2/ft^2;s = s(f);         % 等减速 - 位移方程
        ds(f) = 4 * h * (ft - f) * hd/(ft * hd)^2;ds = ds(f);
        d2s(f) = -4 * h/(ft * hd)^2;d2s = d2s(f);
        vt(f) = 4 * h * omega * (ft - f)/ft^2;               % 等减速 - 速度方程
    end
    alpha_t(f) = atan(abs(ds - e)/(se + s));                 % 推程压力角(弧度)
    alpha_td(f) = alpha_t(f) * du;                           % 推程压力角(度)
    pt1 = ((se + s)^2 + (ds - e)^2)^1.5;
    pt2 = abs((se + s) * (d2s - se - s) - (ds - e) * (2 * ds - e));
    rho_t(f) = pt1/pt2;                                      % 推程曲率半径
    st(f) = s;
end
alpha_tm = max(alpha_td);
fprintf('          推程最大压力角         alpha_tm = %3.4f 度\n' ,alpha_tm)
for f = 1:ft
     if alpha_td(f) == alpha_tm;ftm = f;break;end
end
fprintf ('          对应的位置角                 ftm = %3.4f 度\n' ,ftm)
if alpha_tm > alpha_p
    fprintf('     * 凸轮推程压力角超过许用值,需要增大基圆! \n' )
end
rho_tn = min(rho_t);
fprintf ('          最小曲率半径              rho_tn = %3.4f mm\n' ,rho_tn)
for f = 1:ft
     if rho_t(f) == rho_tn;ftn = f;break;end
end
fprintf('          对应的位置角                 ftn = %3.4f 度\n' ,ftn)
if rho_tn < rt + 5
    fprintf('      * 凸轮推程轮廓曲率半径小于许用值,需要增大基圆或减小滚子! \n' )
```

```
end
disp('        2 回程(余弦加速度运动 - 简谐运动)')
d1 = ft + fs;d2 = ft + fs + fh;                              % 回程运动角范围
for f = d1:d2
    k = f - d1;
    s(f) = 0.5 * h * (1 + cos(pi * k/fh));s = s(f);          % 简谐运动 - 位移方程
    ds(f) = -0.5 * pi * h * sin(pi * k/fh)/(fh * hd);ds = ds(f);
    d2s(f) = -0.5 * pi^2 * h * cos(pi * k/fh)/(fh * hd)^2;d2s = d2s(f);
    alpha_h(f) = atan(abs(ds + e)/(se + s));                 % 回程压力角(弧度)
    alpha_hd(f) = alpha_h(f) * du;                           % 回程压力角(度)
    ph1 = ((se + s)^2 + (ds - e)^2)^1.5;
    ph2 = abs((se + s) * (d2s - se - s) - (ds - e) * (2 * ds - e));
    rho_h(f) = ph1/ph2;                                      % 回程曲率半径
    sh(f) = s;
    vh(f) = -0.5 * pi * h * omega * sin(pi * f/fh)/fh;        % 简谐运动 - 速度方程
    ah(f) = -0.5 * pi^2 * h * omega^2 * cos(pi * f/fh)/fh^2;  % 简谐运动 - 加速度方程
end
alpha_hm = max(alpha_hd(d1:d2));
fprintf('          回程最大压力角          alpha_hm = %3.4f 度\n',alpha_hm)
for f = d1:d2
    if alpha_hd(f) == alpha_hm;fhm = f;break;end
end
fprintf('          对应的位置角                fhm = %3.4f 度\n',fhm)
rho_hn = min(rho_h(d1:d2));
fprintf('          最小曲率半径              rho_hn = %3.4f mm\n',rho_hn)
for f = d1:d2
    if rho_h(f) == rho_hn;fhn = f;break;end
end
fprintf('          对应的位置角                fhn = %3.4f 度\n',fhn)
if rho_hn < rt + 5
    fprintf('   * 凸轮回程轮廓曲率半径小于许用值,需要增大基圆或减小滚子! \n')
end
disp(' ')
%   (2) - 计算凸轮机构的从动件运动参数
disp(' *** 计算凸轮机构从动件的运动参数 ***')
disp('           1 推程(等加速/等减速运动)')
disp('      凸轮转角    位移 s(mm)  速度 v(mm/s)')
for f = 10:10:ft
    ydcs_t = [f st(f) vt(f)];
    disp(ydcs_t)
end
at_1 = 4 * h * omega^2/ft^2;
at_2 = -4 * h * omega^2/ft^2;
fprintf('     等加速上升的加速度    at_1 = %3.4f (mm/s^2) \n',at_1)
fprintf('     等减速上升的加速度    at_2 = %3.4f (mm/s^2) \n',at_2)
disp('             2 回程(余弦加速度运动 - 简谐运动)')
```

```
disp'    凸轮转角   位移 s(mm)  速度 v(mm/s)  加速度 a(mm/s^2)'
for f = d1:10:d2
    ydcs_h = [f sh(f) vh(f) ah(f)];
    disp(ydcs_h)
end
%  (3) - 绘制凸轮机构的从动件运动线图
figure(1);
subplot(3,2,1)                                    %推程位移线图
f = 1:ft;plot(f,st);
xlabel('凸轮转角 \it \phi / \rm(°)')
ylabel('\it s / \rm(mm)')
title('从动件推程位移线图');
subplot(3,2,2)                                    %回程位移线图
f = d1:d2;plot(f,sh(d1:d2));
xlabel('凸轮转角 \it \phi / \rm(°)')
ylabel('\it s / \rm(mm)')
title('从动件回程位移线图');
subplot(3,2,3)                                    %推程速度线图
f = 1:ft;plot(f,vt);
xlabel('凸轮转角 \it \phi / \rm(°)')
ylabel('\it v / \rm(mm/s)')
title('从动件推程速度线图');
subplot(3,2,4)                                    %回程速度线图
f = d1:d2;plot(f, - vh(d1:d2));
xlabel('凸轮转角 \it \phi / \rm(°)')
ylabel('\it v / \rm(mm/s)')
title('从动件回程速度线图');
subplot(3,2,5)                                    %推程加速度线图
line([0,ft/2],[at_1,at_1]);
line([ft/2,ft/2],[at_1,at_2]);                    %等加速等减速之间的突变垂线
line([ft/2,ft],[at_2,at_2]);
xlabel('凸轮转角 \it \phi / \rm(°)')
ylabel('\it a / \rm(mm/s^2)')
title('从动件推程加速度线图');
subplot(3,2,6)                                    %回程加速度线图
f = d1:d2;plot(f, - ah(d1:d2));
xlabel('凸轮转角 \it \phi / \rm(°)')
ylabel('\it a / \rm(mm/s^2)')
title('从动件回程加速度线图');
disp'  '
%  (4) - 计算凸轮理论廓线与实际廓线的直角坐标和向径'
disp'      ******  凸轮理论轮廓与实际轮廓的直角坐标  ******'
nd = 360;
for f = 1:nd
    if f <= ft/2                                  %等加速运动
        s(f) = 2 * h * f^2/ft^2;s = s(f);
```

```
        ds(f) =4 * h * f * hd/(ft * hd)^2;ds = ds(f);
    elseif f > ft/2 & f <= ft                          % 等减速运动
        s(f) = h - 2 * h * (ft - f)^2/ft^2;s = s(f);
        ds(f) =4 * h * (ft - f) * hd/(ft * hd)^2;ds = ds(f);
    elseif f > ft & f <= d1                            % 远休止角
        s = h;ds = 0;
    elseif f > d1 & f <= d2                            % 简谐运动
        k = f - d1;
        s(f) =0.5 * h * (1 + cos(pi * k/fh));s = s(f);
        ds(f) = -0.5 * pi * h * sin(pi * k/fh)/(fh * hd);ds = ds(f);
    elseif f > d2 & f <= nd
        s = 0;ds = 0;
    end
    xx(f) = (se + s) * sin(f * hd) + e * cos(f * hd);x = xx(f);% 理论轮廓横坐标
    yy(f) = (se + s) * cos(f * hd) - e * sin(f * hd);y = yy(f);% 理论轮廓纵坐标
    dx(f) = (ds - e) * sin(f * hd) + (se + s) * cos(f * hd);dx = dx(f);
    dy(f) = (ds - e) * cos(f * hd) - (se + s) * sin(f * hd);dy = dy(f);
    xp(f) = x + rt * dy/sqrt(dx^2 + dy^2);xxp = xp(f);       % 实际轮廓横坐标
    yp(f) = y - rt * dx/sqrt(dx^2 + dy^2);yyp = yp(f);       % 实际轮廓纵坐标
    r(f) = sqrt(x^2 + y^2);                                  % 理论轮廓向径
    rp(f) = sqrt(xxp^2 + yyp^2);                             % 实际轮廓向径
end
disp('                    1 推程(等加速/等减速运动)')
disp('    凸轮转角      理论 x      理论 y      实际 x      实际 y')
for f = 10:10:ft
    nu = [f xx(f) yy(f) xp(f) yp(f)];
    disp(nu)
end
disp('                    2 回程(余弦加速度运动)')
disp('    凸轮转角      理论 x      理论 y      实际 x      实际 y')
for f = d1:10:d2
    nu = [f xx(f) yy(f) xp(f) yp(f)];
    disp(nu)
end
disp('  *** 凸轮理论轮廓与实际轮廓的向径 ***')
disp('      1 推程(等加速/等减速运动)')
disp('    凸轮转角      理论 r      实际 r')
for f = 10:10:ft
    nu = [f r(f) rp(f)];
    disp(nu)
end
disp('  ')
disp('      2 回程(余弦加速度运动)')
for f = d1:10:d2
    nu = [f r(f) rp(f)];
    disp(nu)
```

```
end
%   (5) - 绘制凸轮的理论轮廓和实际轮廓
figure(2);
plot(xx,yy','r-.')                                      %理论轮廓(红色,点画线)
axis ([-(rb+h-10) (rb+h+10) -(rb+h+10) (rb+rt+10)]) %横轴和纵轴的下限和上限
axis equal                                              %横轴和纵轴的尺度比例相同
text(rb+h+3,0','X')                                     %标注横轴
text(0,rb+rt+3','Y')                                    %标注纵轴
text(-5,5','O')                                         %标注直角坐标系原点
title('偏置移动从动件盘形凸轮轮廓')                        %标注图形标题
hold on;                                                %保持图形
plot([-(rb+h) (rb+h)],[0 0]','k')                       %横轴(黑色)
plot([0 0],[-(rb+h) (rb+rt)]','k')                      %纵轴(黑色)
plot([e e],[0 (rb+rt)]','k--')                          %初始偏置位置(黑色,虚线)
ct = linspace(0,2*pi);                                  %画圆的极角变化范围
plot(rb*cos(ct),rb*sin(ct)','g')                        %基圆(绿色)
plot(e*cos(ct),e*sin(ct)','c--')                        %偏距圆(青色,虚线)
plot(e+rt*cos(ct),se+rt*sin(ct)','m')                   %滚子圆(品红色)
plot(xp,yp','b')                                        %实际轮廓(蓝色)
```

输出的从动件运动线图如图 11-6 所示。

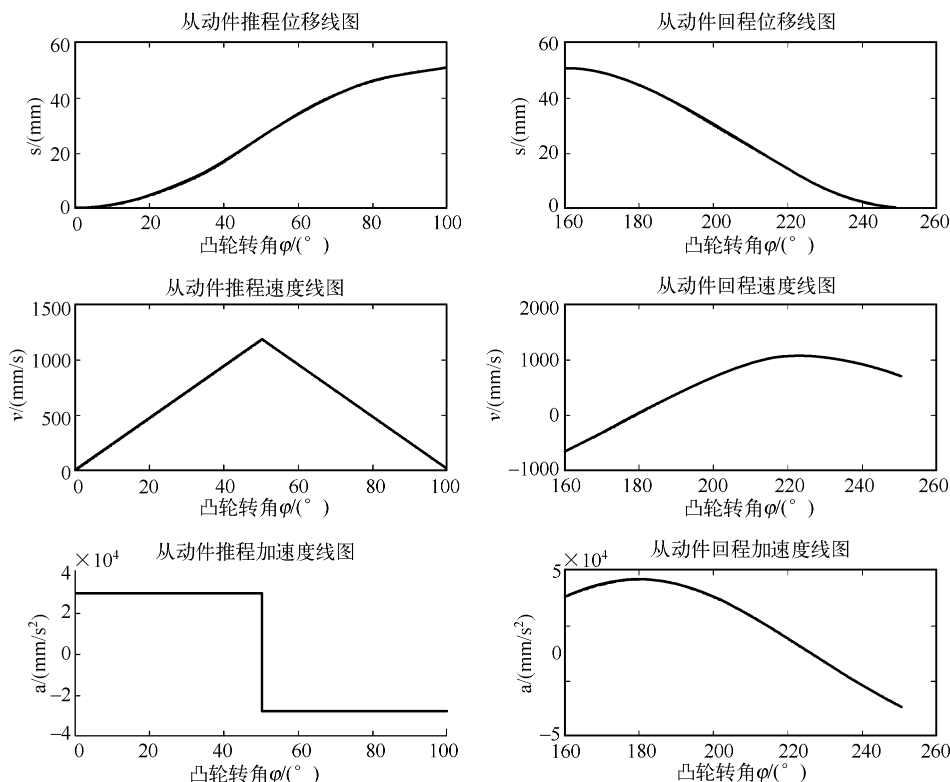


图 11-6 从动件运动线图

```
******** 偏置移动从动件盘形凸轮设计绘图和运动分析 ********
  ########已知条件 ########
凸轮作逆时针方向转动,从动件偏置在凸轮轴心的右边
从动件在推程作等加速/等减速运动,在回程作余弦加速度运动
    基圆半径                     rb = 40.0000 mm
    滚子半径                     rt = 10.0000 mm
    推杆偏距                      e = 15.0000 mm
    推程升程                      h = 50.0000 mm
    推程运动角                   ft = 100.0000 度
    远休止角                     fs = 60.0000 度
    回程运动角                   fh = 90.0000 度
    推程许用压力角          alpha_p = 35.0000 度
    凸轮转速                      n = 200.0000 r/min
    凸轮角速度(弧度)              w = 20.9440 rad/s
    凸轮角速度(度)            omega = 1200.0000 度 /s

          @@@@@@   计算过程和输出结果   @@@@@@

         *** 计算凸轮理论轮廓的压力角和曲率半径 ***
        1 推程(等加速/等减速运动)
    推程最大压力角       alpha_tm = 34.2666 度
      对应的位置角            ftm = 50.0000 度
      最小曲率半径         rho_tn = 35.2303 mm
      对应的位置角            ftn = 51.0000 度
        2 回程(余弦加速度运动 - 简谐运动)
    回程最大压力角       alpha_hm = 30.9248 度
      对应的位置角            fhm = 213.0000 度
      最小曲率半径         rho_hn = 30.3591 mm
      对应的位置角            fhn = 250.0000 度

*** 计算凸轮机构从动件的运动参数 ***
        1 推程(等加速/等减速运动)
凸轮转角   位移 s(mm)   速度 v(mm/s)
   10          1           240
   20          4           480
   30          9           720
   40         16           960
   50         25          1200
   60         34           960
   70         41           720
   80         46           480
   90         49           240
  100         50             0
等加速上升的加速度   at_1 = 28800.0000 (mm/s^2)
等减速上升的加速度   at_2 = -28800.0000 (mm/s^2)
```

2 回程(余弦加速度运动 − 简谐运动)

凸轮转角	位移 s(mm)	速度 v(mm/s)	加速度 a(mm/s^2)
160	50	673	−33602
170	48	358	−41220
180	44	0	−43865
190	37	−358	−41220
200	29	−673	−33602
210	21	−907	−21932
220	12.5	−1031.3	−7617.1
230	5.8	−1031.3	7617.1
240	2	−907	21932
250	0	−673	33602

****** 凸轮理论轮廓与实际轮廓的直角坐标 ******

1 推程(等加速/等减速运动)

凸轮转角	理论 x	理论 y	实际 x	实际 y
10.0000	21.3848	34.8977	18.7440	25.2527
20.0000	28.1459	33.4732	26.5660	23.5988
30.0000	36.0309	32.4073	34.7788	22.4860
40.0000	45.6105	31.0206	43.9004	21.1679
50.0000	57.1986	28.4142	54.4870	18.7889
60.0000	69.0579	22.5501	63.1030	14.5165
70.0000	78.5024	12.6099	70.2060	7.0270
80.0000	84.4235	−0.3453	74.7846	−3.0083
90.0000	86.0810	−15.0000	76.0894	−14.5890
100.0000	83.1533	−29.8936	73.7429	−26.5105

2 回程(余弦加速度运动)

凸轮转角	理论 x	理论 y	实际 x	实际 y
160.0000	15.6881	−86.9597	13.9127	−77.1185
170.0000	0.0875	−86.8780	1.9206	−77.0474
180.0000	−15.0000	−81.2321	−9.9808	−72.5829
190.0000	−27.7230	−70.8432	−20.2897	−64.1539
200.0000	−36.8131	−57.2861	−27.8219	−52.9092
210.0000	−41.8603	−42.5041	−32.0770	−40.4336
220.0000	−43.3607	−28.3394	−33.3609	−28.2733
230.0000	−42.5280	−16.1041	−32.6176	−17.4398
240.0000	−40.9188	−6.3040	−31.0634	−7.9985
250.0000	−39.9750	1.4129	−29.9813	1.0597

*** 凸轮理论轮廓与实际轮廓的向径 ***

1 推程(等加速/等减速运动)

凸轮转角	理论 r	实际 r
10.0000	40.9287	31.4490
20.0000	43.7338	35.5339

```
 30.0000   48.4609   41.4148
 40.0000   55.1597   48.7373
 50.0000   63.8674   57.6355
 60.0000   72.6465   64.7512
 70.0000   79.5088   70.5568
 80.0000   84.4242   74.8451
 90.0000   87.3781   77.4754
100.0000   88.3634   78.3634

  2 回程(余弦加速度运动)
160.0000   88.3634   78.3634
170.0000   86.8780   77.0714
180.0000   82.6054   73.2660
190.0000   76.0745   67.2859
200.0000   68.0948   59.7783
210.0000   59.6564   51.6121
220.0000   51.8003   43.7302
230.0000   45.4750   36.9872
240.0000   41.4015   32.0766
250.0000   40.0000   30.0000
```

绘制的凸轮轮廓如图 11-7 所示。

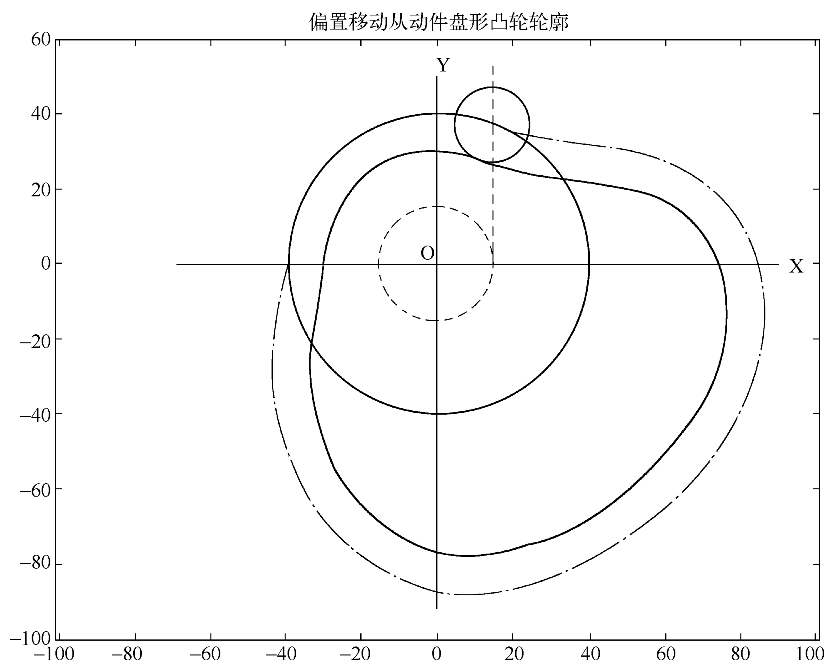


图 11-7　凸轮轮廓的绘制

11.3　共轭平面分度凸轮机构的设计计算

平面分度凸轮机构（图 11-8）是共轭凸轮的一种，可以输出具有优良运动和动力性能的间歇回转运动，广泛应用于包装、食品、医药、电子烟草、印刷、陶瓷和自动机床等的间歇送进和步进转位机构上。

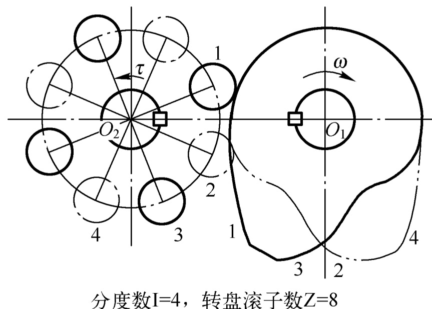


图 11-8　共轭平面分度凸轮机构（双头型）

平面分度凸轮机构由轮廓曲线完全相同的两片凸轮组成，前后两片凸轮呈镜像对称错开一定相位角安装的共轭状态。从动盘（转盘）的前后两个端面上各安装若干个径向分布的滚子，输入轴和输出轴平行。当主动件凸轮旋转时，其前后两侧的廓线分别与相应的滚子接触，实现相继推动转盘分度转位或实现形封闭（抵住滚子起限位作用）。

这种机构常常采用 1 ~ 8 次停顿范围，而且可以实现附加停顿和特殊运动。主动轮分度时有效转角小，驱动转速高达 1000 r/min 以上。由于采用共轭安装，从动件停止载荷增强，刚度好。从动件滚子两端都有支撑（非悬臂结构），受力状态好，工作寿命长，从动件容易实现双向输出。但对凸轮轮廓的加工精度和机构的安装要求都较高。

11.3.1　凸轮机构主要运动参数分析

（1）凸轮角速度 ω_1

$$\omega_1 = \frac{\pi n}{30} \quad (s^{-1}) \tag{11-7}$$

（2）转盘分度数 I（转盘每转一周中的停歇次数）　对于如图 11-8 所示的双头型（凸轮头数 $H=2$）共轭平面分度凸轮机构，转盘分度数通常可取 3、4、5、6、8（按照工作机械要求的工位数选取）。

（3）凸轮头数 H　通常可取 1、2、3、4，头数少的凸轮形状比较简单，但是受到凸轮轮廓的组合条件、压力角条件和不根切条件等限制时，可以取凸轮头数 $H=3$ 或 4。

（4）转盘滚子数 z（包括转盘的前后两个端面上的滚子）

$$z = HI \tag{11-8}$$

（5）凸轮分度期转角 θ_f 和停歇期转角 θ_d　对于双头型共轭平面分度凸轮机构的凸轮，分度期转角通常可取 $\theta_f = 90° \sim 270°$（间隔为 30°）。凸轮停歇期转角

$$\left.\begin{aligned}\theta_d &= 180° - \theta_f \quad (H=1)\\ \theta_d &= 360° - \theta_f \quad (H\geqslant 2)\end{aligned}\right\} \tag{11-9}$$

（6）转盘分度期转位角 φ_f

$$\varphi_f = \frac{360°}{I} \tag{11-10}$$

（7）转盘分度期运动规律　普通的正弦运动规律的始、末区段，从动件运动速度变化相当缓慢，导致中间区段的类速度幅度偏大。为改善这种情况，在始、末区段采用与中间区段不同周期的正弦运动规律（凸轮始、末区段对应的凸轮转角各占整个转角的 1/8），即改进的正弦运动规律——组合摆线运动规律，如图 11-9 所示。它适用于中高速重载荷。

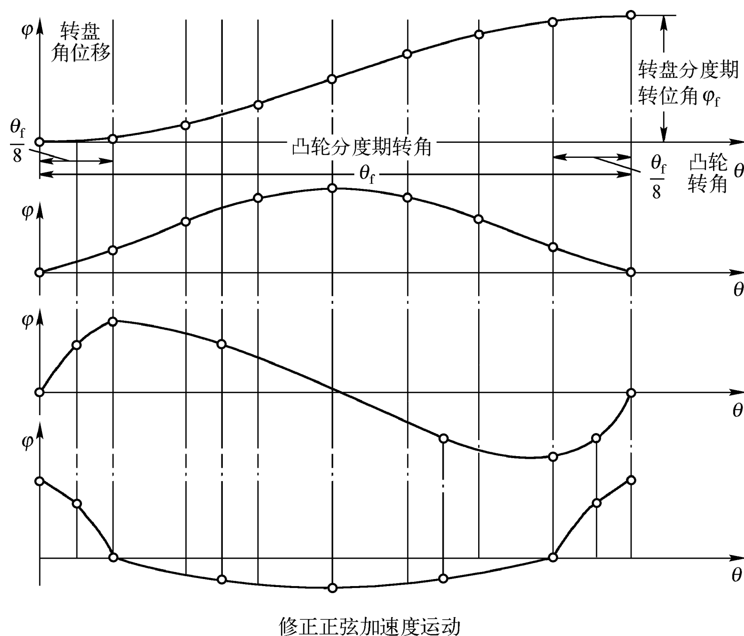


图 11-9　组合摆线运动线图

组合摆线的运动规律特征是：

1）速度因数 $V_m = \left(\dfrac{d\varphi}{d\theta}\right)_{max}\dfrac{\theta_f}{\varphi_f}$。对于非平底形式的从动件，它影响机构的压力角。

2）加速度因数 $A_m = \pm\left(\dfrac{d^2\varphi}{d\theta^2}\right)_{max}\dfrac{\theta_f^2}{\varphi_f} = \pm 5.53$。它影响凸轮机构的接触应力。

3）跃动因数 $J_m = \pm\left(\dfrac{d^3\varphi}{d\theta^3}\right)_{max}\dfrac{\theta_f^3}{\varphi_f} = \begin{cases}+69.5\\-23.2\end{cases}$。它表示从动件系统惯性系统的变化率。

4）惯性矩因数 $T_m = \pm\left(\dfrac{d\varphi}{d\theta}\dfrac{d^2\varphi}{d\theta^2}\right)_{max}\dfrac{\theta_f^3}{\varphi_f^2} = \pm 5.46$。它是基于负荷惯性的关于凸轮轴转矩的变量，电动机的峰值动力与它有关。

上述各式中，φ(°) 是转盘角位移，φ_f(°) 是转盘分度期转位角；θ(°) 是凸轮转角，θ_f(°) 是凸轮分度期转角。

（8）转盘分度期的运动分析　在组合摆线运动三个区段的类角位移、类角速度、类角

加速度和跃度为

1）当凸轮角位移 $0° \leqslant \theta \leqslant 22.5°$ 时的开始区段

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_2 &= \frac{\varphi_f}{(\pi+4)}\left[\frac{\pi}{\theta_f}\theta - \frac{1}{4}\sin\left(\frac{4\pi}{\theta_f}\theta\right)\right]\\
\omega_2 &= \frac{\pi\varphi_f}{(\pi+4)\theta_f}\left[1-\cos\left(\frac{4\pi}{\theta_f}\theta\right)\right]\\
\varepsilon_2 &= \frac{4\pi^2\varphi_f}{(\pi+4)\theta_f^2}\sin\left(\frac{4\pi}{\theta_f}\theta\right)\\
\zeta_2 &= \frac{16\pi^3\varphi_f}{(\pi+4)\theta_f^3}\cos\left(\frac{4\pi}{\theta_f}\theta\right)
\end{aligned}\right\} \tag{11-11}$$

2）当凸轮角位移 $22.5° \leqslant \theta \leqslant 157.5°$ 时的中间区段

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_2 &= \frac{\varphi_f}{(\pi+4)}\left[2+\frac{\pi}{\theta_f}\theta - \frac{9}{4}\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{4\pi}{3\theta_f}\theta\right)\right]\\
\omega_2 &= \frac{\pi\varphi_f}{(\pi+4)\theta_f}\left[1-3\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{4\pi}{3\theta_f}\theta\right)\right]\\
\varepsilon_2 &= \frac{4\pi^2\varphi_f}{(\pi+4)\theta_f^2}\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{4\pi}{3\theta_f}\theta\right)\\
\zeta_2 &= \frac{16\pi^3\varphi_f}{3(\pi+4)\theta_f^3}\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{4\pi}{3\theta_f}\theta\right)
\end{aligned}\right\} \tag{11-12}$$

3）当凸轮角位移 $157.5° \leqslant \theta \leqslant 180°$ 时的末尾区段

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_2 &= \frac{\varphi_f}{(\pi+4)}\left[4+\frac{\pi}{\theta_f}\theta - \frac{1}{4}\sin\left(\frac{4\pi}{\theta_f}\theta\right)\right]\\
\omega_2 &= \frac{\pi\varphi_f}{(\pi+4)\theta_f}\left[1-\cos\left(\frac{4\pi}{\theta_f}\theta\right)\right]\\
\varepsilon_2 &= \frac{4\pi^2\varphi_f}{(\pi+4)\theta_f^2}\sin\left(\frac{4\pi}{\theta_f}\theta\right)\\
\zeta_2 &= \frac{16\pi^3\varphi_f}{(\pi+4)\theta_f^3}\cos\left(\frac{4\pi}{\theta_f}\theta\right)
\end{aligned}\right\} \tag{11-13}$$

（9）机构在分度期的角速度比(ω_2/ω_1)和类角加速度$(\varepsilon_2/\omega_1^2)$　根据式（11-11）~式（11-13）各式中间的两式，分别除以 ω_1 或 ω_1^2，得到角速度比(ω_2/ω_1)和类角加速度$(\varepsilon_2/\omega_1^2)$。

（10）机构动停比 K 和运动系数 τ　机构分度期时间 t_f/s 和停歇期时间 t_d/s

$$\left.\begin{aligned}
t_f &= \frac{\theta_f}{\omega_1} \quad (s)\\
t_d &= \frac{\theta_d}{\omega_1} \quad (s)
\end{aligned}\right\} \tag{11-14}$$

机构动停比和运动系数

$$\left.\begin{aligned} K &= \frac{t_f}{t_d} \\ \tau &= \frac{t_f}{(t_d + t_f)} \end{aligned}\right\} \qquad (11-15)$$

11.3.2 凸轮机构主要几何尺寸计算

（1）确定机构径距比(R_p/C)　根据机构最大压力角（一般取 $\alpha_{max} = 50° \sim 60°$）和转盘滚子数 z，由图 11-10 确定机构的径距比(R_p/C)，其中，R_p 为转盘节圆半径，C 是中心距。选择的径距比(R_p/C)还需要进行检验。

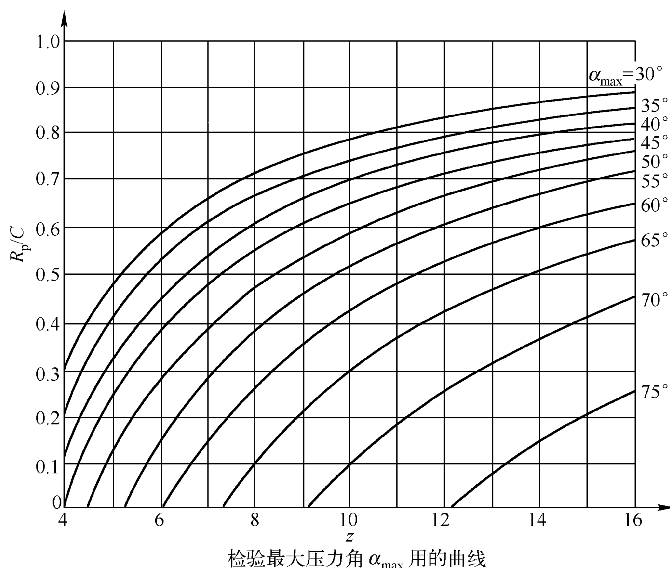


图 11-10　径距比与机构最大压力角的关系线图

1）根据凸轮分度期转角与头数的比值(θ_f/H)和转盘滚子数 z，由图 11-11 所示的凸轮理论廓线的形成条件所限定的径距比确定最大允许值$(R_p/C)_{max}$。

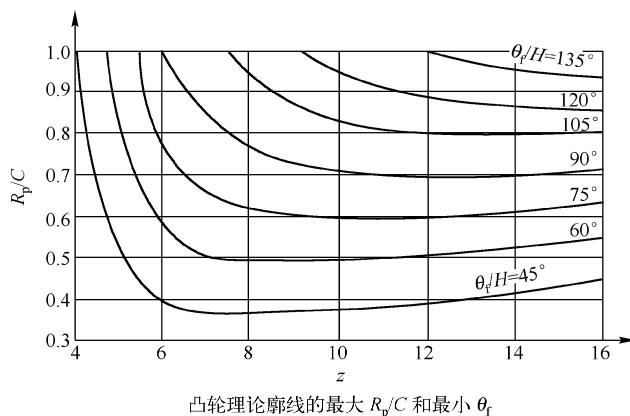
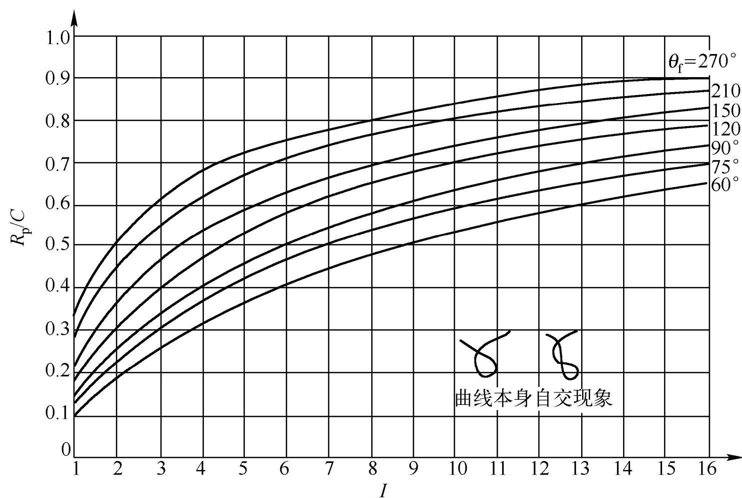


图 11-11　凸轮理论廓线的形成条件所允许的径距比

2）根据转盘分度数 I 和凸轮分度期转角 θ_f，由图 11–12 所示的凸轮理论廓线不发生自交现象时所限定的径距比确定最大允许值$(R_p/C)_{max}$。



凸轮理论廓线不产生自交现象的最大 R_p/C 和最小 θ_f
（适用于改进正弦加速度、改进梯形加速度和 3–4–5 多项式）

图 11–12　凸轮理论廓线不发生自交现象时所允许的径距比

（2）转盘节圆半径 R_p 和凸轮基圆半径（与转盘节圆半径相切）R_b

$$\left.\begin{aligned} R_p &= (R_p/C)C \quad (\text{mm}) \\ R_b &= C - R_p \quad (\text{mm}) \end{aligned}\right\} \tag{11–16}$$

（3）转盘的基准起始位置角 φ_{10} 和滚子中心角 φ_z

$$\varphi_{10} = \frac{180°}{z}$$

$$\varphi_z = \frac{360°}{z} \tag{11–17}$$

（4）凸轮的基准起始向径 R_{10} 和基准起始位置角 θ_{10}

$$\left.\begin{aligned} R_{10} &= \sqrt{C_2 + R_p^2 - 2CR_p\cos\varphi_{10}} \quad (\text{mm}) \\ \theta_{10} &= \arcsin\left(\frac{R_p\sin\varphi_{10}}{R_{10}}\right) \end{aligned}\right\} \tag{11–18}$$

（5）转盘上滚子半径 R_r 和滚子宽度 b　滚子半径的取值范围是

$$R_r \leqslant (0.4 \sim 0.6)R_p\sin\frac{\varphi_z}{z} \tag{11–19}$$

滚子宽度的取值范围是

$$b = (1.0 \sim 1.4)R_r \tag{11–20}$$

（6）共轭凸轮安装相位角（前后两片凸轮两条基准起始向径的夹角）θ_p　对于单头型凸轮（$H=1$）和多头型凸轮（$H\geqslant 2$）有

$$\left.\begin{aligned}\theta_p &= 180° - \theta_f - 2\theta_{10} \quad (H=1)\\ \theta_p &= 360° - \theta_f - 2\theta_{10} \quad (H\geqslant 2)\end{aligned}\right\} \tag{11-21}$$

（7）n 号滚子中心 F_{n0} 的起始位置角 φ_{n0}

$$\varphi_{n0} = \frac{360°(1.5-n)}{z} \tag{11-22}$$

式中，n 是滚子代号，n 为奇数时是安装在转盘前侧的滚子，n 为偶数时是安装在转盘后侧的滚子。

（8）滚子中心 F_{n0} 到凸轮中心 O_1 的距离 R_{n0}

$$R_{n0} = \sqrt{C^2 + R_p^2 - 2CR_p\cos\varphi_{n0}} \quad (\text{mm}) \tag{11-23}$$

式中，n 是滚子代号（意义同上）。

（9）滚子中心到凸轮轴心连线 $F_{n0}O_1$ 与凸轮滚子中心的连线 O_1O_2 的夹角 θ_{n0}

$$\theta_{n0} = \arcsin\left(\frac{R_p\sin\varphi_{n0}}{R_{n0}}\right) \tag{11-24}$$

式中，n 是滚子代号（意义同上）。

11.3.3 凸轮轮廓直角坐标计算

1. 建立动坐标系

如图 11-13 所示，凸轮角速度 ω_1 是顺时针方向时，在凸轮上建立动坐标系 O_1XY 为右手直角坐标系，其中 O_1 是凸轮轴心，O_1X 与凸轮的基准起始向径 $O_1A_0(R_{10})$ 重合。

如果凸轮角速度 ω_1 是逆时针方向，则动坐标系 O_1XY 取左手直角坐标系。

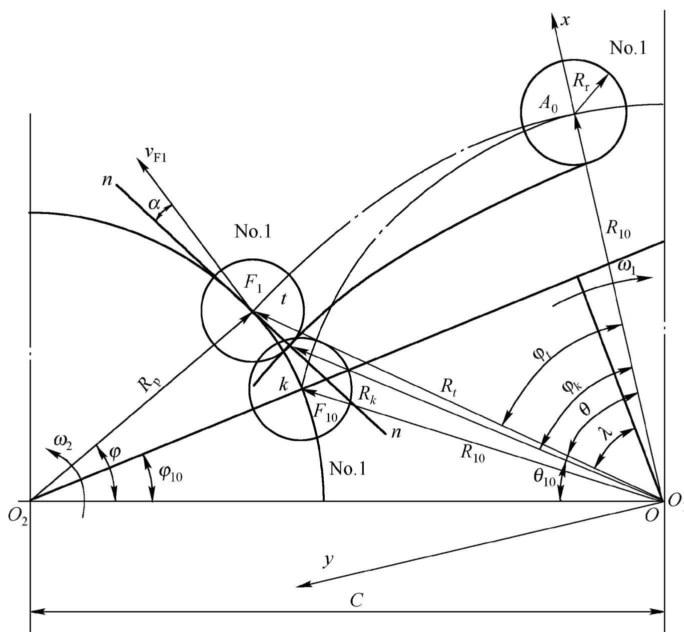


图 11-13　共轭平面分度凸轮的理论廓线和工作廓线

2. 与 1 号滚子中心相啮合的凸轮廓线坐标

1）凸轮理论廓线的直角坐标

$$\left.\begin{aligned} x_t &= R_p\sin(\theta+\varphi-\varphi_{10}-\lambda)-C\sin(\theta-\varphi_{10}-\lambda) \\ y_t &= -R_p\cos(\theta+\varphi-\varphi_{10}-\lambda)+C\cos(\theta-\varphi_{10}-\lambda) \end{aligned}\right\} \tag{11-25}$$

式中，θ 是凸轮转角，由 O_1X 起逆时针向度量；φ 是转盘上 1 号滚子的位置角，$\varphi=\varphi_{10}\varphi_i$，$\varphi_i$是转盘分度期角位移（$\varphi_2$），由 O_2O_1起逆时针向度量；辅助角

$$\lambda=\arctan\frac{C\cos\varphi_{10}-R_p}{C\sin\varphi_{10}} \tag{11-26}$$

2）凸轮工作廓线的直角坐标

$$\left.\begin{aligned} x_k &= x_t-R_r\cos(\theta+\varphi-\varphi_{10}-\lambda+\alpha) \\ y_k &= y_t-R_r\sin(\theta+\varphi-\varphi_{10}-\lambda+\alpha) \end{aligned}\right\} \tag{11-27}$$

式中，α 是压力角

$$\alpha=\arctan\frac{C\cos\varphi-R_p\left(1+\dfrac{\omega_2}{\omega_1}\right)}{C\sin\varphi} \tag{11-28}$$

压力角的值域是第四象限。

3）凸轮廓线的极坐标。矢径

$$R=\sqrt{x^2+y^2} \tag{11-29}$$

极角

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= \arctan\frac{y}{x} \quad (\text{当 } x>0 \text{ 和 } y>0 \text{ 时}) \\ \Phi &= 180^\circ+\arctan\frac{y}{x} \quad (\text{当 } x<0 \text{ 时}) \\ \Phi &= 360^\circ+\arctan\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}} \quad (\text{当 } x>0 \text{ 和 } y<0 \text{ 时}) \end{aligned}\right\} \tag{11-30}$$

3. 与 3 号滚子中心相啮合的凸轮廓线坐标

1）如图 11-14 所示，在凸轮上建立辅助动坐标系 $O_1X'Y'$，O_1X'与 3 号滚子中心的起始位置 F_{30}和凸轮轴心 O_1的连线 $O_1F_{30}(R_{30})$重合。如果凸轮角速度 ω_1是逆时针向，则动坐标系 O_1XY 取左手直角坐标系。

2）将上述计算公式中的转盘的基准起始位置角 φ_{10}（1 号滚子中心起始位置角）用 3 号滚子中心起始位置角 φ_{30}代替，计算出凸轮辅助动坐标系 $O_1X'Y'$中的凸轮理论廓线和工作廓线坐标 x'和 y'。

3）将 x'和 y'转换为凸轮动坐标系 O_1XY 中的坐标

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos(\theta_{10}-\theta_{30})-y'\sin(\theta_{10}-\theta_{30}) \\ y &= x'\sin(\theta_{10}-\theta_{30})+y'\cos(\theta_{10}-\theta_{30}) \end{aligned}\right\} \tag{11-31}$$

图 11-14　1 号滚子与 3 号滚子的坐标变换

11.3.4　凸轮机构工作情况分析

为使共轭凸轮机构能够连续稳定地工作，在运动过程中的任意瞬间，必须至少有一个滚子与凸轮升程（传动转矩为正值）轮廓接触，同时至少有一个滚子与凸轮回程（传动转矩为负值）轮廓接触。另外，同一个凸轮上的各段轮廓必须两两在某一合适点相交。

图 11-15 所示是机构在一个运动周期的转盘角位移和凸轮转角的关系曲线 $\varphi=f(\theta)$，从上到下依次是 1、2、3、4 号滚子的角位移曲线。在凸轮转角横坐标轴上方的滚子角位移曲线的粗实线部分，表示滚子受到凸轮正转矩作用。当凸轮转角 $\theta=0\sim85.358°$时，滚子 1 受正转矩作用，按组合摆线运动规律上升角位移 $\varphi=0\sim63.122°$；同时在凸轮转角 $\theta=63.110°$

粗实线—滚子受凸轮推动阶段；细实线—凸轮抵住滚子的限位阶段；虚线—滚子未与凸轮接触；

图 11-15　凸轮和转盘的工作情况

~119.111°区间，滚子 2 受正转矩作用，按组合摆线运动规律上升角位移也是 $\varphi=0\sim63.122°$。随着从动转盘的继续运动，滚子 1 和 2 此后依次与凸轮轮廓脱离，它们与凸轮非接触区段的运动曲线如图 11-15 中上部的虚线所示。在凸轮转角横坐标轴下方的滚子角位移曲线的细实线部分，表示滚子受到凸轮负转矩作用。同样，虚线部分也表示滚子还没有与凸轮接触的随动运动区段。

11.3.5　设计计算实例、M 文件和运算结果

例 11-3　设计印刷机送纸装置中的共轭平面分度凸轮机构。已知条件：凸轮转速 $n=100\ \text{r/min}$，连续旋转，从动转盘需要四个工位，机构中心距 $C=100\ \text{mm}$。

编制 M 文件如下：

```
%共轭分度凸轮机构设计与分析
%相关的函数文件:
%计算凸轮机构运动参数(zhbx_cs.m)
%绘制凸轮机构运动曲线(zhbx_tx.m)
%计算凸轮廓线坐标(zhbx_xyRP.m)
%将凸轮廓线辅助坐标转化为动坐标(zhbx_xyRPd.m)

disp'        用键盘输入已知条件';
n = input('凸轮转速(r/min)                    n = ');
C = input('机构中心距(mm)                     C = ');
disp' 选择凸轮头数 H、转盘分度数 I 与凸轮分度期转角 theta_f 的对应关系';
disp'    H = 1 时,I = 6、8、10、12、16,theta_f = 60、75、90、120、150 度'
disp'    H = 2 时,I = 3、4、5、6、8,theta_f = 90、120、150、180、210、240、270 度'
disp'    H = 3 时,I = 2、4,theta_f = 150、180、210、240、270 度'
disp'    H = 4 时,I = 1、2、3,theta_f = 180、210、240、270 度'
H = input('凸轮头数                           H = ');
I = input('转盘分度数                          I = ');
theta_f = input('凸轮分度期转角(度)        theta_f = ');

%1-共轭分度凸轮机构运动分析
%凸轮角速度
omega_1 = pi*n/30;
%转盘滚子数
z = H*I;
%凸轮停歇期转角
if H < 2
    theta_d = 180 - theta_f;
else
    theta_d = 360 - theta_f;
end
%转盘分度期转位角
phi_f = 360/I;
%机构分度期时间 t_f 和停歇期时间 t_d
hd = pi/180.0;                  %角度转换为弧度的系数
```

```
t_f = theta_f * hd/omega_1;
t_d = theta_d * hd/omega_1;
% 机构动停比 k 和运动系数 tau
k = t_f/t_d;
tau = t_f/(t_f + t_d);
disp('  ========   共轭分度凸轮机构基本数据   ========')
fprintf('        凸轮转速              n = %3.4f r/min \n',n)
fprintf('        机构中心距            C = %3.4f mm \n',C)
fprintf('        凸轮头数              H = %3.0f \n',H)
fprintf('        转盘分度数            I = %3.0f \n',I)
fprintf('        转盘滚子数            z = %3.0f \n',z)
fprintf('        凸轮角速度      omega_1 = %3.4f 1/s \n',omega_1)
fprintf('        凸轮分度期转角    theta_f = %3.4f 度 \n',theta_f)
fprintf('        凸轮停歇期转角    theta_d = %3.4f 度 \n',theta_d)
fprintf('        转盘分度期转角      phi_f = %3.4f 度 \n',phi_f)
fprintf('        机构分度期时间        t_f = %3.4f s \n',t_f)
fprintf('        机构停歇期时间        t_d = %3.4f s \n',t_d)
fprintf('        机构动停比              k = %3.4f \n',k)
fprintf('        机构运动系数          tau = %3.4f \n',tau)
```

计算结果：

```
  ========   共轭分度凸轮机构基本数据   ========
     凸轮转速              n = 100.0000 r/min
     机构中心距            C = 100.0000 mm
     凸轮头数              H = 2
     转盘分度数            I = 4
     转盘滚子数            z = 8
     凸轮角速度      omega_1 = 10.4720 1/s
     凸轮分度期转角    theta_f = 180.0000 度
     凸轮停歇期转角    theta_d = 180.0000 度
     转盘分度期转角      phi_f = 90.0000 度
     机构分度期时间        t_f = 0.3000 s
     机构停歇期时间        t_d = 0.3000 s
     机构动停比              k = 1.0000
     机构运动系数          tau = 0.5000
```

```
% 计算凸轮机构运动参数(调用组合摆线运动 M 文件:zhbx_cs.m)
bc = 0.5;                 % bc 是转角分度单位
[zhbx,i_zhbx] = zhbx_cs(theta_f,phi_f,hd,omega_1,bc);
fprintf('      组合摆线运动参数数组行数      i_zhbx = %3.0f \n',i_zhbx)
% 输出共轭分度凸轮机构运动参数
['  凸轮转角'  '    转盘角位移'  '角速度'  '    角加速度'  '      跃度'  '      角速度比'  '    角加速度比'  ]
[zhbx(:,1),zhbx(:,2)/hd,zhbx(:,3),zhbx(:,4),zhbx(:,5),zhbx(:,6),zhbx(:,7)]
```

计算结果：

凸轮转角	转盘角位移	角速度	角加速度	跃度	角速度比	角加速度比
0	0	0	0	3.5192	0	0
30.0000	3.8787	0.3345	0.8664	−0.6111	0.0319	0.0079
60.0000	20.1752	0.7254	0.5655	−2.6959	0.0693	0.0052
90.0000	45.0000	0.8798	0.0000	−3.5192	0.0840	0.0000
120.0000	69.8248	0.7254	−0.5655	−2.6959	0.0693	−0.0052
150.0000	86.1213	0.3345	−0.8664	−0.6111	0.0319	−0.0079
180.0000	90.0000		0	−0.0000	3.5192	0

```
%绘制凸轮机构运动曲线(调用组合摆线绘图 M 文件:zhbx_tx.m)
zhbx_tx(zhbx,hd,theta_f)
%备注:绘制的凸轮机构运动曲线形态正常(图 11-9)。

%2-共轭分度凸轮机构几何尺寸计算
disp('图 11-10:根据机构最大压力角 45~60 度和转盘滚子数 z,确定径距比 RpC')
disp('图 11-11:凸轮理论廓线的形成条件,根据 theta_f/H 和转盘滚子数 z,径距比最大允许值(Rp/C)max')
disp('图 11-12:凸轮理论廓线不发生自交,根据转盘分度数 I 和凸轮分度期转角 theta_f 度,径距比最大允许值(Rp/C)max')
RpC = input('确定径距比 RpC = ');
%转盘节圆半径
Rp = C * RpC;
%凸轮基圆半径(与转盘节圆半径相切)
Rb = C - Rp;
%转盘的基准起始位置角
phi_10 = 180/z;
%凸轮的基准起始向径
R_10 = sqrt(C^2 + Rp^2 - 2 * C * Rp * cos(phi_10 * hd));
%凸轮的基准起始位置角
theta_10 = asin(Rp * sin(phi_10 * hd)/R_10);
%转盘滚子中心角
phi_z = 360/z;
%转盘滚子半径
fprintf('转盘滚子半径最小值 Rrmin = %3.4f mm \n',round(0.4 * Rp * sin(phi_z * hd/2)))
fprintf('转盘滚子半径最大值 Rrmax = %3.4f mm \n',round(0.6 * Rp * sin(phi_z * hd/2)))
Rr = input('确定滚子半径(mm) Rr = ');
%转盘滚子宽度
fprintf('转盘滚子宽度最小值    bmin = %3.4f mm \n',round(1.0 * Rr))
fprintf('转盘滚子宽度最大值    bmax = %3.4f mm \n',round(1.4 * Rr))
b = input('确定滚子宽度(mm) b = ');
%共轭凸轮安装相位角(前后两片凸轮两条基准起始向径的夹角)
if H < 2
    theta_p = pi - theta_f * hd - 2 * theta_10;
else
    theta_p = 2 * pi - theta_f * hd - 2 * theta_10;
end
```

```
%滚子中心 Fn0 的起始位置角
phi_20 = 360 * (1.5 - 2)/z;                              %安装在转盘后侧的 2 号滚子
phi_30 = 360 * (1.5 - 3)/z;                              %安装在转盘前侧的 3 号滚子
phi_40 = 360 * (1.5 - 4)/z;                              %安装在转盘后侧的 4 号滚子
%滚子中心 Fn0 到凸轮轴心 O1 的距离
R_20 = sqrt(C^2 + Rp^2 - 2 * C * Rp * cos(phi_20 * hd));  %安装在转盘后侧的 2 号滚子
R_30 = sqrt(C^2 + Rp^2 - 2 * C * Rp * cos(phi_30 * hd));  %安装在转盘前侧的 3 号滚子
R_40 = sqrt(C^2 + Rp^2 - 2 * C * Rp * cos(phi_40 * hd));  %安装在转盘后侧的 4 号滚子
%滚子中心到凸轮轴心的向径 Fn0 - O1 与凸轮滚子中心的连线 O1 - O2 之间的夹角
theta_20 = asin(Rp/R_20 * sin(phi_20 * hd));              %安装在转盘后侧的 2 号滚子
theta_30 = asin(Rp/R_30 * sin(phi_30 * hd));              %安装在转盘前侧的 3 号滚子
theta_40 = asin(Rp/R_40 * sin(phi_40 * hd));              %安装在转盘后侧的 4 号滚子
disp('        ========  共轭分度凸轮机构几何尺寸  ========')
fprintf('机构径距比                           RpC = %3.4f \n',RpC)
fprintf('凸轮基圆半径                          Rb = %3.4f mm \n',Rb)
fprintf('转盘节圆半径                          Rp = %3.4f mm \n',Rp)
fprintf('转盘滚子半径                          Rr = %3.4f mm \n',Rr)
fprintf('转盘滚子宽度                           b = %3.4f mm \n',b)
fprintf('滚子中心角                         phi_z = %3.4f 度 \n',phi_z)
fprintf('凸轮基准起始向径(F10 - O1)          R_10 = %3.4f mm \n',R_10)
fprintf('滚子中心 F20 到凸轮中心的距离       R_20 = %3.4f mm \n',R_20)
fprintf('滚子中心 F30 到凸轮中心的距离       R_30 = %3.4f mm \n',R_30)
fprintf('滚子中心 F40 到凸轮中心的距离       R_40 = %3.4f mm \n',R_40)
fprintf('转盘基准起始位置角(F10)           phi_10 = %3.4f 度 \n',phi_10)
fprintf('滚子中心 F20 的起始位置角         phi_20 = %3.4f 度 \n',phi_20)
fprintf('滚子中心 F30 的起始位置角         phi_30 = %3.4f 度 \n',phi_30)
fprintf('滚子中心 F40 的起始位置角         phi_40 = %3.4f 度 \n',phi_40)
fprintf('凸轮基准起始位置角(F10)         theta_10 = %3.4f 度 \n',theta_10/hd)
fprintf('滚子中心 F20 向径与中心连线夹角 theta_20 = %3.4f 度 \n',theta_20/hd)
fprintf('滚子中心 F30 向径与中心连线夹角 theta_30 = %3.4f 度 \n',theta_30/hd)
fprintf('滚子中心 F40 向径与中心连线夹角 theta_40 = %3.4f 度 \n',theta_40/hd)
fprintf('共轭凸轮安装相位角               theta_p = %3.4f 度 \n',theta_p/hd)
```

计算结果：

```
        ========  共轭分度凸轮机构几何尺寸 ========
机构径距比                              RpC = 0.4600
凸轮基圆半径                             Rb = 54.0000 mm
转盘节圆半径                             Rp = 46.0000 mm
转盘滚子半径                             Rr = 10.0000 mm
转盘滚子宽度                              b = 12.0000 mm
滚子中心角                            phi_z = 45.0000 度
凸轮基准起始向径(F10 - O1)             R_10 = 60.1357 mm
滚子中心 F20 到凸轮中心的距离          R_20 = 60.1357 mm
滚子中心 F30 到凸轮中心的距离          R_30 = 92.7109 mm
滚子中心 F40 到凸轮中心的距离          R_40 = 125.0467 mm
转盘基准起始位置角(F10)              phi_10 = 22.5000 度
```

```
滚子中心 F20 的起始位置角　　　　　　　phi_20 = -22.5000 度
滚子中心 F30 的起始位置角　　　　　　　phi_30 = -67.5000 度
滚子中心 F40 的起始位置角　　　　　　　phi_40 = -112.5000 度
凸轮基准起始位置角(F10)　　　　　　　theta_10 = 17.0214 度
滚子中心 F20 向径与中心连线夹角　　　theta_20 = -17.0214 度
滚子中心 F30 向径与中心连线夹角　　　theta_30 = -27.2838 度
滚子中心 F40 向径与中心连线夹角　　　theta_40 = -19.8684 度
共轭凸轮安装相位角　　　　　　　　　　theta_p = 145.9573 度
```

```
%3-共轭分度凸轮廓线计算
%1)与 1 号滚子相啮合的凸轮廓线坐标
%计算理论廓线辅助角
lambda_10 = atan2((C*cos(phi_10*hd)-Rp),(C*sin(phi_10*hd)));
lambda = lambda_10;
phi = phi_10;
%变量初始化
alpha = zeros(i_zhbx,1);phii = zeros(i_zhbx,1);
xt = zeros(i_zhbx,1);yt = zeros(i_zhbx,1);xk = zeros(i_zhbx,1);yk = zeros(i_zhbx,1);
Rt = zeros(i_zhbx,1);Pt = zeros(i_zhbx,1);Rk = zeros(i_zhbx,1);Pk = zeros(i_zhbx,1);
%计算凸轮廓线坐标(调用计算凸轮廓线坐标 M 文件:zhbx_xyRP.m)
[alpha,phii,xt,yt,xk,yk,Rt,Pt,Rk,Pk] = zhbx_xyRP(lambda,phi,zhbx,C,Rp,Rr,hd,i_zhbx);
%变量代换
alpha_10 = alpha;phii_1 = phii;
xt_1 = xt;yt_1 = yt;xk_1 = xk;yk_1 = yk;
Rt_1 = Rt;Pt_1 = Pt;Rk_1 = Rk;Pk_1 = Pk;
%输出计算结果:
fprintf('凸轮理论廓线计算辅助角　　lambda_10 = %3.4f 度 \n',lambda_10/hd)
disp('=====与 1 号滚子相啮合的凸轮理论廓线和工作廓线的直角坐标和极坐标=====')
['凸轮转角','xt_1','{理论} yt_1','xk_1','{工作} yk_1','Rt_1','{理论} Pt_1',
  'Rk_1','{工作} Pk_1']
[zhbx(:,1),xt_1,yt_1,xk_1,yk_1,Rt_1,Pt_1/hd,Rk_1,Pk_1/hd]
```

计算结果:

凸轮理论廓线计算辅助角　　lambda_10 = 50.4786 度

=====与 1 号滚子相啮合的凸轮理论廓线和工作廓线的直角坐标和极坐标=====

凸轮转角	xt_1{理论}	yt_1	xk_1{工作}	yk_1	Rt_1{理论}	Pt_1	Rk_1{工作}	Pk_1
0	60.1357	-0.0000	50.1357	-0.0000	60.1357	-0.0000	50.1357	-0.0000
30.0000	55.0310	29.0779	46.1106	24.5583	62.2409	27.8516	52.2427	28.0395
60.0000	45.2475	57.4870	38.7456	49.8892	73.1580	51.7940	63.1677	52.1659
90.0000	16.5170	91.2277	14.3300	81.4698	92.7109	79.7376	82.7205	80.0241
120.0000	-43.1924	103.0709	-39.5608	93.7536	111.7550	112.7364	101.7585	112.8781
150.0000	-101.9683	68.2359	-93.7089	62.5983	122.6934	146.2101	112.6938	146.2567
180.0000	-124.8924	6.2110	-114.9047	5.7143	125.0467	177.1530	115.0467	177.1530

```
%2)与 3 号滚子相啮合的凸轮廓线坐标
%在辅助坐标系 O1x'y'(x'轴与动坐标系 x 轴的夹角是:theta_10 + theta_30)中计算
```

```
%计算理论廓线辅助角
lambda_30 = atan2((C * cos(phi_30 * hd) - Rp),(C * sin(phi_30 * hd)));
lambda = lambda_30;
phi = phi_30;
%变量初始化
alpha = zeros(i_zhbx,1);phii = zeros(i_zhbx,1);
xt = zeros(i_zhbx,1);yt = zeros(i_zhbx,1);xk = zeros(i_zhbx,1);yk = zeros(i_zhbx,1);
Rt = zeros(i_zhbx,1);Pt = zeros(i_zhbx,1);Rk = zeros(i_zhbx,1);Pk = zeros(i_zhbx,1);
%计算凸轮廓线坐标(调用计算凸轮廓线坐标 M 文件:zhbx_xyRP.m)
[alpha,phii,xt,yt,xk,yk,Rt,Pt,Rk,Pk] = zhbx_xyRP(lambda,phi,zhbx,C,Rp,Rr,hd,i_zhbx);
%变量代换(辅助动坐标系 O1x' y' 中的坐标用_p 标识)
alpha_p = alpha;phii_p = phii;
xt_p = xt;yt_p = yt;xk_p = xk;yk_p = yk;
Rt_p = Rt;Pt_p = Pt;Rk_p = Rk;Pk_p = Pk;
%输出计算结果:
fprintf('    凸轮理论廓线计算辅助角         lambda_30 = %3.4f 度 \n',lambda_30/hd)
disp('     =====与 3 号滚子相啮合的凸轮理论廓线和工作廓线的辅助动坐标系坐标=====')
['凸轮转角' ',    xt_p', '{理论} yt_p',       xk_p',' {工作} yk_p',       Rt_p', '{理论} Pt_p', '
Rk_p',' {工作} Pk_p']
[zhbx(:,1),xt_p,yt_p,xk_p,yk_p,Rt_p,Pt_p/hd,Rk_p,Pk_p/hd]
```

计算结果：

```
    凸轮理论廓线计算辅助角          lambda_30 = -175.2162 度
          =====与 3 号滚子相啮合的凸轮理论廓线和工作廓线的辅助动坐标系坐标=====
```

凸轮转角	xt_p{理论}	yt_p	xk_p{工作}	yk_p	Rt_p{理论}	Pt_p	Rk_p{工作}	Pk_p
0	92.7109	0.0000	82.7109	0.0000	92.7109	0.0000	82.7109	0.0000
30.0000	77.5197	44.9344	68.9515	39.7784	89.6014	30.0988	79.6029	29.9808
60.0000	39.6229	65.6497	34.8047	56.8870	76.6802	58.8869	66.6895	58.5408
90.0000	10.7136	59.1737	9.3567	49.2662	60.1357	79.7376	50.1468	79.2464
120.0000	-0.6970	54.0656	-0.6151	44.0659	54.0701	90.7386	44.0702	90.7997
150.0000	-18.1293	55.3981	-15.1534	45.8512	58.2891	108.1209	48.2903	108.2883
180.0000	-43.0350	42.0036	-35.8787	35.0188	60.1357	135.6949	50.1357	135.6949

```
%检查与 3 号滚子相啮合的凸轮廓线之间区段的压力角
figure(3);
plot(zhbx(:,1),alpha_p/hd)
title('与 3 号滚子相啮合凸轮廓线区段的压力角变化线图')     %标注图形标题
grid;
xlabel('凸轮转角 \theta (^。)')                            %标注横轴
ylabel('机构压力角 \alpha (^。)')                          %标注纵轴

%与 3 号滚子相啮合的凸轮廓线辅助坐标 O1x' y' 转化为动坐标系 O1xy 中的坐标
%将凸轮廓线辅助坐标转化为动坐标(调用计算凸轮廓线坐标 M 文件:zhbx_xyRPd.m)
[xt_3,yt_3,xk_3,yk_3,Rt_3,Pt_3,Rk_3,Pk_3] = zhbx_xyRPd(theta_10,theta_30,xt_p,yt_p,xk_p,yk_
p,i_zhbx);
%输出计算结果:
disp('     ========与 3 号滚子相啮合的凸轮理论廓线和工作廓线的坐标========')
```

```
['凸轮转角'  ',   xt_3 ',{理论} yt_3 ',     xk_3 ,' {工作} yk_3 ',     Rt_3 ',{理论} Pt_3 ',
Rk_3 ,' {工作} Pk_3 ]
[zhbx(:,1),xt_3,yt_3,xk_3,yk_3,Rt_3,Pt_3/hd,Rk_3,Pk_3/hd]
```

计算结果：

========与 3 号滚子相啮合的凸轮理论廓线和工作廓线的坐标 ========

凸轮转角	xt_3{理论}	yt_3	xk_3{工作}	yk_3	Rt_3{理论}	Pt_3	Rk_3{工作}	Pk_3
0	66.3467	64.7566	59.1904	57.7719	92.7109	44.3051	82.7109	44.3051
30.0000	24.0897	86.3024	21.5594	76.6278	89.6014	74.4039	79.6029	74.2859
60.0000	−17.4996	74.6567	−14.8271	65.0204	76.6802	103.1921	66.6895	102.8459
90.0000	−33.6647	49.8297	−27.7155	41.7918	60.1357	124.0427	50.1468	123.5515
120.0000	−38.2625	38.2041	−31.2193	31.1053	54.0701	135.0437	44.0702	135.1048
150.0000	−51.6683	26.9816	−42.8703	22.2281	58.2891	152.4260	48.2903	152.5934
180.0000	−60.1357	0.0000	−50.1357	0.0000	60.1357	180.0000	50.1357	180.0000

```
%4-绘制共轭分度凸轮理论轮廓
figure(4);
plot(xt_1,yt_1','r',xt_3,yt_3','b')
title('共轭平面分度凸轮的理论轮廓曲线示意图')           %标注图形标题
Xh=[-(Rb+10) (Rb+10)];Yh=[0 0];
line (Xh,Yh)                                           %绘制横轴
Xz=[0 0];Yz=[-(Rb+10) (Rb+10)];
line (Xz,Yz)                                           %绘制纵轴
grid on;
axis equal                                             %横轴和纵轴比例相同
xlabel('x')                                            %标注横轴
ylabel('y')                                            %标注纵轴
hold on;                                               %保持图形
Phi=linspace(0,2*pi);                                  %圆的极角变化范围
plot(Rb*cos(Phi),Rb*sin(Phi)','m')                     %凸轮基圆
plot(xt_1(1)+Rr*cos(Phi),yt_1(1)+Rr*sin(Phi)','g')     %滚子 1 起始位置
plot(xt_3(1)+Rr*cos(Phi),yt_3(1)+Rr*sin(Phi)','g')     %滚子 3 起始位置
Yhj=linspace(0,theta_d*hd);                            %圆弧部分的极角变化范围
rbt=sqrt(xt_1(1)^2+yt_1(1)^2);
plot(rbt*cos(-Yhj),rbt*sin(-Yhj)','k');                %理论轮廓圆弧部分
gtext('基圆')                                          %交互式文本标注
gtext('1#滚子');gtext('3#滚子');
gtext('1#廓线');gtext('3#廓线');

%%相关的函数文件
%计算凸轮机构运动参数(zhbx_cs.m)
%转盘分度期采用组合摆线运动规律
function [zhbx,i_zhbx]=zhbx_cs(theta_f,phi_f,hd,omega_1,bc)
i_zhbx=0;
for theta=0:bc:theta_f
    i_zhbx=i_zhbx+1;
    if theta>=0 & theta<=theta_f/8                     %加速区段凸轮转角
```

```
            phi_2 = phi_f * hd/(pi +4) * (pi * theta/theta_f - 1/4 * sin(4 * pi * theta/theta_f));
            omega_2 = pi * phi_f/(pi +4)/theta_f * (1 - cos(4 * pi * theta/theta_f));
            epsilon_2 =4 * pi^2 * phi_f * hd/(pi +4)/(theta_f * hd)^2 * sin(4 * pi * theta/theta_f);
            zeta_2 =16 * pi^3 * phi_f * hd/(pi +4)/(theta_f * hd)^3 * cos(4 * pi * theta/theta_f);
            omega_2_1 = omega_2/omega_1;
            epsilon_2_1 = epsilon_2/omega_1^2;
        elseif theta >= theta_f/8 & theta <= theta_f * 7/8              %中间区段凸轮转角
            phi_2 = phi_f * hd/(pi +4) * (2 + pi * theta/theta_f - 9/4 * sin(pi/3 +4/3 * pi * theta/theta
_f));
            omega_2 = pi * phi_f/(pi +4)/theta_f * (1 - 3 * cos(pi/3 +4/3 * pi * theta/theta_f));
            epsilon_2 =4 * pi^2 * phi_f * hd/(pi +4)/(theta_f * hd)^2 * sin(pi/3 +4/3 * pi * theta/the-
ta_f);
            zeta_2 =16 * pi^3 * phi_f * hd/(pi +4)/(theta_f * hd)^3 * cos(pi/3 +4/3 * pi * theta/theta
_f);
            omega_2_1 = omega_2/omega_1;
            epsilon_2_1 = epsilon_2/omega_1^2;
        elseif theta >= theta_f * 7/8 & theta <= theta_f                 %减速区段凸轮转角
            phi_2 = phi_f * hd/(pi +4) * (4 + pi * theta/theta_f - 1/4 * sin(4 * pi * theta/theta_f));
            omega_2 = pi * phi_f/(pi +4)/theta_f * (1 - cos(4 * pi * theta/theta_f));
            epsilon_2 =4 * pi^2 * phi_f * hd/(pi +4)/(theta_f * hd)^2 * sin(4 * pi * theta/theta_f);
            zeta_2 =16 * pi^3 * phi_f * hd/(pi +4)/(theta_f * hd)^3 * cos(4 * pi * theta/theta_f);
            omega_2_1 = omega_2/omega_1;
            epsilon_2_1 = epsilon_2/omega_1^2;
        end
        zhbx(i_zhbx,:) = [theta phi_2 omega_2 epsilon_2 zeta_2 omega_2_1 epsilon_2_1];
end

%绘制共轭分度凸轮机构运动参数曲线(zhbx_tx.m)
functionzhbx_tx(zhbx,hd,theta_f)
%1)机构运动参数线图
figure(1);
subplot(4,1,1);                                        %选择第 1 个子窗口
plot(zhbx(:,1),zhbx(:,2)/hd)                           %绘制转盘的角位移线图
grid on                                                %栅格线
title('组合摆线运动参数线图')                          %标注图形名称
xlabel('凸轮转角 \it \theta / \rm(^。)')               %标注 x 轴
ylabel('转盘角位移 \it ^\phi2/ \rm(^。)')              %标注 y 轴

subplot(4,1,2);                                        %选择第 2 个子窗口
plot(zhbx(:,1),zhbx(:,3))                              %绘制转盘的角速度线图
grid on
xlabel('凸轮转角 \it \theta / \rm(^。)')
ylabel('转盘角速度 \it ^\omega2')

subplot(4,1,3);                                        %选择第 3 个子窗口
plot(zhbx(:,1),zhbx(:,4))                              %绘制转盘的角加速度线图
X = [0 theta_f];Y = [0 0];
line (X,Y)                                             %绘制 x 轴
```

```
grid on
xlabel('凸轮转角 \it \theta / \rm(^。)')
ylabel('转盘角加速度 \it ^\epsilon2')

subplot(4,1,4);                                    % 选择第 1 个子窗口
plot(zhbx(:,1),zhbx(:,5))                          % 绘制转盘的跃度线图
X = [0 theta_f];Y = [0 0];
line (X,Y)
grid on
xlabel('凸轮转角 \it \theta / \rm(^。)')
ylabel('转盘跃度 \it ^\zeta2')

%2)生成机构运动特性线图
figure(2);
subplot(2,1,1);                                    % 选择第 1 个子窗口
plot(zhbx(:,1),zhbx(:,6))                          % 绘制机构的角速度比线图
line (X,Y)
grid on                                            % 栅格线
title('组合摆线运动特性线图')                      % 标注图形名称
xlabel('凸轮转角 \it \theta / \rm(^。)')           % 标注 x 轴
ylabel('机构角速比 \it ^\omega2/^\omega1')         % 标注 y 轴

subplot(2,1,2);                                    % 选择第 2 个子窗口
plot(zhbx(:,1),zhbx(:,7))                          % 绘制机构的角加速度比线图
line (X,Y)
grid on
xlabel('凸轮转角 \it \theta / \rm(^。)')
ylabel('机构角加速比 \it ^\epsilon2/^{\omega}1^2')

%计算凸轮理论廓线和工作廓线的坐标值
function [alpha,phii,xt,yt,xk,yk,Rt,Pt,Rk,Pk] = zhbx_xyRP(lambda,phi,zhbx,C,Rp,Rr,hd,i_zhbx)
%凸轮转角 theta—数组 zhbx(:,1);转盘角位移 phi_2—数组 zhbx(:,2)
%凸轮理论廓线的直角坐标
xt = Rp * sin(hd. * zhbx(:,1) + zhbx(:,2) - lambda) - C * sin(hd. * zhbx(:,1) - phi * hd - lambda);
yt = - Rp * cos(hd. * zhbx(:,1) + zhbx(:,2) - lambda) + C * cos(hd. * zhbx(:,1) - phi * hd - lambda);
%转盘上 1 号滚子的位置角
phii = phi * hd + zhbx(:,2);        %phi 为滚子 1 或 3 中心的起始位置角:phi_10 或 phi_30
%机构压力角
%机构的角速度比(omega_2/omega_1)—数组 zhbx(:,6)
alpha_fz = C. * cos(phii) - Rp. * (1 + zhbx(:,6));           % 计算压力角的分子数组
alpha_fm = C. * sin(phii);                                   % 计算压力角的分母数组
alpha = atan2(alpha_fz,alpha_fm);
%凸轮工作廓线的直角坐标
xk = xt - Rr. * cos(hd. * zhbx(:,1) + zhbx(:,2) - lambda + alpha);
yk = yt - Rr. * sin(hd. * zhbx(:,1) + zhbx(:,2) - lambda + alpha);
%计算凸轮廓线的极坐标
```

```
% 凸轮理论廓线
Rt = sqrt( xt. ^2 + yt. ^2 ) ;
Pt = atan2( yt, xt ) ;
% 凸轮工作廓线
Rk = sqrt( xk. ^2 + yk. ^2 ) ;
Pk = atan2( yk, xk ) ;

% 与 3 号滚子相啮合的凸轮廓线辅助坐标 O1x̃ ỹ 转化为动坐标系 O1xy 中坐标( zhbx_xyRPd. m)
function [ xt_3, yt_3, xk_3, yk_3, Rt_3, Pt_3, Rk_3, Pk_3 ] = zhbx_xyRPd( theta_10, theta_30, xt_p, yt_p,
xk_p, yk_p, i_zhbx) ;
xt_3 = xt_p * cos( theta_10 - theta_30) - yt_p * sin( theta_10 - theta_30) ;
yt_3 = xt_p * sin( theta_10 - theta_30) + yt_p * cos( theta_10 - theta_30) ;
xk_3 = xk_p * cos( theta_10 - theta_30) - yk_p * sin( theta_10 - theta_30) ;
yk_3 = xk_p * sin( theta_10 - theta_30) + yk_p * cos( theta_10 - theta_30) ;
% 计算凸轮廓线的极坐标
% 凸轮理论廓线
Rt_3 = sqrt( xt_3. ^2 + yt_3. ^2 ) ;
Pt_3 = atan2( yt_3, xt_3) ;
% 凸轮工作廓线
Rk_3 = sqrt( xk_3. ^2 + yk_3. ^2 ) ;
Pk_3 = atan2( yk_3, xk_3) ;
```

输出的凸轮 3 号廓线的压力角变化情况线图如图 11-16 所示。

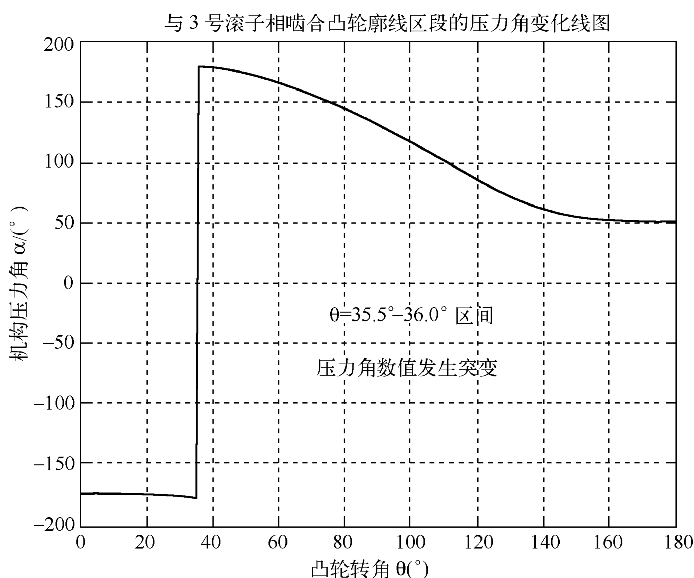


图 11-16　3 号廓线的压力角变化情况线图

输出的共轭平面分度凸轮轮廓曲线的形成如图 11-17 所示。

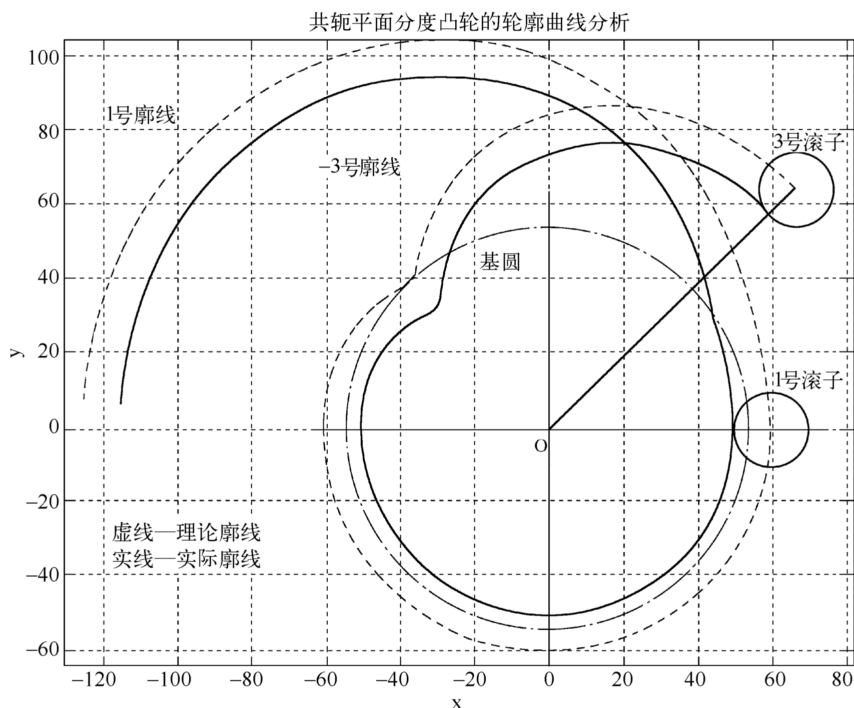


图 11−17　凸轮轮廓曲线的形成

11.4　圆柱分度凸轮机构设计和运动分析

圆柱分度凸轮机构是一种常用的较精确的间歇分度机构，主动凸轮一般作连续旋转，从动转盘作间歇步进转位运动。从动转盘的分度数（从动转盘旋转一周的停歇次数）是 6～24 次（共轭平面分度凸轮机构是 1～16 次），从动转盘最高分度精度(15～30)″（与共轭平面分度凸轮机构相同），主动凸轮最高转速是 300 r/min（共轭平面分度凸轮机构是 1000 r/min），适用于中低速、中轻载的工作场合（共轭平面分度凸轮机构是中高速、轻载）。它的制造成本高（共轭平面分度凸轮机构是中等），加工设备要求是至少有一个回转坐标的数控机床（加工共轭平面分度凸轮只需要普通的数控机床）。

如图 11−18a 所示，主动凸轮 1 是圆柱体，从动转盘 2 上安装有几个沿圆周方向均布的滚子，其轴线与转盘轴线平行，凸轮和转盘的轴线交错垂直。当凸轮旋转时，其分度轮廓推动滚子使转盘分度转位；当凸轮转动到停歇段轮廓时，转盘上的两个滚子跨夹在凸轮圆环面凸脊上使转盘定位。圆柱滚子与凸轮轮廓之间的间隙较难补偿，容易产生跨越冲击。滚子轴的刚度及与凸轮的啮合特性不如弧面分度凸轮机构，但是它比弧面分度凸轮机构容易制造，而且从结构上可以比弧面分度凸轮机构沿同样尺寸的转盘上能分布更多的滚子数。圆柱分度凸轮分度轮廓也有左旋、右旋和单头、多头之分。

例 11−4　设计灯管装配转位机构中的圆柱分度凸轮机构。已知条件：凸轮转速 n =

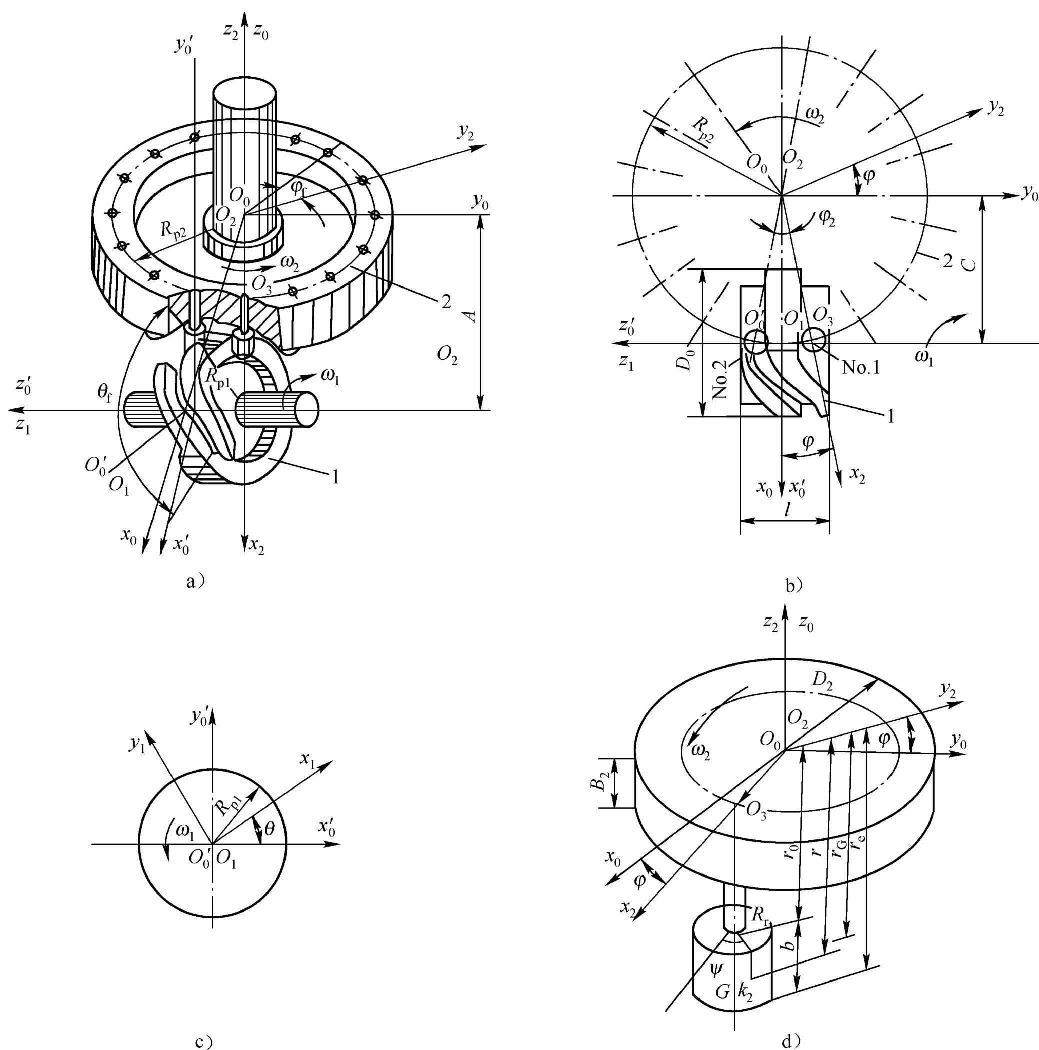


图 11-18　圆柱分度凸轮机构

100 r/min，连续回转，转盘 16 工位，中心距 $C=200$ mm。

11.4.1　凸轮机构的主要运动参数分析

（1）凸轮角速度 ω_1

$$\omega_1=\frac{\pi n}{30}=\frac{100\pi}{30}=\frac{10}{3}\pi\quad(\mathrm{s}^{-1})\tag{11-32}$$

（2）凸轮分度期转角 θ_f 和停歇期转角 θ_d　通常可取 $\theta_f=120°\sim240°$，在满足机构动停比 K 的要求时，宜取较大值。本例取 $\theta_f=120°$。

凸轮停歇期转角

$$\theta_d=360°-\theta_f=360°-120°=240°\tag{11-33}$$

（3）凸轮角位移 θ　以凸轮分度期开始为 $\theta=0°$，计算步长为 $\Delta\theta=1°\sim2°$。

（4）机构分度期时间 t_f 和停歇期时间 t_d

$$t_f = \frac{\theta_f}{\omega_1} = \frac{2\pi/3}{10\pi/3} = 0.2 \quad (s)$$

$$t_d = \frac{2\pi}{\omega_1} - t_f = \frac{2\pi}{10\pi/3} - 0.2 = 0.4 \quad (s) \tag{11-34}$$

或

$$t_d = \frac{\theta_d}{\omega_1} = \frac{4\pi/3}{10\pi/3} = 0.4 \quad (s)$$

（5）凸轮分度廓线旋向和旋向系数 p　L 表示左旋，旋向系数 $p = +1$；R 表示右旋，旋向系数 $p = -1$。本例选择右旋 R，旋向系数 $p = -1$。

（6）凸轮分度廓线头数 H　$H = 1 \sim 4$，本例选择单头 $H = 1$。

（7）转盘分度数 I（转盘每转一周中的停歇次数）　按照工作机械要求的工位数选取 $I = 16$。

（8）转盘滚子数 z（包括转盘的前后两个端面上的滚子）

$$z = HI = 1 \times 16 = 16 \tag{11-35}$$

（9）转盘分度期转位角 φ_f

$$\varphi_f = 360°/I = 360°/16 = 22.5° \tag{11-36}$$

（10）转盘分度期运动规律　选用基本运动规律中的正弦加速度运动规律（摆线运动），从动件加速度曲线连续，行程始末加速度等于零，跃度为有限值突变。起动平稳，导路侧压力小，冲击和磨损较轻，适用于中、高速轻载。但始、末区段位移变化缓慢，导致中间区段的速度和加速度幅度偏大，对加工要求较高。

正弦加速度运动规律（摆线运动）的特性值（无量纲运动参数速度因数、加速度因数、跃动因数和惯性矩因数的最大值）是

$$\left.\begin{aligned}
V_m &= \left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)_{max}\frac{\theta_f}{\varphi_f} = 2.00 \\
A_m &= \left(\frac{d^2\varphi}{d\theta^2}\right)_{max}\frac{\theta_f^2}{\varphi_f} = \pm 6.28 \\
J_m &= \left(\frac{d^3\varphi}{d\theta^3}\right)_{max}\frac{\theta_f^3}{\varphi_f} = \pm 39.5 \\
T_m &= \left(\frac{d\varphi}{d\theta}\frac{d^2\varphi}{d\theta^2}\right)_{max}\frac{\theta_f^3}{\varphi_f^2} = \pm 8.16
\end{aligned}\right\} \tag{11-37}$$

上述各式中，φ 是转盘角位移，φ_f 是转盘分度期转位角；θ 是凸轮转角，θ_f 是凸轮分度期转角。其中，A_m、J_m 和 T_m 中的正值表示加速部分，负值表示减速部分。

（11）转盘分度期的运动分析（凸轮分度期转角 $\theta = 0 \sim \theta_f$）　摆线运动推程的类角位移、类角速度、类角加速度和类跃度为

$$\left.\begin{aligned}\varphi_2&=\varphi_f\left(\frac{\theta}{\theta_f}-\frac{1}{2\pi}\sin\frac{\theta}{\theta_f}2\pi\right)\\ \omega_2&=\frac{\varphi_f}{\theta_f}\omega_1\left(1-\cos\frac{\theta}{\theta_f}2\pi\right)\\ \varepsilon_2&=\frac{2\pi\varphi_f}{\theta_f^2}\omega_1^2\sin\frac{\theta}{\theta_f}2\pi\\ \zeta_2&=\frac{4\pi^2\varphi_f}{\theta_f^3}\omega_1^3\cos\frac{\theta}{\theta_f}2\pi\end{aligned}\right\}\tag{11-38}$$

（12）机构在分度期的最大角速度比$(\omega_2/\omega_1)_{max}$、最大角速度 ω_{2max}、最大角加速度 ε_{2max} 和最大跃度 ζ_{2max}

$$\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)_{max}=V_{max}\frac{\varphi_f}{\theta_f}=2.00\times\frac{22.5°}{120°}=0.375$$

$$\omega_{2max}=V_{max}\frac{\varphi_f}{\theta_f}\omega_1=2.00\times\frac{22.5}{120°}\times\frac{10\pi}{3}=3.927\quad(s^{-1})\tag{11-39}$$

$$\varepsilon_{2max}=A_{max}\varphi_f\frac{\omega_1^2}{\theta_f^2}=6.28\times\left(\frac{22.5°}{180°}\pi\right)\frac{(10\pi/3)^2}{(2\pi/3)^2}=61.654\quad(s^{-2})$$

$$\zeta_{2max}=J_{max}\varphi_f\frac{\omega_1^3}{\theta_f^3}=39.5\times\left(\frac{22.5°}{180°}\pi\right)\times\frac{(10\pi/3)^3}{(2\pi/3)^3}=1938.952\quad(s^{-2})$$

（13）机构动停比 K 和运动系数 τ　机构分度期时间 t_f和停歇期时间 t_d

$$t_f=\frac{\theta_f}{\omega_1}=\frac{2\pi/3}{10\pi/3}=0.2\quad(s)\tag{11-40}$$

$$t_d=\frac{\theta_d}{\omega_1}=\frac{4\pi/3}{10\pi/3}=0.4\quad(s)$$

机构动停比和运动系数

$$K=\frac{t_f}{t_d}=\frac{0.2}{0.4}=0.5\tag{11-41}$$

$$\tau=\frac{t_f}{(t_d+t_f)}=\frac{0.2}{(0.2+0.4)}=\frac{1}{3}\tag{11-42}$$

11.4.2 凸轮机构主要几何尺寸计算

（1）机构中心距 C　给定 $C=200$ mm。

（2）基距 A　凸轮轴线到转盘基准端面 $O_2X_2Y_2$之间的垂直距离，选定 $A=180$ mm。

（3）许用压力角 α_p　一般为 $\alpha_p=30°\sim40°$，取 $\alpha_p=36°$。

（4）转盘节圆半径 R_{p2}

$$R_{p2}\approx\frac{2C}{1+\cos(\varphi_2/2)}=\frac{2\times200}{1+\cos(22.5°/2)}=201.94\tag{11-43}$$

取 $R_{p2}=202$ mm。

（5）凸轮节圆半径 R_{p1}

$$R_{p1}\geqslant\frac{\varphi_f V_{max}R_{p2}}{\theta_f\tan\alpha_p}=\frac{22.5°\times2.00\times202}{120°\times\tan36°}=104.26 \tag{11-44}$$

取 $R_{p1}=130$ mm。

（6）滚子中心角 φ_z

$$\varphi_z=\frac{360°}{z}=\frac{360°}{16}=22.5° \tag{11-45}$$

（7）滚子半径 R_r 和滚子宽度 b　滚子半径的取值范围是

$$R_r\leqslant(0.4\sim0.6)R_{p2}\sin\frac{180}{z}=(0.4\sim0.6)\times202\sin\frac{180}{16}=15.76\sim23.64 \tag{11-46}$$

取 $R_r=15$ mm。

滚子宽度的取值范围是

$$b=(1.0\sim1.4)R_r=(1.0\sim1.4)\times15=15\sim21 \tag{11-47}$$

取 $b=20$ mm。

（8）滚子与凸轮槽底的间隙 e　间隙的取值范围是

$$e=(0.2\sim0.4)R_r=(0.2\sim0.4)\times15=3\sim6 \tag{11-48}$$

由于 e 至少为 10～15，所以取 $e=10$ mm。

（9）凸轮定位环面的径向深度 h

$$h=b+e=20+10=30\text{ mm} \tag{11-49}$$

（10）凸轮定位环面的外圆直径 D_o

$$D_o=2R_{p1}+b=2\times140+20=300\text{ mm} \tag{11-50}$$

（11）凸轮定位环面的外圆直径 D_i

$$D_i=D_o-2h=300-2\times30=240\text{ mm} \tag{11-51}$$

（12）凸轮宽度 l

$$l_{min}=2R_{p2}\sin\frac{\varphi_f}{2}=2\times202\sin\frac{22.5°}{2}=78.82 \tag{11-52}$$

$$l_{max}=2R_{p2}\sin\frac{\varphi_f}{2}+2R_r=2\times202\sin\frac{22.5°}{2}+2\times15=108.82$$

取 $l=100$ mm。

（13）转盘的外圆直径 D_2

$$D_2\geqslant2(R_{p2}+R_r)=2(202+15)=434 \tag{11-53}$$

取 $D_2=440$ mm。

（14）转盘基准端面到滚子宽度中点的轴向距离 r_G

$$r_G\geqslant A-R_{p1}=180-130=50\text{ mm} \tag{11-54}$$

（15）转盘基准端面到滚子上端面的轴向距离 r_o

$$r_o\geqslant r_G-\frac{b}{2}=50-\frac{20}{2}=40\text{ mm} \tag{11-55}$$

（16）转盘基准端面到滚子下端面的轴向距离 r_e

$$r_e \geqslant r_G + \frac{b}{2} = 50 + \frac{20}{2} = 60\ \text{mm} \tag{11-56}$$

11.4.3 圆柱分度凸轮工作轮廓计算

1）选取四种右手直角坐标系：

① 与机架相连的定坐标系 $O_0X_0Y_0Z_0$；

② 与机架相连的辅助定坐标系 $O_0X_0'Y_0'Z_0'$，面对 Z_0' 的箭头看，ω_1 是逆时针方向；

③ 与凸轮相连的动坐标系 $O_1X_1Y_1Z_1$；

④ 与转盘相连的动坐标系 $O_2X_2Y_2Z_2$。

2）计算凸轮转角 θ 对应转盘角位移 φ_i（$0 \leqslant \varphi_i \leqslant \varphi_f$）、机构角速度比（$\omega_2/\omega_1$）和滚子位置角 φ

$$\varphi = \varphi_0 - p\varphi_i \tag{11-57}$$

式中，1 号、2 号和 3 号各个滚子的位置角：$\varphi_{01} = -\frac{\varphi_z}{2}$，$\varphi_{02} = p\frac{\varphi_z}{2}$，$\varphi_{03} = 3p\frac{\varphi_z}{2}$。

3）转盘节圆半径处压力角

$$\tan\alpha = \left| \frac{r_{p2}(\omega_2/\omega_1)}{C - r_{p2}\cos\varphi} \right| \tag{11-58}$$

4）设定与凸轮转角 θ 对应的一系列参数 r 值（r 是滚子圆柱形工作面上一个啮合点到转盘基准面的距离，$r = r_o \rightarrow r_e$，$\Delta r = 1 \sim 2$ mm），将滚子位置角 φ 和机构角速度比（ω_2/ω_1）代入，由凸轮与滚子的共轭接触方程式计算滚子啮合角 ψ

$$\tan\psi = \frac{p}{C}\left[\frac{R_{p2}}{(A-r)\cos\varphi}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) - \tan\varphi\right] \tag{11-59}$$

同一个参数 r 有两个参数 ψ，$\psi < 90°$用于凸轮轮廓 R，$\psi \geqslant 180°$用于凸轮轮廓 L。

5）将同一个凸轮转角 θ 对应的曲面参数 r 与 ψ 值，代入滚子圆柱面在动坐标系 $O_2X_2Y_2Z_2$ 中的方程式，求出滚子圆柱面上的共轭接触点在动坐标系 $O_2X_2Y_2Z_2$ 中的三维坐标（x_2，y_2，z_2）

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= R_{p2} + R_r\cos\psi \\ y_2 &= R_r\cos\psi \\ z_2 &= -r \end{aligned}\right\} \tag{11-60}$$

6）将同一个凸轮转角 θ 对应的滚子位置角 φ 和滚子圆柱面上共轭接触点三维坐标（x_2，y_2，z_2），代入凸轮工作轮廓在动坐标系 $O_1X_1Y_1Z_1$ 中的三维坐标（x_1，y_1，z_1）

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= (x_2\cos\varphi + py_2\sin\varphi - C)\cos\theta + (z_2 + A)\sin\theta \\ y_1 &= (-x_2\cos\varphi - py_2\sin\varphi + C)\sin\theta + (z_2 + A)\cos\theta \\ z_1 &= px_2\sin\varphi - y_2\cos\varphi \end{aligned}\right\} \tag{11-61}$$

7）当凸轮转角 $\theta = \theta_f \rightarrow 360°$期间，转盘停歇，故 $\theta = 0°$和 $\theta = \theta_f$ 时的（x_1，y_1，z_1）即为凸轮定位环面的三维坐标。

应当指出，计算滚子啮合角 ψ、滚子圆柱面上的共轭接触点的三维坐标（x_2，y_2，z_2）和凸轮工作轮廓的三维坐标（x_1，y_1，z_1）时，需要建立三维数组。由于在 MATLAB 中第 3 维是作为数据平面（plane）处理，所以各维分别表示：外循环对应凸轮转角 $\theta = 0° \rightarrow \theta_f$ 步长

序列，中循环对应滚子圆柱面距离参数 $r = r_0 \to r_e$ 序列，内循环对应滚子 1 号、2 号、3 号序列。在内循环中计算滚子圆柱面共轭接触点的三维坐标（x_2，y_2，z_2）或凸轮工作轮廓的三维坐标（x_1，y_1，z_1）。

11.4.4　圆柱分度凸轮机构的结构设计要点

1）转盘轴线与凸轮轴线垂直交错。转盘轴线位于凸轮定位环面的对称平面上，以保证凸轮定位环面与左右两侧的滚子接触良好。

2）凸轮的轴向位置装配时能够调整。转盘每个滚子的轴向位置都能够装配时单独调整，以保证每个滚子在转盘上的轴向位置有较高的一致性。

3）滚子与凸轮定位环面的啮合间隙一般常用 IT6 或 IT7，如 H7/h6。

11.4.5　M 文件和计算结果

```
%圆柱分度凸轮机构设计计算
%函数文件 1:绘制凸轮机构运动曲线(zxjs_ydxt.m)
%函数文件 2:整理圆柱分度凸轮轮廓曲面三维坐标数据(zxjs_3Dzb.m)

disp'    用键盘输入已知条件'
n = input( 凸轮转速(r/min)           n =' );
disp'    * 机构中心距 C:凸轮轴线 z1 到转盘轴线 z2 的距离
C = input( 机构中心距(mm)            C =' );
disp'    * 机构基距 A:凸轮轴线 z1 到转盘基准端面 O2x2y2 的距离
A = input( 机构基距(mm)              A =' );
disp'    * 选择凸轮头数   H = 1、2、3、4'
H = input( 凸轮头数                  H =' );
disp'    * 选择凸轮分度期转角   theta_f = 120 ~ 240 度'
theta_f = input( 凸轮分度期转角(度)   theta_f =' );
disp'    * 选择转盘分度数(按照工作机械工位要求)
I = input( 转盘分度数                I =' );
disp'    * 选择凸轮分度廓线旋向(左旋 L、右旋 R)'
LXX = input( 凸轮分度廓线旋向        LXX =' ,'s' );

% 1 - 圆柱分度凸轮机构运动分析
%凸轮角速度
omega_1 = pi * n/30;
%转盘滚子数
z = H * I;
%凸轮停歇期转角
theta_d = 360 - theta_f;
%转盘分度期转位角
phi_f = 360/I;
%机构分度期时间 t_f 和停歇期时间 t_d
hd = pi/180.0;                                    %角度转换为弧度的系数
t_f = theta_f * hd/omega_1;
```

```
t_d = theta_d * hd/omega_1;
%机构动停比 k 和运动系数 tau
k = t_f/t_d;
tau = t_f/(t_f + t_d);
%凸轮分度廓线旋向系数
if LXX == 'L'
    p = 1;
elseif LXX == 'R'
    p = -1;
end
disp('======== 圆柱分度凸轮机构基本数据 =======')
fprintf('     凸轮转速             n = %3.4f r/min \n',n)
fprintf('     机构中心距           C = %3.4f mm \n',C)
fprintf('     机构基距             A = %3.4f mm \n',A)
fprintf('     凸轮头数             H = %3.0f \n',H)
fprintf('     凸轮分度廓线旋向   LXX = %s \n',LXX)
fprintf('     转盘分度数           I = %3.0f \n',I)
fprintf('     转盘滚子数           z = %3.0f \n',z)
fprintf('     凸轮角速度     omega_1 = %3.4f 1/s \n',omega_1)
fprintf('     凸轮分度期转角  theta_f = %3.4f 度 \n',theta_f)
fprintf('     凸轮停歇期转角  theta_d = %3.4f 度 \n',theta_d)
fprintf('     转盘分度期转角    phi_f = %3.4f 度 \n',phi_f)
fprintf('     机构分度期时间      t_f = %3.4f s \n',t_f)
fprintf('     机构停歇期时间      t_d = %3.4f s \n',t_d)
fprintf('     机构动停比            k = %3.4f \n',k)
fprintf('     机构运动系数        tau = %3.4f \n',tau)

%计算凸轮机构运动参数
bc_theta = 1;                                   %转角分度步长 1~2 度
%转盘分度期采用正弦加速运动规律
i_zxjs = 0;
for theta = 0:bc_theta:theta_f
    i_zxjs = i_zxjs + 1;
    phi_2 = phi_f * hd * (theta/theta_f - sin(2 * pi * theta/theta_f)/(2 * pi));
    omega_2 = omega_1 * phi_f/theta_f * (1 - cos(2 * pi * theta/theta_f));
    epsilon_2 = omega_1^2 * 2 * pi * phi_f/theta_f^2 * sin(2 * pi * theta/theta_f);
    zeta_2 = omega_1^3 * 4 * pi^2 * phi_f/theta_f^3 * cos(2 * pi * theta/theta_f);
    omega_2_1 = omega_2/omega_1;
    epsilon_2_1 = epsilon_2/omega_1^2;
    zxjs(i_zxjs,:) = [theta phi_2 omega_2 epsilon_2 zeta_2 omega_2_1 epsilon_2_1];
end
fprintf('     正弦加速运动参数数组行数     i_zxjs = %3.0f \n',i_zxjs)
%输出圆柱分度凸轮机构运动参数
['  凸轮转角 ','  转盘角位移 ','  角速度 ','  角加速度 ','   跃度 ','  角速度比 ','  角加速度比 ']
[zxjs(:,1),zxjs(:,2)/hd,zxjs(:,3),zxjs(:,4),zxjs(:,5),zxjs(:,6),zxjs(:,7)]
```

```
disp'          圆柱分度凸轮机构运动参数的最大值
Vm = 2.00;Am = 6.28;Jm = 39.5;                    % 正弦加速运动部分的特征值
omega_2_1_max = Vm * phi_f/theta_f;
omega_2_max = Vm * phi_f/theta_f * omega_1;
epsilon_2_max = Am * phi_f/theta_f^2 * omega_1^2;
zeta_2_max = Jm * phi_f/theta_f^3 * omega_1^3;
fprintf(   最大角速度比      omega_2_1_max = %3.4f \n' ,omega_2_1_max);
fprintf(   最大角速度          omega_2_max = %3.4f \n' ,omega_2_max);
fprintf(   最大角加速度       epsilon_2_max = %3.4f \n' ,epsilon_2_max);
fprintf(   最大跃度              zeta_2_max = %3.4f \n' ,zeta_2_max);

% 绘制凸轮机构运动曲线(调用正弦加速绘图 M 文件:zxjs_ydxt.m)
zxjs_ydxt(zxjs,hd,theta_f)
% 导出 fig 图形命令:openfig( YZ200 - H1 - I16 - R_ydxt' );

% 2 - 圆柱分度凸轮机构几何尺寸计算
disp'   圆柱分度凸轮机构许用压力角一般为 30 ~40 度
alpha_p = input( 确定许用压力角(度) alpha_p =' );
% 转盘节圆半径
Rp_2j = 2 * C/(1 + cos(phi_f * hd/2));                 % 转盘节圆半径计算值
Rp_2 = round(Rp_2j + 0.5);                             % 对转盘节圆半径计算值四舍五入
% 凸轮节圆半径
Rp_1j = Vm * Rp_2 * phi_f/theta_f/tan(alpha_p * hd);% 凸轮节圆半径计算值
fprintf(   凸轮节圆半径计算值        Rp_1j = %3.4f mm \n' ,Rp_1j);
Rp_1 = input( 确定凸轮节圆半径(mm)   Rp_1 =' );
% 转盘滚子中心角
phi_z = 360/z;
% 转盘滚子半径(fix 是朝 0 方向取整函数)
fprintf(   转盘滚子半径最小值 Rrmin = %3.4f mm \n' ,fix(0.4 * Rp_2 * sin(pi/z)));
fprintf(   转盘滚子半径最大值 Rrmax = %3.4f mm \n' ,fix(0.6 * Rp_2 * sin(pi/z)));
Rr = input( 确定滚子半径(mm)   Rr =' );
% 转盘滚子宽度
fprintf(   转盘滚子宽度最小值    bmin = %3.4f mm \n' ,fix(Rr));
fprintf(   转盘滚子宽度最大值    bmax = %3.4f mm \n' ,fix(1.4 * Rr));
b = input( 确定滚子宽度(mm)      b =' );
% 转盘滚子与凸轮槽底之间的间隙
fprintf(   转盘滚子与凸轮槽底间隙的最小值 emin = %3.4f mm \n' ,fix(0.2 * b));
fprintf(   转盘滚子与凸轮槽底间隙的最大值 emax = %3.4f mm \n' ,fix(0.4 * b));
disp'   转盘滚子与凸轮槽底至少取间隙值      e = 5 ~10 mm'
e = input( 确定滚子与凸轮槽底的间隙(mm)   e =' );
% 凸轮定位环面的径向深度
h = b + e;
% 凸轮定位环面的外圆直径
Do = 2 * Rp_1 + b;
% 凸轮定位环面的内圆直径
Di = Do - 2 * h;
```

```
%凸轮宽度
fprintf('   凸轮宽度的最小值      Lmin = %3.4f mm \n',fix(2 * Rp_2 * sin(phi_f * hd/2)));
fprintf('   凸轮宽度的最大值      Lmax = %3.4f mm \n',fix(2 * Rp_2 * sin(phi_f * hd/2) + 2 *
Rr));
L = input('确定凸轮宽度(mm)      L = ');
%转盘的外圆直径
fprintf('   转盘外圆直径的最小值      D_2min = %3.4f mm \n',2 * (Rp_2 + Rr));
D_2 = input('确定转盘外圆直径(mm)      D_2 = ');
%转盘基准端面到滚子宽度中点的轴向距离
rG = A - Rp_1;
%转盘基准端面到滚子上端面的轴向距离
rO = rG - b/2;
%转盘基准端面到滚子下端面的轴向距离
re = rG + b/2;
%输出圆柱分度凸轮机构几何尺寸计算结果
disp'          ========  圆柱分度凸轮机构几何尺寸   ========'
fprintf('   许用压力角                          alpha_p = %3.4f° \n',alpha_p);
fprintf('   凸轮节圆半径                           Rp_1 = %3.4f mm \n',Rp_1);
fprintf('   转盘节圆半径                           Rp_2 = %3.4f mm \n',Rp_2);
fprintf('   转盘滚子中心角                          phi_z = %3.4f° \n',phi_z);
fprintf('   滚子半径                                 Rr = %3.4f mm \n',Rr);
fprintf('   滚子宽度                                  b = %3.4f mm \n',b);
fprintf('   转盘滚子与凸轮槽底间隙                     e = %3.4f mm \n',e);
fprintf('   凸轮定位环面的径向深度                     h = %3.4f mm \n',h);
fprintf('   凸轮定位环面的外圆直径                    Do = %3.4f mm \n',Do);
fprintf('   凸轮定位环面的内圆直径                    Di = %3.4f mm \n',Di);
fprintf('   凸轮宽度                                  L = %3.4f mm \n',L);
fprintf('   转盘外圆直径                            D_2 = %3.4f mm \n',D_2);
fprintf('   转盘基准端面到滚子上端面的轴向距离        rO = %3.4f mm \n',rO);
fprintf('   转盘基准端面到滚子宽度中点轴向距离        rG = %3.4f mm \n',rG);
fprintf('   转盘基准端面到滚子上端面的轴向距离        re = %3.4f mm \n',re);

% 3 - 圆柱分度凸轮机构压力角的计算
% 1号、2号、3号滚子的起始位置角(单位:度)
phi0_1 = -p * 0.5 * phi_z;
phi0_2 = p * 0.5 * phi_z;
phi0_3 = p * 1.5 * phi_z;
%计算1号、2号、3号滚子位置角(单位:度)
phi = zeros(i_zxjs,3);                      % 变量初始化
phi1 = phi0_1 - p. * zxjs(:,2);             % zxjs(:,2)存储转盘角位移 phi_2
phi2 = phi0_2 - p. * zxjs(:,2);
phi3 = phi0_3 - p. * zxjs(:,2);
phi = [phi1 phi2 phi3];                     %行 - theta,列 - 滚子位置角
%转盘节圆半径处的压力角
%机构的角速度比(omega_2/omega_1)—数组 zxjs(:,6)
alpha_fz = Rp_2. * zxjs(:,6);               % 计算压力角的分子数组
```

```
alpha_fm_1 = C - Rp_2. * cos( phi( :,1) );                %计算 1 号滚子压力角的分母数组
alpha_1 = atan2( alpha_fz,alpha_fm_1);
alpha_fm_2 = C - Rp_2. * cos( phi( :,2) );                %计算 2 号滚子压力角的分母数组
alpha_2 = atan2( alpha_fz,alpha_fm_2);
alpha_fm_3 = C - Rp_2. * cos( phi( :,3) );                %计算 3 号滚子压力角的分母数组
alpha_3 = atan2( alpha_fz,alpha_fm_3);
%绘制转盘节圆半径处与 1 号、2 号、3 号滚子相啮合的压力角变化线图
figure(2);
subplot(3,1,1);
plot( zxjs( :,1),alpha_1/hd);
title('转盘节圆半径处与 1 号滚子相啮合的压力角变化线图');
grid;
xlabel('凸轮转角 \theta (^。)');
ylabel('机构压力角 \alpha (^。)');
subplot(3,1,2);
plot( zxjs( :,1),alpha_2/hd)
title('转盘节圆半径处与 2 号滚子相啮合的压力角变化线图');
grid;
xlabel('凸轮转角 \theta (^。)');
ylabel('机构压力角 \alpha (^。)');
subplot(3,1,3);
plot( zxjs( :,1),alpha_3/hd);
title('转盘节圆半径处与 3 号滚子相啮合的压力角变化线图');
grid;
xlabel('凸轮转角 \theta (^。)');
ylabel('机构压力角 \alpha (^。)');
%保存的 fig 图形可以用 openfig('YZ200 - H1 - I16 - R_ylj123')命令导出

%转盘节圆半径处与 1 号滚子相啮合的最大压力角
alpha_1_max = max( alpha_1)/hd;
theta_alpha_1 = [ zxjs( :,1),alpha_1/hd];                %合成凸轮转角和对应压力角数组
theta_1m_xh = find( theta_alpha_1( :,2) = = alpha_1_max);  %查找最大压力角对应凸轮转角数列的序号
theta_1m = theta_alpha_1( theta_1m_xh,1);
fprintf('    转盘节圆半径处与 1 号滚子相啮合的最大压力角        alpha_1_max = %3.4f 度 \n',
alpha_1_max);
fprintf('                    与最大压力角对应的凸轮转角值                theta_1m = %3.4f 度 \n',
theta_1m);
if alpha_1_max < = alpha_p
    disp'     * 转盘节圆半径处与 1 号滚子相啮合的最大压力角小于许用压力角
else
    disp'     * 转盘节圆半径处与 1 号滚子相啮合的最大压力角大于许用压力角
end
%转盘节圆半径处与 2 号滚子相啮合的最大压力角
alpha_2_max = max( alpha_2)/hd;
theta_alpha_2 = [ zxjs( :,1),alpha_2/hd];
theta_2m_xh = find( theta_alpha_2( :,2) = = alpha_2_max);
```

```
theta_2m = theta_alpha_2(theta_2m_xh,1);
fprintf('    转盘节圆半径处与 2 号滚子相啮合的最大压力角          alpha_2_max = %3.4f °\n',alpha_2_max);
fprintf('                  与最大压力角对应的凸轮转角值                  theta_2m = %3.4f °\n',theta_2m);
if alpha_2_max < = alpha_p
    disp('          * 转盘节圆半径处与 2 号滚子相啮合的最大压力角小于许用压力角')
else
    disp('          * 转盘节圆半径处与 2 号滚子相啮合的最大压力角大于许用压力角')
end
%转盘节圆半径处与 3 号滚子相啮合的最大压力角
alpha_3_max = max(alpha_3)/hd;
theta_alpha_3 = [zxjs(:,1),alpha_3/hd];
theta_3m_xh = find(theta_alpha_3(:,2) = = alpha_3_max);
theta_3m = theta_alpha_3(theta_3m_xh,1);
fprintf('    转盘节圆半径处与 3 号滚子相啮合的最大压力角          alpha_3_max = %3.4f °\n',alpha_3_max);
fprintf('                  与最大压力角对应的凸轮转角值                  theta_2m = %3.4f °\n',theta_3m);
if alpha_3_max < = alpha_p
    disp('          * 转盘节圆半径处与 3 号滚子相啮合的最大压力角小于许用压力角')
else
    disp('          * 转盘节圆半径处与 3 号滚子相啮合的最大压力角大于许用压力角')
end

%输出与凸轮转角对应的:转盘角位移,转盘 1#、2#、3#滚子位置角,转盘节圆半径处的压力角(单位:度)
['凸轮转角','转盘角位移',' 1#位置角',' 2#位置角',' 3#位置角',' 1#压力角',' 2#压力角',' 3#压力角']
[zxjs(:,1),zxjs(:,2)/hd,phi(:,1),phi(:,2),phi(:,3),alpha_1/hd,alpha_2/hd,alpha_3/hd]

% 4 - 圆柱分度凸轮轮廓曲面三维坐标计算
% 1)计算滚子圆柱面啮合点的三维坐标值(x2,y2,z2)
bc_r = 1;                                %滚子圆柱面参数 r 的步长 1 ~ 2 mm
r = rO:bc_r:re;                          % r 是滚子圆柱面啮合点到转盘基准面的距离
kr = re - rO + 1;                        %单列 r 数组的行数
%变量初始化—三维数组(凸轮转角 0:i_zxjs,滚子曲面参数 1:kr,滚子序号 1:3)
%第三维数作为数据平面(plane),存储顺序是:第 1 个 plane,第 2 个 plane,...
Phi = zeros(i_zxjs,kr,3);x2 = zeros(i_zxjs,kr,3);y2 = zeros(i_zxjs,kr,3);z2 = zeros(i_zxjs,kr,3);
%凸轮转角 theta = 0 ~ theta_f 的每一个分度值,对应一系列滚子圆柱面参数 r 值(r = rO ~ re)
%根据凸轮与滚子共轭接触方程式计算啮合角 Phi
i = 0;
for theta = 0:bc_theta:theta_f                  %外循环变量 - 凸轮转角分度值
    i = i + 1;
    for j = 1:kr                                %中循环变量 - 滚子圆柱面参数
```

```
        for k = 1:3                                  % 内循环变量 - 1#、2#和 3#滚子
            % 1#、2#和 3#滚子的啮合角 Phi
            Phi(i,j,k) = atan2(p * (Rp_2 * (zxjs(j,6) * hd)/((A - r(j)) * cos(phi(i,k) *
hd)) - tan(phi(i,k) * hd)),C);
            % 滚子圆柱面啮合点的三维坐标值(x2,y2,z2)
            x2(i,j,k) = Rp_2 + Rr * cos(Phi(i,j,k));
            y2(i,j,k) = sin(Phi(i,j,k));
            z2(i,j,k) = - r(j);
        end
    end
end

% 2)计算圆柱分度凸轮轮廓曲面三维坐标值(x1,y1,z1)
% 变量初始化—三维数组(凸轮转角 0:i_zxjs,滚子曲面参数 1:kr,滚子序号 1:3)
x1 = zeros(i_zxjs,kr,3);y1 = zeros(i_zxjs,kr,3);z1 = zeros(i_zxjs,kr,3);
i = 0;
for theta = 0:bc_theta:theta_f                       % 外循环变量 - 凸轮转角分度值
    i = i + 1;
    for j = 1:kr                                     % 中循环变量 - 滚子圆柱面参数
        for k = 1:3                                  % 内循环变量 - 1#、2#和 3#滚子
            % 凸轮轮廓曲面三维坐标值(x1,y1,z1)
x1(i,j,k) = (x2(i,j,k) * cos(phi(i,k) * hd) + p * y2(i,j,k) * sin(phi(i,k) * hd) - C) * cos(the-
ta * hd) + (z2(i,j,k) + A) * sin(theta * hd);
y1(i,j,k) = ( - x2(i,j,k) * cos(phi(i,k) * hd) - p * y2(i,j,k) * sin(phi(i,k) * hd) + C) * cos
(theta * hd) + (z2(i,j,k) + A) * sin(theta * hd);
            z1(i,j,k) = p * x2(i,j,k) * sin(phi(i,k) * hd) - y2(i,j,k) * cos(phi(i,k) * hd);
        end
    end
end

'           ========  输出圆柱分度凸轮轮廓曲面三维坐标值(x1,y1,z1)  ========'
theta = input('  * 选择需要输出轮廓曲面三维坐标值对应的凸轮转角(°)   theta = ');
['滚子参数','   1#滚子对应的凸轮廓面三维坐标','   2#滚子对应的凸轮廓面三维坐标','   3
#滚子对应的凸轮廓面三维坐标']
['   r','   1# - x1','   1# - y1','   1# - z1','   2# - x1','   2# - y1','   2# - z1','   3# - x1',
  '   3# - y1','   3# - z1']
[r',x1(theta,:,1)',y1(theta,:,1)',z1(theta,:,1)',x1(theta,:,2)',y1(theta,:,2)',z1(theta,:,
2)',x1(theta,:,3)',y1(theta,:,3)',z1(theta,:,3)']

% 3)将圆柱分度凸轮轮廓曲面三维坐标存储为 mat 数据文件(在 work 工作空间)
xyz1_1 = [x1(:,:,1),y1(:,:,1),z1(:,:,1)];        % 1#滚子对应的凸轮廓面三维坐标
xyz1_2 = [x1(:,:,2),y1(:,:,2),z1(:,:,2)];        % 2#滚子对应的凸轮廓面三维坐标
xyz1_3 = [x1(:,:,3),y1(:,:,3),z1(:,:,3)];        % 3#滚子对应的凸轮廓面三维坐标
% 存储命令"save"()格式如下(数据文件名和数组名需要用单撇号括起来,中间用逗号分隔)
save('YZ200 - H1 - I16 - R_三维坐标','xyz1_1','xyz1_2','xyz1_3');
% 导入 mat 数据文件命令:load('YZ200 - H1 - I16 - R_三维坐标','xyz1_1','xyz1_2','xyz1_3');
```

```
% 在命令窗口:File/Import Data...,打开数据输入导向窗口 Import Wizard 中显示数据文件的三个
数组 xyz1_1,xyz1_2,xyz1_3
% 行数 121(凸轮转角 theta 分度值);列数 63(三维坐标各 r 分度值各元素对应列)
% 显示数组维数和维长度的命令:size(xyz1_1);
% 显示数组“xyz1_1”所有行、第 1 ~21 列的数据(所有 x1 坐标)的命令:xyz1_1(:,1:21)

% 4)整理圆柱分度凸轮轮廓曲面三维坐标数据
[hs ls] = size(xyz1_1);                    % 获取数组“xyz1_1”行数和列数
% 1#滚子对应的凸轮廓面三维坐标
xyz = xyz1_1;
[xx,yy,zz] = zxjs_3Dzb(hs,ls,xyz);
xx1 = xx;yy1 = yy;zz1 = zz;
xxyyzz1 = [xx1 yy1 zz1];
save('YZ200 - H1 - I16 - R_1#坐标','xx1','yy1','zz1');
'      * 1#滚子对应的轮廓曲面三维坐标
['         xx1'',            yy1'',            zz1'']
[xx1 yy1 zz1]
% 2#滚子对应的凸轮廓面三维坐标
xyz = xyz1_2;
[xx,yy,zz] = zxjs_3Dzb(hs,ls,xyz);
xx2 = xx;yy2 = yy;zz2 = zz;
xxyyzz2 = [xx2 yy2 zz2];
save('YZ200 - H1 - I16 - R_2#坐标','xx2','yy2','zz2');
'      * 2#滚子对应的轮廓曲面三维坐标
['         xx2'',            yy2'',            zz2'']
[xx2 yy2 zz2]
% 3#滚子对应的凸轮廓面三维坐标
xyz = xyz1_3;
[xx,yy,zz] = zxjs_3Dzb(hs,ls,xyz);
xx3 = xx;yy3 = yy;zz3 = zz;
xxyyzz3 = [xx3 yy3 zz3];
save('YZ200 - H1 - I16 - R_3#坐标','xx3','yy3','zz3');
'      * 3#滚子对应的轮廓曲面三维坐标
['         xx3'',            yy3'',            zz3'']
[xx3 yy3 zz3]
% 导入 mat 数据文件命令:load('YZ200 - H1 - I16 - R_1#坐标','xx1','yy1','zz1');

%% 函数文件 1:绘制圆柱分度凸轮机构运动参数曲线(zxjs_ydxt.m)
functionzxjs_ydxt(zxjs,hd,theta_f)
% 1)机构运动参数线图
figure(1);
subplot(6,1,1);                                      % 选择第 1 个子窗口
plot(zxjs(:,1),zxjs(:,2)/hd)                         % 绘制转盘的角位移线图
grid on                                              % 栅格线
title('正弦加速运动参数线图')                          % 标注图形名称
xlabel('凸轮转角 \it \theta / \rm(^。)')               % 标注 x 轴
```

```
ylabel ( 转盘角位移 \it ^\phi2/ \rm(^。)' )              % 标注 y 轴

subplot(6,1,2);                                          % 选择第 2 个子窗口
plot(zxjs(:,1),zxjs(:,3))                                % 绘制转盘的角速度线图
grid on
xlabel ( 凸轮转角 \it \theta / \rm(^。)' )
ylabel ( 转盘角速度 \it ^\omega2' )

subplot(6,1,3);                                          % 选择第 3 个子窗口
plot(zxjs(:,1),zxjs(:,4))                                % 绘制转盘的角加速度线图
X = [0 theta_f];Y = [0 0];
line (X,Y)                                               % 绘制 x 轴
grid on
xlabel ( 凸轮转角 \it \theta / \rm(^。)' )
ylabel ( 转盘角加速度 \it ^\epsilon2' )

subplot(6,1,4);                                          % 选择第 4 个子窗口
plot(zxjs(:,1),zxjs(:,5))                                % 绘制转盘的跃度线图
X = [0 theta_f];Y = [0 0];
line (X,Y)
grid on
xlabel ( 凸轮转角 \it \theta / \rm(^。)' )
ylabel ( 转盘跃度 \it ^\zeta2' )

% 2)生成机构运动特性线图
subplot(6,1,5);                                          % 选择第 5 个子窗口
plot(zxjs(:,1),zxjs(:,6))                                % 绘制机构的角速度比线图
line (X,Y)
grid on
title( 正弦加速运动特性线图 )
xlabel ( 凸轮转角 \it \theta / \rm(^。)' )
ylabel ( 机构角速比 \it ^\omega2/^\omega1' )

subplot(6,1,6);                                          % 选择第 6 个子窗口
plot(zxjs(:,1),zxjs(:,7))                                % 绘制机构的角加速度比线图
line (X,Y)
grid on
xlabel ( 凸轮转角 \it \theta / \rm(^。)' )
ylabel ( 机构角加速比 \it ^\epsilon2/^{\omega}1^2' )

%% 函数文件 2:整理圆柱分度凸轮轮廓曲面三维坐标数据(zxjs_3Dzb.m)
function [xx,yy,zz] = zxjs_3Dzb(hs,ls,xyz)
%凸轮廓面 x 列坐标
x_1 = cat(1,xyz(:,1:ls/3)');                             % 抽取所有行前面 1/3 列的 x 坐标
xx = zeros(hs * ls/3,1);xx = [];                         % 置单列空数组
for ijk = 1:121
```

```
        xx = cat(1,xx,x_1(:,ijk));                    % 将各列数据顺序连接
    end
    % 凸轮廓面 y 列坐标
    y_1 = cat(1,xyz(:,ls/3 + 1:ls * 2/3));           % 抽取所有行中间 1/3 列的 y 坐标
    yy = zeros(hs * ls/3,1);yy = [];
    for ijk = 1:121
        yy = cat(1,yy,y_1(:,ijk));
    end
    % 凸轮廓面 z 列坐标
    z_1 = cat(1,xyz(:,ls * 2/3 + 1:ls));             % 抽取所有行后面 1/3 列的 z 坐标
    zz = zeros(hs * ls/3,1);zz = [];
    for ijk = 1:121
        zz = cat(1,zz,z_1(:,ijk));
    end
```

运算结果和输出图形：

```
 ========  圆柱分度凸轮机构基本数据  ========
凸轮转速              n = 100.0000 r/min
机构中心距            C = 200.0000 mm
机构基距              A = 180.0000 mm
凸轮头数              H =     1
凸轮分度廓线旋向    LXX = R
转盘分度数            I =    16
转盘滚子数            z =    16
凸轮角速度      omega_1 = 10.4720 1/s
凸轮分度期转角  theta_f = 120.0000 度
凸轮停歇期转角  theta_d = 240.0000 度
转盘分度期转角    phi_f = 22.5000 度
机构分度期时间      t_f = 0.2000 s
机构停歇期时间      t_d = 0.4000 s
机构动停比            k = 0.5000
机构运动系数        tau = 0.3333

正弦加速运动参数数组行数      i_zxjs = 121
```

凸轮转角	转盘角位移	角速度	角加速度	跃度	角速度比	角加速度比
0	0	0	0	0.5903	0	0
1.0000	0.0001	0.0027	0.0563	0.5895	0.0003	0.0005
2.0000	0.0007	0.0108	0.1125	0.5871	0.0010	0.0010
3.0000	0.0023	0.0242	0.1684	0.5830	0.0023	0.0015
4.0000	0.0055	0.0429	0.2238	0.5774	0.0041	0.0020
5.0000	0.0107	0.0669	0.2786	0.5702	0.0064	0.0025
10.0000	0.0845	0.2631	0.5383	0.5112	0.0251	0.0049
20.0000	0.6488	0.9817	0.9324	0.2952	0.0937	0.0085
30.0000	2.0440	1.9635	1.0766	0.0000	0.1875	0.0098

40.0000	4.3988	2.9452	0.9324	-0.2952	0.2812	0.0085
50.0000	7.5845	3.6639	0.5383	-0.5112	0.3499	0.0049
60.0000	11.2500	3.9270	0.0000	-0.5903	0.3750	0.0000
70.0000	14.9155	3.6639	-0.5383	-0.5112	0.3499	-0.0049
80.0000	18.1012	2.9452	-0.9324	-0.2952	0.2813	-0.0085
90.0000	20.4560	1.9635	-1.0766	-0.0000	0.1875	-0.0098
100.0000	21.8512	0.9817	-0.9324	0.2952	0.0937	-0.0085
110.0000	22.4155	0.2631	-0.5383	0.5112	0.0251	-0.0049
115.0000	22.4893	0.0669	-0.2786	0.5702	0.0064	-0.0025
116.0000	22.4945	0.0429	-0.2238	0.5774	0.0041	-0.0020
117.0000	22.4977	0.0242	-0.1684	0.5830	0.0023	-0.0015
118.0000	22.4993	0.0108	-0.1125	0.5871	0.0010	-0.0010
119.0000	22.4999	0.0027	-0.0563	0.5895	0.0003	-0.0005
120.0000	22.5000	0	-0.0000	0.5903	0	-0.0000

圆柱分度凸轮机构运动参数的最大值
最大角速度比　omega_2_1_max = 0.3750
最大角速度　omega_2_max = 3.9270
最大角加速度　epsilon_2_max = 1.0761
最大跃度　zeta_2_max = 0.5906

======== 圆柱分度凸轮机构几何尺寸 ========
许用压力角　alpha_p = 36.0000 度
凸轮节圆半径　Rp_1 = 130.0000 mm
转盘节圆半径　Rp_2 = 202.0000 mm
转盘滚子中心角　phi_z = 22.5000 度
滚子半径　Rr = 15.0000 mm
滚子宽度　b = 20.0000 mm
转盘滚子与凸轮槽底间隙　e = 10.0000 mm
凸轮定位环面的径向深度　h = 30.0000 mm
凸轮定位环面的外圆直径　Do = 280.0000 mm
凸轮定位环面的内圆直径　Di = 220.0000 mm
凸轮宽度　L = 100.0000 mm
转盘外圆直径　D_2 = 440.0000 mm
转盘基准端面到滚子上端面的轴向距离　rO = 40.0000 mm
转盘基准端面到滚子宽度中点轴向距离　rG = 50.0000 mm
转盘基准端面到滚子上端面的轴向距离　re = 60.0000 mm

转盘节圆半径处与 1 号滚子相啮合的最大压力角　alpha_1_max = 35.2015 °
与最大压力角对应的凸轮转角值　theta_1m = 68.0000 °
*转盘节圆半径处与 1 号滚子相啮合的最大压力角小于许用压力角
转盘节圆半径处与 2 号滚子相啮合的最大压力角　alpha_2_max = 22.2812 °
与最大压力角对应的凸轮转角值　theta_2m = 55.0000 °
*转盘节圆半径处与 2 号滚子相啮合的最大压力角小于许用压力角
转盘节圆半径处与 3 号滚子相啮合的最大压力角　alpha_3_max = 13.8599 °
与最大压力角对应的凸轮转角值　theta_2m = 63.0000 °

＊转盘节圆半径处与 3 号滚子相啮合的最大压力角小于许用压力角

输出的凸轮机构从动件的正弦加速度运动线图如图 11-19 所示。

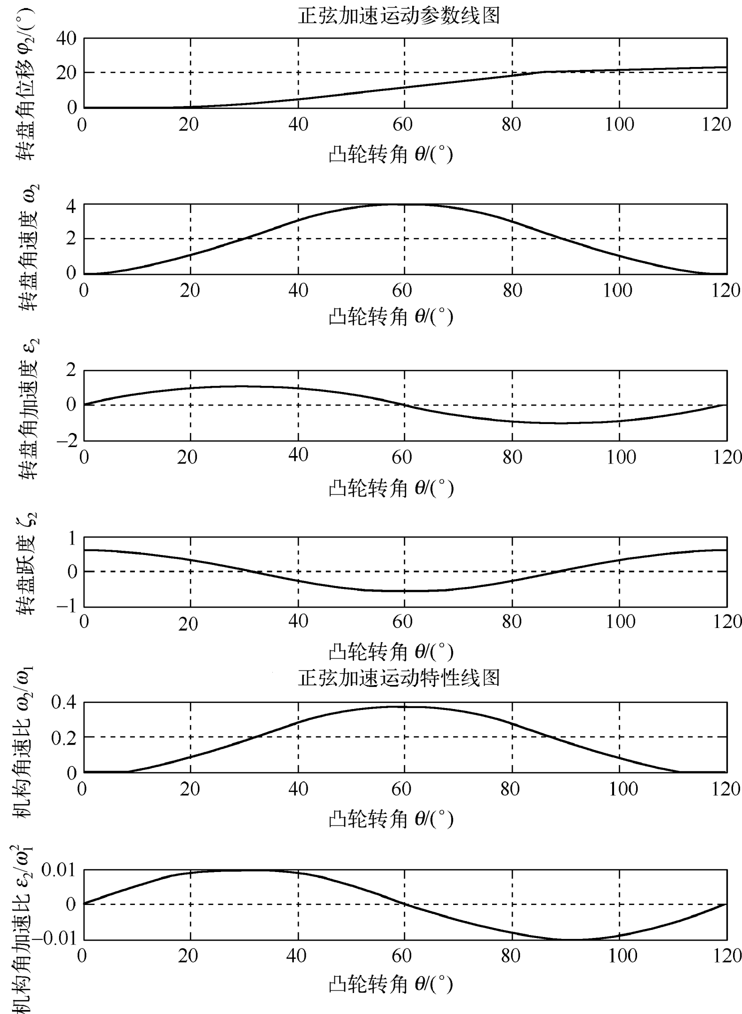


图 11-19　凸轮机构从动件的正弦加速度运动线图

凸轮转角	转盘角位移	1#位置角	2#位置角	3#位置角	1#压力角	2#压力角	3#压力角
0	0	11.2500	-11.2500	-33.7500	0	0	0
1.0000	0.0001	11.2500	-11.2500	-33.7500	0.0199	0.0199	0.0088
2.0000	0.0007	11.2500	-11.2500	-33.7500	0.0797	0.0797	0.0350
3.0000	0.0023	11.2500	-11.2500	-33.7500	0.1791	0.1791	0.0787
…							
90.0000	20.4560	11.6070	-10.8930	-33.3930	24.2598	9.7383	7.7083
100.0000	21.8512	11.6314	-10.8686	-33.3686	13.3102	4.7988	3.9353
110.0000	22.4155	11.6412	-10.8588	-33.3588	3.7007	1.2775	1.0632
120.0000	22.5000	11.6427	-10.8573	-33.3573	0	0	0

======== 输出圆柱分度凸轮轮廓曲面三维坐标值(x1,y1,z1) ========
选择需要输出凸轮转角(度)　theta =27
滚子参数　1#滚子对应的凸轮廓面三维坐标　2#滚子对应的凸轮廓面三维坐标　3#滚子对应的凸轮廓面三维坐标
r　1# - x1　1# - y1　1# - z1　2# - x1　2# - y1　2# - z1　3# - x1　3# - y1　3# - z1
40.0000　72.8877　49.8562　-42.4245　72.9196　49.8244　42.2466　43.8251　78.9188　120.4860
41.0000　72.4494　49.4178　-42.4245　72.4812　49.3860　42.2466　43.3868　78.4804　120.4860
42.0000　72.0110　48.9794　-42.4245　72.0428　48.9476　42.2466　42.9484　78.0420　120.4860
…
59.0000　64.5587　41.5271　-42.4245　64.5905　41.4953　42.2466　35.4961　70.5897　120.4860
60.0000　64.1203　41.0887　-42.4245　64.1521　41.0569　42.2466　35.0577　70.1514　120.4861

* 1#滚子对应的轮廓曲面三维坐标
xx1　yy1　zz1
12.8302　-12.8302　-42.3356
12.8302　-12.8302　-42.3356
12.8302　-12.8302　-42.3356
…
12.8302　-12.8302　-42.3356
15.2716　-10.3849　-42.3356
15.2541　-10.4024　-42.3356
…
105.4498　117.9848　-43.7933
104.5837　117.1188　-43.7933
103.7177　116.2527　-43.7933
…
99.3876　111.9226　-43.7933
98.5216　111.0566　-43.7933
97.6555　110.1906　-43.7933

* 2#滚子对应的轮廓曲面三维坐标
xx2　yy2　zz2
12.8302　-12.8302　42.3356
12.8302　-12.8302　42.3356
12.8302　-12.8302　42.3356
…

```
12. 8302    -12. 8302   42. 3356
15. 2716    -10. 3849   42. 3356
15. 2541    -10. 4024   42. 3356
…
99. 0974   112. 2128   40. 8759
98. 2314   111. 3468   40. 8759
97. 3654   110. 4807   40. 8759

* 3#滚子对应的轮廓曲面三维坐标
    xx3         yy3         zz3
-19. 5730   19. 5730   120. 5615
-19. 5730   19. 5730   120. 5615
-19. 5730   19. 5730   120. 5615
…
115. 0306   96. 2796   119. 3220
114. 1645   95. 4136   119. 3220
113. 2985   94. 5476   119. 3220
```

输出的转盘节圆半径处的与滚子啮合的机构压力角变化线图如图 11-20 所示。

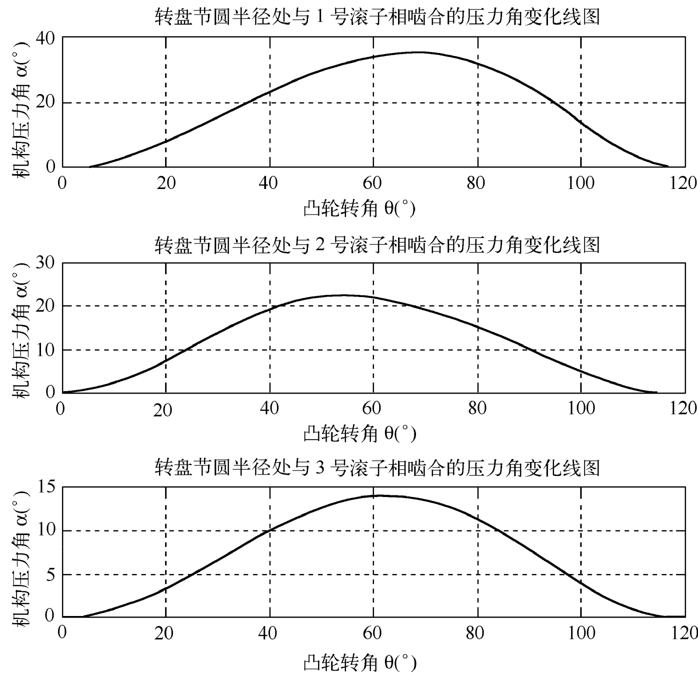


图 11-20　转盘节圆半径处的与滚子啮合的机构压力角变化线图

第 12 章　挠性传动设计计算

挠性传动（flexible drive）是依靠挠性连接件（皮带、齿形带、滚子链等）间接地将主动轮上的运动和动力传递给从动轮，它常用于两轮中心距比较大，而且可以根据需要进行调节的场合。

12.1　V 带传动的多目标优化设计

带传动（belt drive）是通过中间挠性件胶带，把主动轴的运动和动力传给从动轴的一种机械传动形式，常用于两轴相距较远的场合。与其他机械传动相比，带传动结构简单、成本低廉且维护方便，是一种应用很广的机械传动。其中，V 带传动的摩擦力较大，传递功率也较大，传动结构紧凑，是带传动应用中最为常见的一种传动类型。

带传动示意图如图 12-1 所示。带传动的优化设计一般是在满足承载能力的条件下要求传动结构紧凑，即实现带的根数尽量少、带轮直径和中心距尽量小。

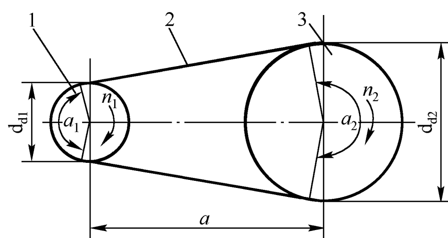


图 12-1　带传动示意图

1—主动轮　2—传动带　3—从动轮

12.1.1　V 带传动多目标优化设计数学模型

例 12-1　设计带式输送机传动装置上的普通 V 带传动。已知电动机额定功率 $P=4$ kW，转速 $n_1=1440$ r/min，传动比 $i=3$，采用 A 型 V 带，每天工作不超过 10 h。要求设计方案传动结构紧凑。

解： 建立优化设计的数学模型

1. 目标函数

（1）确定三个分目标函数

1）小带轮基准直径

$$\min f_1(X)=d_{d1} \tag{12-1}$$

2）中心距

$$\min f_2(X)=a=a_1+\sqrt{a_1^2-a_2} \tag{12-2}$$

其中，$a_1=\dfrac{L_d}{4}-\dfrac{\pi d_{d1}(i+1)}{8}$，$a_2=\dfrac{d_{d1}^2(i-1)^2}{8}$。

3）带的根数

$$\min f_3(X)=z=\frac{K_A P}{(P_0+\Delta P_0)K_\alpha K_L} \tag{12-3}$$

式中，工作情况系数 $K_A=1.1$（根据工作机械是带式输送机，每天工作不超过 10 h）；单根 V 带额定功率 P_0 与小带轮基准直径 d_{d1} 的关系，根据 A 型 V 带，转速 $n_1=1440$ r/min 拟合为直线方程

$$P_0=0.002424d_{d1}-1.112879(\text{kW}) \tag{12-4}$$

拟合效果检验：相关系数 $r=0.9997$，标准误差 $\sigma=0.01969$；功率增量 $\Delta P_0=0.17$ kW（根据 A 型 V 带，传动比 $i=3$，转速 $n_1=1440$ r/min）；包角系数 K_α 与小带轮包角 α 的关系，拟合为双曲线函数方程

$$K_\alpha=\frac{\alpha}{0.549636\alpha+80.395144} \tag{12-5}$$

拟合效果检验：相关指数 $r^2=0.998625$，标准误差 $\sigma=0.003489$；带的长度系数 K_L 与 V 带基准长度 L_d 的关系，根据 A 型 V 带，拟合为幂函数方程

$$K_L=0.20639L_d^{0.211806} \tag{12-6}$$

拟合效果检验：相关指数 $r^2=0.9996$，标准误差 $\sigma=0.0040$。

（2）建立统一的目标函数　按照加权方法建立统一的目标函数。确定分目标和它们的权重：考虑到各分目标的量纲不同，根据各分目标函数值的变化范围：小带轮基准直径 $f_1=d_{d1}=75\sim125$ mm，中心距 $f_2=a=210\sim640$ mm，带的根数 $f_3=z=1\sim6$，取分目标 goal = [80,400,4]。

按照一般规律，各分目标的权重为各分目标的绝对值，即 $w=\text{abs}(\text{goal})$。因此，建立统一的目标函数为

$$f=\boldsymbol{w}_1 f_1+\boldsymbol{w}_2 f_2+\boldsymbol{w}_3 f_3 \tag{12-7}$$

2. 设计变量

根据 V 带传动的目标函数表达式分析可知，当带型、传递功率 P、传动比 i 和小带轮转速 n_1 已知时，其独立设计变量是小带轮直径 d_{d1} 和带的基准长度 L_d，即

$$\boldsymbol{X}=[x_1,x_2]^T=[d_{d1},L_d]^T$$

3. 约束条件

（1）边界条件

1）根据 V 带传动设计规范，A 型带轮的小带轮直径允许最小直径

$$d_{d1}\leqslant d_{dmin}=75$$

即

$$x_1\geqslant75$$

再根据带速不超过最大带速 $v_{max}=25$ m/s

$$v=\frac{\pi d_{d1}n_1}{60000}\leqslant v_{max}=25$$

即
$$x_1=d_{d1}\leqslant\frac{1.5\times10^6}{\pi n_1}=\frac{1.5\times10^6}{1440\pi}\approx331\ \text{mm}$$

因此，设计变量 x_1 的取值范围是 $75\leqslant x_1\leqslant33$。

2）根据设计规范，从 A 型 V 带基准长度的范围得到设计变量 x_2 的取值范围是 $630\leqslant x_2\leqslant4000$。

（2）性能约束条件

1）带速不超过最大带速 $v_{max}=25$ m/s

$$g_1(\boldsymbol{X})=\frac{\pi x_1 n_1}{60000}-25\leqslant0 \tag{12-8}$$

2）小带轮包角 $\alpha_{min}\geqslant120°$

$$g_2(\boldsymbol{X})=\alpha_{min}-\alpha_1=\alpha_{min}-180\left[1-\frac{d_{d1}(i-1)}{a\pi}\right]=120-180\left(1-\frac{2x_1}{a\pi}\right)\leqslant0 \tag{12-9}$$

3）中心距 $>0.7d_{d1}$（$i+1$），则

$$g_3(\boldsymbol{X})=0.7d_{d1}(i+1)-a=2.8x_1-a\leqslant0 \tag{12-10}$$

因此，这是一个 3 个目标的非线性约束优化问题。

12.1.2　M 文件和运算结果

V 带传动多目标优化设计的 M 文件包括：使用多目标优化函数 fgoalattain 的主文件、目标函数文件 VDCD_3mb_MB.m、非线性约束函数文件 VDCD_3mb_YS.m 和根据优化计算结果按照设计规范圆整的 M 文件等。

为方便计算机辅助设计计算，将单根 A 型 V 带额定功率 P_0 与小带轮基准直径 d_{d1} 的关系拟合为直线方程式（12-4），将包角系数 K_α 与小带轮包角 α 的关系拟合为双曲线函数方程式（12-5），以及将 A 型 V 带的长度系数 K_L 与 V 带基准长度 L_d 的关系拟合为幂函数方程式（12-6）。

编制 M 文件如下：

```
% V 带传动多目标优化设计
%多目标:f(1) - 小带轮直径,f(2) - 中心距,f(3) - V 带根数
%设计变量:x(1) - 小带轮直径,x(2) - V 带基准长度
P = 4;i = 3;n1 = 1440;KA = 1.1;     %已知条件:功率、传动比、转速、工况系数
disp''
disp'          ==========   已 知 条 件    =========';
fprintf('                电动机功率       P = %3.2f kW \n',P);
fprintf('                电动机转速      n1 = %3.0f r/min \n',n1);
fprintf('                    传动比       i = %3.2f \n',i);
fprintf('                   V 带型号      A 型 V 带 \n');
fprintf('              工作情况系数      KA = %3.2f \n',KA);
% V 带传动多目标优化设计
P = 4;i = 3;n1 = 1440;KA = 1.1;          %已知条件:功率、传动比、转速、工况系数和 A 型 V 带
x0 = [100;1250];                        %初始点(小带轮直径、V 带基准长度)
A = [];b = [];                          %没有线性不等式约束
```

```
Aeq = [ ];beq = [ ];                    % 没有线性等式约束
lb = [75;630];                          % 最小带轮直径和 A 型 V 带基准长度
ub = [331;4000];                        % 最大带轮直径和 A 型 V 带基准长度
goal = [80,400,4];                      % 分目标
w = abs(goal);                          % 取分目标的绝对值作为分目标的权重
%[xopt,fopt] = fgoalattain(@VDCD_3mb_MB,x0,goal,w,A,b,Aeq,beq,lb,ub,@VDCD_3mb_YS)
[xopt,fopt] = fminimax(@VDCD_3mb_MB,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub,@VDCD_3mb_YS)

%根据计算结果四舍五入为规范值
% V 带轮基准直径
Dd1 = input('根据 A 型 V 带轮基准直径系列圆整小带轮基准直径 Dd1 =');
disp('大带轮计算直径计算值:'),Dd2j = Dd1 * i
Dd2 = input('根据 A 型 V 带轮基准直径系列圆整大带轮基准直径 Dd2 =');
% V 带基准长度
Ld = input('根据 A 型 V 带基准长度系列圆整 V 带基准长度 Ld =');
% V 带根数
z = input('确定 V 带根数 z =');
%传动中心距和包角
a1 = Ld/4 - pi * Dd1 * (i + 1)/8;a2 = Dd1^2 * (i - 1)^2/8;a = a1 + sqrt(a1^2 - a2);
alpha = 180 - 180 * Dd1 * (i - 1)/pi/a;
disp'              ********** 计 算 结 果 **********'
fprintf('            小带轮基准直径    Dd1 = %3.0f mm \n',Dd1);
fprintf('            大带轮基准直径    Dd2 = %3.0f mm \n',Dd2);
fprintf('              V 带基准长度     Ld = %3.0f mm \n',Ld);
fprintf('                传动中心距      a = %3.2f mm \n',round(a));
fprintf('                小带轮包角 alpha = %3.2f 度 \n',alpha);
fprintf('                  V 带根数      z = %3.0f \n',z);
%带速、带的初拉力和压轴力
q = 0.1;                                            % A 带每米长度质量(kg/m)
v = pi * Dd1 * n1/6e4;                              %带速(m/s)
Kalp = alpha/(0.549636 * alpha + 80.396114);        % 包角系数
F0 = 500 * KA * P * (2.5/Kalp - 1)/v/z + q * v^2;   % 初拉力(N)
Q = 2 * z * F0 * sin(0.5 * alpha * pi/180);         %压轴力(N)
fprintf('                      带速      v = %3.2f m/s \n',v);
fprintf('                带的初拉力     F0 = %3.2f N \n',F0);
fprintf('                带的压轴力     FQ = %3.2f N \n',Q);

% V 带传动多目标优化设计的目标函数文件
function f = VDCD_3mb_MB(x)
P = 4;i = 3;KA = 1.1;                               %已知条件:功率、传动比、工况系数
f(1) = x(1);                                        % f1 - 小带轮基准直径
a1 = x(2)/4 - pi * x(1) * (i + 1)/8;
a2 = x(1)^2 * (i - 1)^2/8;
a = a1 + sqrt(a1^2 - a2);
f(2) = a;                                           % f2 - 中心距
P0 = 0.02424 * x(1) - 1.112879;                     %单根带额定功率
DP0 = 0.17;                                         %功率增量
alpha = 180 - 180 * x(1) * (i - 1)/pi/a;            %小带轮包角
Kalp = alpha/(0.549636 * alpha + 80.396114);        % 包角系数
```

```
KL = 0.20639 * x(2)^0.211806;                    % 长度系数
f(3) = KA * P/(P0 + DP0)/Kalp/KL;                % f3 - V 带根数

% V 带传动多目标优化设计的约束函数文件
function [c,ceq] = VDCD_3mb_YS(x)
i = 3;n1 = 1440;                                 % 已知条件:传动比、转速
c(1) = pi * x(1) * n1/6e4 - 25;                  % 带速范围 V < = Vmax
a1 = x(2)/4 - pi * x(1) * (i + 1)/8;
a2 = x(1)^2 * (i - 1)^2/8;
a = a1 + sqrt(a1^2 - a2);
c(2) = 120 - 180 * (1 - x(1) * (i - 1)/a/pi);    % 小带轮包角 >= alpmin
c(3) = 0.7 * x(1) * (i + 1) - a;                 % 中心距范围 a >= amin
ceq = [ ];
```

采用函数 fgoalattain 的计算结果：

```
                 ========== 已 知 条 件 ========= =
                      电动机功率      P = 4.00 kW
                      电动机转速     n1 = 1440 r/min
                          传动比      i = 3.00
                        V 带型号      A 型 V 带
                    工作情况系数     KA = 1.10
xopt =    1.0e +003  *
     0.0872
     1.2500
fopt =
   87.1734   339.9626      4.3587
根据 A 型 V 带轮基准直径系列圆整小带轮基准直径 Dd1 = 85
大带轮计算直径计算值:
Dd2j =
   255
根据 A 型 V 带轮基准直径系列圆整大带轮基准直径 Dd2 = 250
根据 A 型 V 带基准长度系列圆整 V 带基准长度 Ld = 1250
确定 V 带根数 z = 5
                    **********计 算 结 果 **********
                      小带轮基准直径      Dd1 = 85 mm
                      大带轮基准直径      Dd2 = 250 mm
                        V 带基准长度       Ld = 1250 mm
                          传动中心距        a = 348.00 mm
                          小带轮包角    alpha = 151.98 度
                            V 带根数        z =  5
                                带速        v = 6.41 m/s
                          带的初拉力       F0 = 120.59 N
                          带的压轴力       FQ = 1170.00 N
```

12.1.3　使用最大最小化函数求解多目标优化问题的讨论

最大最小化函数 fminimax 是将各个分目标的权重视为相等，其功能是使受约束的各个

分目标函数值的最大值逐次减小，即在最坏的情况下，寻求最好的结果，这是一种稳妥的保守策略。

函数 fminimax 的使用格式为：

```
[x,fval,exitflag,output,hession] =
fminimax (@fun,x0,A,b,Aeq,beq,Lb,Ub,'Nlc',options,P1,P2,…)
```

其中，各输入参数和输出参数的意义与函数 fgoalattain 相同。但是没有分目标和权重的参数。

如例 12-1，只要将分目标和权重的参数的两行语句

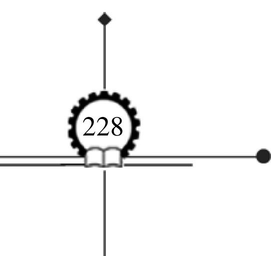
```
goal=[80,400,4];            %分目标
w=abs(goal);                %取分目标的绝对值作为分目标的权重
```

去掉，并且将函数 fgoalattain 调用语句改成函数 fminimax 调用语句

```
[xopt,fopt,exitflag,output]=fminimax(@VDCD_3mb_MB,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub,@VDCD_3mb_YS)
```

采用函数 fminimax 的计算结果：

```
========== 已 知 条 件   ==========
          电动机功率     P=4.00 kW
          电动机转速    n1=1440 r/min
              传动比     i=3.00
            V带型号     A型V带
        工作情况系数    KA=1.10
xopt =
    75.0000
   918.0246
fopt =
   75.0000   210.0000     6.4766
根据A型V带轮基准直径系列圆整小带轮基准直径 Dd1=75
大带轮直径计算值：
Dd2j =
   225
根据A型V带轮基准直径系列圆整大带轮基准直径 Dd2=224
根据A型V带基准长度系列圆整V带基准长度 Ld=900
确定V带根数 z=7
          ********** 计 算 结 果 **********
          小带轮基准直径    Dd1=75 mm
          大带轮基准直径    Dd2=224 mm
            V带基准长度     Ld=900 mm
              传动中心距      a=200.00 mm
            小带轮包角   alpha=137.10 度
               V带根数      z=7
                  带速      v=5.65 m/s
```



带的初拉力　　F0 = 105.47 N
带的压轴力　　FQ = 1374.26 N

可见，计算得到的中心距较小，但是 V 带根数较多，可以考虑改用 B 型 V 带传动。

12.2　同步带传动的设计计算

同步带传动（synchronous belt drive）是靠传动带与带轮上的齿相互啮合来传递运动和动力的，具有传递功率大，传动比准确，噪声小等优点，多用于要求传动平稳、传动精度较高的场合。过载时，还可以起到安全保护的作用。同步带传动结构简单，制造、安装和维护方便，成本低廉。

同步带传动具有带传动、链传动和齿轮传动的优点。同步带传动如图 12-2 所示。由于带与带轮是靠啮合传递运动和动力，故带与带轮间无相对滑动，能保证准确的传动比。同步带通常以钢丝绳或玻璃纤维绳为抗拉体，氯丁橡胶或聚氨酯为基体，这种带薄而且轻，故可用于较高速度。传动时的线速度可达 50 m/s，传动比可达 10，效率可达 98%。传动噪声比带传动、链传动和齿轮传动小，耐磨性好，不需油润滑，工作寿命比摩擦带长。其主要缺点是制造和安装精度要求较高，中心距要求较严格。所以同步带传动广泛应用于要求传动比准确的中、小功率传动中，如家用电器、仪器及机床、化工、石油等机械。

同步带有单面齿同步带和双面齿同步带两种，简称单面带和双面带。双面带又有对称齿型（DA）和交错齿型（DB）之分（图 12-2）。同步带齿有梯形齿和弧形齿两类。同步带型号分为最轻型 MXL、超轻型 XXL、特轻型 XL、轻型 L、重型 H、特重型 XH、超重型 XXH 七种。梯形齿同步带传动已有标准（GB11361 ~ 11362—2008）。

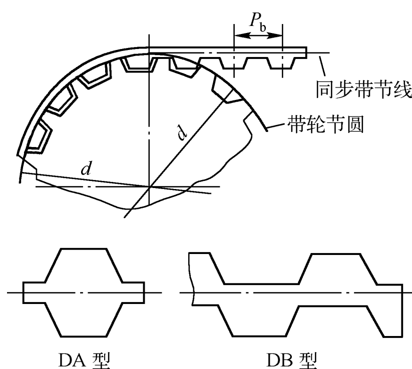


图 12-2　同步带传动

在规定张紧力下，相邻两齿中心线的直线距离称为节距，以 p_b 表示。节距是同步带传动最基本的参数。当同步带垂直其底边弯曲时，在带中保持原长度不变的周线，称为节线，节线长以 L_P表示。

同步带带轮的齿形推荐采用渐开线齿形，可用范成法加工而成。也可以使用直边齿形。

12.2.1　同步带传动设计计算步骤和内容

例 12-2　已知厨用绞肉机的电动机功率 $P = 0.6$ kW，转速 $n_1 = 1500$ r/min，传动比 $i = 3$，按照结构要求中心距 $a_0 = 250$ mm，两班制间断性工作，载荷变动小。试设计厨用绞肉机的同步带传动。

1. 确定计算功率 P_c 和选取同步带的类型

根据厨用绞肉机的工作情况，查表 12-1 选取工作情况系数 $K_A = 1.6 \times 0.9 =$

1.44。则

$$P_C = K_A P = 1.44 \times 0.6 = 0.864\ \text{kW}$$

根据 $P_C = 0.864$ kW、$n_1 = 1500$ r/min，从图 12-3 上选取同步带的类型为 L 型。

表 12-1　同步带的工况系数 K_A

工况		K_A					
		软起动			负载起动		
变化情况	瞬时峰值载荷 额定工作载荷	每天工作小时数/h					
		<10	10~16	>16	<10	10~16	>16
载荷平稳	—	1.0	1.2	1.4	1.2	1.4	1.6
载荷变动小	约 150%	1.4	1.6	1.8	1.6	1.8	2.0
载荷变动较大	≥150%~250%	1.5	1.7	1.9	1.7	1.9	2.1
载荷变化很大	≥250%~400%	1.6	1.8	2.0	1.8	2.0	2.2
载荷变动大而频繁	≥250%	1.7	1.9	2.1	1.9	2.1	2.3

注：1. 经常正反转使用张紧轮时，K_A 应乘 1.1；间断性工作，K_A 可乘 0.9。

2. 增速传动时，K_A 应乘下列系数：增速比为 1.25~1.74，1.75~2.49，2.50~3.49，≥3.50 范围时系数分别为 1.05，1.10，1.18，1.28。

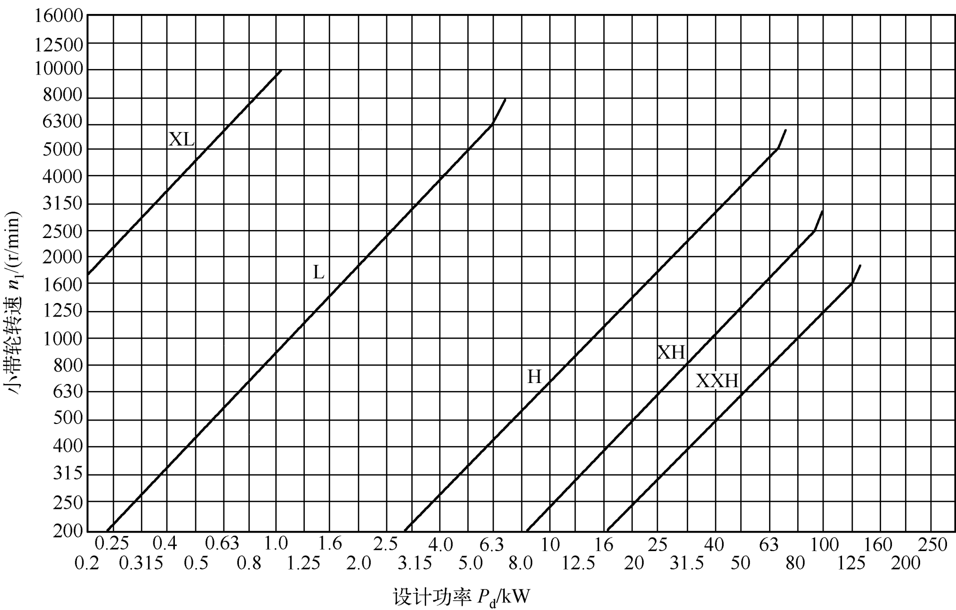


图 12-3　梯形齿同步带选型图

查表 12-2，确定对应的同步带节距 $P_b = 9.525$ mm。

表 12-2　梯形齿同步带的节距 P_b 和基准带宽 b_{s0}　　（单位：mm）

带型	MXL	XXL	XL	L	H	XH	XXH
P_b	2.032	3.175	5.080	9.525	12.700	22.225	31.750
b_{s0}	6.4	6.4	9.5	25.4	76.2	101.6	127.0

2. 确定带轮的齿数 z_1、z_2 和基准直径 d_{p1}、d_{p2}

查表 12-3，选取主动同步带轮齿数 $z_1=16$（L 型同步带的最少齿数 $z_{min}=14$），则

$$d_{p1}=\frac{z_1 p_b}{\pi}=\frac{16\times9.525}{\pi}=48.5104\ \text{mm}$$

查表 12-4，确定主动同步带轮的基准直径 $d_{p1}=48.51$ mm 和顶圆直径 $d_{a1}=47.75$ mm。

由于 $z_2=iz_1=3\times16=48$，查表 12-4，确定从动同步带轮的基准直径 $d_{p2}=145.53$ mm，顶圆直径 $d_{a2}=144.77$ mm。

表 12-3　主动轮最少齿数

主动轮转速 n_1/r·min^{-1}	带型						
	MXL	XXL	XL	L	H	XH	XXH
<900	10	10	10	12	14	18	18
900~1200	12	12	10	12	16	24	24
1200~1800	14	14	12	14	18	26	26
1800~3600	16	16	12	16	20	30	—
≥3600	18	18	15	18	22	—	—

表 12-4　标准同步带轮的基准直径　　（单位：mm）

带轮齿数 $x_{1,2}$	基准直径													
	MXL		XXL		XL		L		H		XH		XXH	
	d_p	d_a	d_p	d_a	d_p	d_a	d_p	d_a	d_p	d_a	d_p	d_a	d_p	d_a
15	9.70	9.19	15.16	14.65	24.26	23.75	45.48	44.72	60.64	59.27	—	—	—	—
16	10.35	9.84	16.17	15.66	25.87	25.36	48.51	47.75	64.68	63.31	—	—	—	—
17	11.00	10.49	17.18	16.67	27.49	26.98	51.54	50.78	68.72	67.35	—	—	—	—
18	11.64	11.13	18.19	17.68	29.11	28.60	54.57	53.81	72.77	71.39	127.34	124.55	181.91	178.86
19	12.29	11.78	19.20	18.69	30.72	30.22	57.61	56.84	76.81	75.44	134.41	131.62	192.02	188.97
40	25.37	25.36	40.43	39.92	64.68	64.17	121.28	120.51	161.70	160.33	282.98	280.18	404.25	401.21
48	31.05	30.54	48.51	48.00	77.62	77.11	145.53	144.77	194.04	192.67	339.57	336.78	485.10	482.06
60	38.81	38.30	60.64	60.13	97.02	96.51	181.91	181.15	242.55	241.18	424.47	421.67	606.38	603.33

3. 计算同步带的速度 v

$$v=\frac{d_{p1}n_1}{60000}=\frac{48.51\times1500\pi}{60000}=3.81\ \text{m/s}$$

同步带速小于 50 m/s，合适。

4. 确定同步带节线长度 L_p 和齿数 z

同步带节线计算长度

$$L_{p0}=2a_0+\frac{\pi}{2}(d_{p2}-d_{p1})+\frac{(d_{p2}-d_{p1})^2}{4a_0}$$

$$=2\times250+\frac{\pi}{2}(145.53+48.51)+\frac{(145.53-48.51)^2}{4\times250}=814.2102\ \text{mm}$$

查表 12-5，选取相近的同步带节线长 $L_p=(819.15\pm0.66)$ mm，齿数 $z=86$，带长代号 322。

表 12-5　同步带节线长及其偏差

带长代号	节线长 L_p/mm		节线长上的齿数					
	公称尺寸	极限偏差	MXL	XXL	XL	L	H	XH
322	819.15	±0.66	—	—	—	86	—	—
480	1219.20	±0.76	—	—	—	128	96	—
507	1289.05	±0.81	—	—	—	—	—	58
510	1295.40	±0.81	—	—	—	136	102	—
540	1371.60	±0.81	—	—	—	144	108	—

5. 确定中心距

$$a=a_0+\frac{L_p-L_{p0}}{2}=250+\frac{819.15-814.2102}{2}=252.4699\ \text{mm}$$

6. 计算主动同步带轮啮合齿数 z_m

$$z_m=\frac{z_1}{2}-\frac{P_b z_1}{2\pi^2 a}(z_2-z_1)=\frac{16}{2}-\frac{9.525\times16}{2\pi^2\times252.4699}\times(48-16)=7.0214$$

将计算结果截尾取整得到 $z_m=7$。

查表 12-6，选取主动同步带轮啮合齿数系数 $K_z=1.00$。

表 12-6　主动同步带轮啮合齿数系数

啮合齿数 z_m	≥6	5	4	3	2
啮合齿数系数 K_z	1.00	0.80	0.60	0.40	0.20

7. 确定同步带的基本额定功率 P_0

查表 12-7，选取 L 型同步带工作拉力 T_a，单位长度质量 $m=0.096$ kg/m，则

$$P_0=\frac{(T_a-mv^2)v}{1000}=\frac{(245-0.096\times3.81^2)\times3.81}{1000}=0.9281\ \text{kW}$$

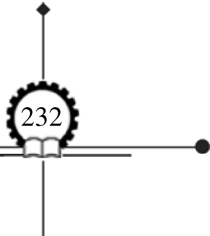
表 12-7　基准宽度同步带的工作拉力和单位长度的质量

带　型	MXL	XXL	XL	L	H	XH	XXH
T_a/N	27	31	50	245	2100	4050	6400
m/kg · m^{-1}	0.007	0.01	0.022	0.096	0.448	1.484	2.473

8. 确定所需要的同步带带宽 b_s

查表 12-2，选取 L 型同步带的基准宽度 $b_{s0}=25.4$ mm，则

$$b_s=b_{s0}\times\sqrt[1.14]{\frac{P_c}{K_z P_0}}=25.4\times\sqrt[1.14]{\frac{0.864}{1\times0.9281}}=23.4091\ \text{mm}$$



查表 12−8，选取 L 型同步带的宽度 $b_s = 25.4$ mm，宽度代号 100。

表 12−8　同步带宽度 b_s 系列

<table>
<tr><th colspan="2">宽　度</th><th colspan="5">极 限 偏 差</th><th colspan="7">带　型</th></tr>
<tr><th>代号</th><th>尺寸系列</th><th>$L_p < 838.20$</th><th colspan="2">$L_p > 838.20 \sim 1676.40$</th><th colspan="2">$L_p > 1676.40$</th><th>MXL</th><th>XXL</th><th>XL</th><th>L</th><th>H</th><th>XH</th><th>XXH</th></tr>
<tr><td>050</td><td>12.7</td><td rowspan="4">±0.8</td><td colspan="2" rowspan="4">+0.8
−1.3</td><td colspan="2">—</td><td rowspan="6"></td><td rowspan="6"></td><td rowspan="6"></td><td rowspan="3">L</td><td></td><td rowspan="4"></td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td>075</td><td>19.1</td><td colspan="2" rowspan="3">+0.8
−1.3</td><td rowspan="5">H</td></tr>
<tr><td>100</td><td>25.4</td></tr>
<tr><td>150</td><td>38.1</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>200</td><td>50.8</td><td>+0.8
−1.3 (H)</td><td>±1.3 (H)</td><td rowspan="2">±0.48</td><td>+1.3
−1.5 (H)</td><td rowspan="2">±0.48</td><td rowspan="2">XH</td><td rowspan="2">XXH</td></tr>
<tr><td>300</td><td>76.2</td><td>+1.3
−1.5 (H)</td><td>±1.5 (H)</td><td>+1.5
−2.0 (H)</td></tr>
</table>

9. 计算压轴力 F_r

$$F_r = \frac{1000P_c}{v} = \frac{1000 \times 0.864}{3.81} = 226.7736\ \text{N}$$

10. 计算同步带安装时应保证的挠度 f

计算带安装时应保证的挠度 f，如图 12−4 所示，以使带产生适当的张紧力。

计算切边长 t 和挠度 f

$$t = \sqrt{a^2 - \left(\frac{d_{p2} - d_{p1}}{2}\right)^2} = \sqrt{252.4699^2 - \left(\frac{145.53 - 48.51}{2}\right)^2} = 247.7657\ \text{mm}$$

$$f = 0.016t = 0.016 \times 247.7657 = 3.9643\ \text{mm}$$

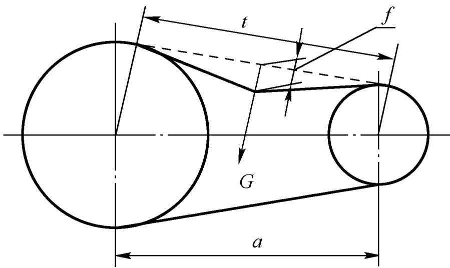


图 12−4　带安装时的挠度

图 12−4 中施加的载荷 G 按照下式计算

$$G = \frac{F_0 L_p + tY}{16L_p} = \frac{122.59 \times 819.15 + 247.7657 \times 10.9}{16 \times 819.15} = 7.8679\ \text{N}$$

式中，初张紧力 F_0 和修正系数 Y 根据同步带型号和带宽从表 12−9 查取。

表 12-9　周节制同步带的初张紧力和修正系数

带宽/mm			3.2	4.8	6.4	7.9	9.5	12.7	19.1	25.4	38.1	50.8	76.2	101.6	127.0	带宽/mm		
MXL	F_0	①	6.4	9.8	13.7			76.50	124.55	174.57						①	F_0	L
		②	2.9	5.1	7.6			51.98	87.28	122.59						②		
	Y		0.6	1.0	1.4			4.5	7.7	10.9						Y		
XXL	F_0	①	6.9	10.8	15.7				293.23	420.72	646.28	889.50	1391.62			①	F_0	H
		②	3.2	5.6	8.8				221.64	311.87	486.43	667.86	1047.39			②		
	Y		0.7	1.1	1.6				14.5	20.9	32.2	43.1	69.0			Y		
XL	F_0	①			29.42	37.27	44.71					1009.14	1582.85	2241.88		①	F_0	XH
		②			13.73	19.61	25.52					909.11	1426.92	2021.22		②		
	Y				0.39	0.55	0.77					86.3	138.5	199.8		Y		
												2471.36	3883.57	5506.63	7110.08	①	F_0	XXH
												1114.08	1749.57	2479.21	3202.97	②		
												140.7	227.0	322.3	417.7	Y		

注：1. 表中①表示最大值，②表示推荐值。
2. 小节距，高带速，起动力矩大以及有冲击载荷时，初张紧力应大些，但一般不宜过大，其余情况宜选用推荐值。

12.2.2　M 文件和运算结果

由于设计计算过程需要根据已知条件或计算参数查表和线图，在 M 文件中较多地采用键盘输入函数 input，实时进行设计参数的选取，或确定设计参数以满足设计规范的要求。

```
% 同步带传动设计计算
% 已知条件
P = 0.6;                          % 厨用绞肉机电动机功率(kW)
n1 = 1500;                        % 电动机转速(r/min)
i = 3.0;                          % 传动比
a0 = 250;                         % 初定中心距(mm)
% 1 - 选择同步带型号
Ka = input(    查表 12-1,选取工况系数 Ka =' );
Pc = Ka * P;
fprintf(        计算功率      Pc = %3.4f kW \n' ,Pc);
disp '    @@    梯形齿同步带类型:MXL\XXL\XL\L\H\XH\XXH    @@
TXCD = input( 查图 12-3,梯形齿同步带类型 TXCD =' ,' s' );
Pb = input(    查表 12-2,确定对应的同步带节距(mm) Pb =' );
bs0 = input(    查表 12-2,确定对应的同步带基准宽度(mm) bs0 =' );
% 2 - 确定同步带轮齿数和基准直径
z1 = input(    查表 12-3,确定主动同步带轮齿数 z1 =' );
dp1_j = z1 * Pb/pi;
fprintf(        主动同步带轮基准直径计算值    dp1_j = %3.4f mm \n' ,dp1_j);
if z1 < = 19
```

```
    dp1 = input('查表 12-4,确定主动同步带轮基准直径(mm) dp1 = ');
    da1 = input('查表 12-4,确定主动同步带轮顶圆直径(mm) da1 = ');
else
    disp'@@ 调用同步带轮基准直径和顶圆直径的线性插值函数文件 @@'
    zz = z1;[dp,da] = tbcxd_dp(zz);dp1 = dp;da1 = da;
    fprintf('    主动同步带轮基准直径 dp1 = %3.4f mm \n',dp1);
    fprintf('    主动同步带轮顶圆直径 da1 = %3.4f mm \n',da1);
end
z2 = round(z1 * i);
fprintf('    从动同步带轮齿数 z2 = %3.0f \n',z2);
if z2 == 40 | z2 == 48 | z2 == 60
    dp2 = input('查表 12-4,确定从动同步带轮基准直径(mm) dp2 = ');
    da2 = input('查表 12-4,确定从动同步带轮顶圆直径(mm) da2 = ');
else
    disp'@@ 调用同步带轮基准直径和顶圆直径的线性插值函数文件 @@'
    zz = z2;[dp,da] = tbcxd_dp(zz);dp2 = dp;da2 = da;
    fprintf('    从动同步带轮基准直径 dp2 = %3.4f mm \n',dp2);
    fprintf('    从动同步带轮顶圆直径 da2 = %3.4f mm \n',da2);
end
% 3 - 计算带速
v = pi * dp1 * n1/6e4;
fprintf('    同步带运转速度 v = %3.4f m/s \n',v);
% 4 - 确定带长及其齿数
Lp0 = 2 * a0 + pi * (dp1 + dp2)/2 + (dp2 - dp1)^2/(4 * a0);
fprintf('    同步带基准长度计算值 Lp0 = %3.4f mm \n',Lp0);
Lp = input('查表 12-5,确定同步带节线长度(mm) Lp = ');
z = input('查表 12-5,确定同步带节线上的齿数 z = ');
% 5 - 确定中心距
a = a0 + (Lp - Lp0)/2;
fprintf('    同步带传动中心距 a = %3.4f mm \n',a);
% 6 - 计算主动同步带轮啮合齿数,确定啮合齿数系数
zm = fix(z1/2 - Pb * z1 * (z2 - z1)/(2 * pi^2 * a));          % 截尾取整
fprintf('    主动同步带轮啮合齿数 zm = %3.0f \n',zm);
Kz = input('查表 12-6,确定主动同步带轮啮合齿数系数 Kz = ');
% 7 - 计算同步带传动的基本额定功率和所需要的带宽
Ta = input('查表 12-7,确定同步带的工作拉力(N) Ta = ');
m = input('查表 12-7,确定同步带的单位长度质量(kg/m) m = ');
P0 = (Ta - m * v^2) * v/1e3;
fprintf('    同步带传动的基本额定功率 P0 = %3.4f kW \n',P0);
bs_j = bs0 * (Pc/(Kz * P0))^1.14;
fprintf('    同步带传动所需要的带宽计算值 bs_j = %3.4f mm \n',bs_j);
bs = input('查表 12-8,确定同步带的宽度(mm) bs = ');
Fr = 1e3 * Pc/v;
```

```
fprintf('          作用在轴上的力    Fr = %3.4f N \n' ,Fr);
% 8 - 计算同步带安装时应保证的挠度
t = sqrt(a^2 - ((dp2 - dp1)/2)^2);
f = 0.016 * t;
fprintf('          同步带安装的切边长    t = %3.4f mm \n' ,t);
fprintf('          同步带安装时的挠度    f = %3.4f mm \n' ,f);
F0 = input('    查表12-9,确定同步带的初张紧力(N) F0 = ');
Y = input('    查表12-9,确定同步带的修正系数(N) Y = ');
G = (F0 + t * Y/Lp)/16;
fprintf('          同步带安装时的施加载荷    G = %3.4f N \n' ,G);

% 同步带轮基准直径和顶圆直径的线性插值函数文件
function [dp,da] = tbcxd_dp(zz)
zs = input('    同步带轮齿数首值 zs = ');
dps = input('    同步带轮基准直径首值 dps = ');
das = input('    同步带轮顶圆直径首值 das = ');
zw = input('    同步带轮齿数尾值 zw = ');
dpw = input('    同步带轮基准直径尾值 dpw = ');
daw = input('    同步带轮顶圆直径尾值 daw = ');
dp = dps + (dpw - dps)/(zw - zs) * (zz - zs);
da = das + (daw - das)/(zw - zs) * (zz - zs);
```

计算过程和结果：

```
查表12-1,选取工况系数 Ka = 1.6 * 0.9
   计算功率      Pc = 0.8640 kW
@@   梯形齿同步带类型:MXL\XXL\XL\L\H\XH\XXH   @@
查图12-3,梯形齿同步带类型 TXCD = L
查表12-2,确定对应的同步带节距(mm) Pb = 9.525
查表12-2,确定对应的同步带基准宽度(mm) bs0 = 25.4
查表12-3,确定主动同步带轮齿数 z1 = 16
   主动同步带轮基准直径计算值    dp1_j = 48.5104 mm
查表12-4,确定主动同步带轮基准直径(mm) dp1 = 48.51
查表12-4,确定主动同步带轮顶圆直径(mm) da1 = 47.75
   从动同步带轮齿数    z2 =    48
查表12-4,确定从动同步带轮基准直径(mm) dp2 = 145.53
查表12-4,确定从动同步带轮顶圆直径(mm) da2 = 144.77
   同步带运转速度    v = 3.8100 m/s
   同步带基准长度计算值    Lp0 = 814.2102 mm
查表12-5,确定同步带节线长度(mm) Lp = 819.15
查表12-5,确定同步带节线上的齿数 z = 86
   同步带传动中心距    a = 252.4699 mm
   主动同步带轮啮合齿数 zm =     7
查表12-6,确定主动同步带轮啮合齿数系数 Kz = 1.0
查表12-7,确定同步带的工作拉力(N) Ta = 245
```

查表 12-7,确定同步带的单位长度质量(kg/m) m = 0.096

同步带传动的基本额定功率　P0 = 0.9281 kW

同步带传动所需要的带宽计算值　bs_j = 23.4091 mm

查表 12-8,确定同步带的宽度(mm) bs = 25.4

作用在轴上的力　Fr = 226.7736 N

同步带安装的切边长　t = 247.7657 mm

同步带安装时的挠度　f = 3.9643 mm

查表 12-9,确定同步带的初张紧力(N) F0 = 122.59

查表 12-9,确定同步带的修正系数(N) Y = 10.9

同步带安装时的施加载荷　G = 7.8679 N

12.3　多楔带传动设计计算

多楔带（又称多槽带）是指以平带为基体、内表面排布有等间距纵向 40°梯形楔的环形橡胶传动带，其工作面为楔的侧面。多楔带的优点是：多楔带与带轮的接触面积和摩擦力较大，载荷沿带宽的分布较均匀，因而传动能力更大；由于带体轻薄、柔软、结构合理，故工作应力小，可在较小的带轮上工作；多楔带还具有传动振动小、散热快、运转平稳、使用伸长小、传动比大和极限线速度高等特点，因而工作寿命更长；节能效果明显，传动效率高；传动紧凑，占据空间小。此外，多楔带的背面也能传动，而且可使用自动张力调整器，使传动更加安全、可靠。

12.3.1　多楔带传动的特点

多楔带传动的主要特点是：

（1）传动功率大，空间相同时比普通 V 带的传动功率高 30%。

（2）传动系统结构紧凑，在相同的传动功率情况下，传递装置所占空间比普通 V 带小 25%。

（3）带体薄而柔软，适应带轮直径小的传动，也适应高速传动，带速可达 40 m/s；振动小，发热少，运转平稳。

（4）耐热、耐油、耐磨，使用伸长小，工作寿命长。

多楔带特别适用于结构要求紧凑、传动功率大的高速传动，主要应用于发动机、电动机等动力设备传动。目前常用的类型有：PH、PJ、PK、PL、PM。

12.3.2　多楔带传动设计计算实例

例 12-3　设计某离心式鼓风机采用多楔带传动。原动机是电动机，额定功率 $P=7.5$ kW，转速 $n_1=720$ r/min，离心式鼓风机转速 $n_2=450$ r/min。鼓风机每天两班制工作，结构要求中心距 $a_0\approx955$ mm。

解：

1. 选择多楔带型号

根据表 12-10，按照原动机是电动机，工作机是鼓风机，每天两班制工作，选取工况系数 $K_A=1.1$，则计算功率

$$P_d = K_A P = 1.1 \times 7.5 = 8.25\ \text{kW}$$

根据图 12-5，选取 PL 型多楔带。

表 12-10　多楔带工况系数（JB/T 5983—1992）

<table>
<tr><td rowspan="4">工　况</td><td colspan="6">原动机类型</td></tr>
<tr><td colspan="3">交流电动机（普通转矩，笼型，同步，分相式），直流电动机（并励），内燃机</td><td colspan="3">交流电动机（大转矩、大滑差率，单相、滑环式、串励），直流电动机（复励）</td></tr>
<tr><td>每天连续运转 ≤6 h</td><td>每天连续运转 >6～16 h</td><td>每天连续运转 >16～24 h</td><td>每天连续运转 ≤6 h</td><td>每天连续运转 >6～16 h</td><td>每天连续运转 >16～24 h</td></tr>
<tr><td colspan="6">K_A</td></tr>
<tr><td>液体搅拌器，鼓风机和排气装置，离心泵和压缩机，功率在 7.5 kW 以下（含 7.5 kW）的风扇，轻型输送机</td><td>1.0</td><td>1.1</td><td>1.2</td><td>1.1</td><td>1.2</td><td>1.3</td></tr>
<tr><td>带式输送机（砂子、尘物等），和面机，功率超过 7.5 kW 的风扇，发电机，洗衣机，机床，冲床、压力机、剪床，印刷机，往复式振动筛，正排量旋转泵</td><td>1.1</td><td>1.2</td><td>1.3</td><td>1.2</td><td>1.3</td><td>1.4</td></tr>
<tr><td>制砖机，斗式提升机，励磁机，活塞式压缩机，输送机（链板式、盘式、螺旋式），锻压机床，造纸用打浆机，柱塞泵，正排量鼓风机，粉碎机，锯床和木工机械</td><td>1.2</td><td>1.3</td><td>1.4</td><td>1.4</td><td>1.5</td><td>1.6</td></tr>
<tr><td>破碎机（旋转式、颚式、滚动式），研磨机（球式、棒式、圆筒壁式），起重机，橡胶机械（压光机、模压机、轧制机）</td><td>1.3</td><td>1.4</td><td>1.5</td><td>1.6</td><td>1.6</td><td>1.8</td></tr>
<tr><td>节流机械</td><td>2.0</td><td>2.0</td><td>2.0</td><td>2.0</td><td>2.0</td><td>2.0</td></tr>
</table>

注：如使用张紧轮，将下列数值加到 K_A 中：张紧轮位于松边内侧：0；张紧轮位于松边外侧：0.1；张紧轮位于紧边内侧：0.1；张紧轮位于紧边外侧：0.2。

2. 确定多楔带轮有效直径

计算传动比

$$i = \frac{n_1}{n_2} = \frac{720}{450} = 1.6$$

根据表 12-11，选取主动多楔带轮有效直径 $d_{e1} = 125\ \text{mm} > d_{emin} = 75\ \text{mm}$。

PL 型多楔带轮的有效直径增量 $\Delta e = 3\ \text{mm}$，一般多楔带传动的滑差率 $\varepsilon = 0.02$，则从动多楔带轮有效直径

$$d_{e2} = i(d_{e1} + 2\Delta e)(1 - \varepsilon) - 2\Delta e = 1.6 \times (125 + 2 \times 3)(1 - 0.02) - 2 \times 3 = 199.4080\ \text{mm}$$

根据表 12-11，选取从动多楔带轮有效直径 $d_{e2} = 200\ \text{mm}$。

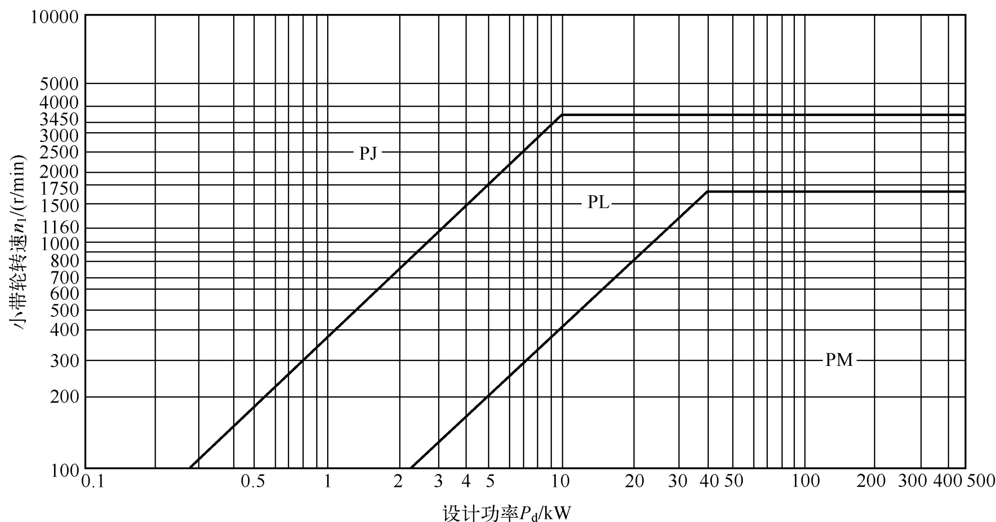


图 12-5 多楔带选型图

表 12-11 多楔带轮直径系列（JB/T 5983—1992）

带轮直径系列 d_e					
PI		PL		PM	
20	95	75	280	180	750
22.4	100	80	300	200	800
25	106	90	315	212	850
28	112	95	335	224	900
31.5	118	100	355	236	950
33.5	125	106	375	250	1000
35.5	132	112	400	265	1120
37.5	140	118	425	280	
40	150	125	450	300	
42.5	160	132	470	315	
45	170	140	500	365	
47.5	180	150	560	375	
50	200	160	600	400	
53	212	170	630	425	
56	224	180	710	450	
60	236	200	750	475	
63	250	212		500	
71	265	224		560	
75	280	236		600	
80	300	250		630	
90		265		710	

注：选择主动轮有效直径时，不应小于表中该类型的最小直径值。

3. 确定多楔带的有效长度和中心距

按照结构要求，初定中心距 $a_0=955$ mm。计算多楔带的有效长度

$$L_{d0}=2a_0+\frac{\pi}{2}(d_{e1}+d_{e2})+\frac{(d_{d2}-d_{d1})^2}{4a_0}$$

$$=2\times955+\frac{\pi}{2}(125+200)+\frac{(200-125)^2}{4\times955}=2421.9813\ \text{mm}$$

根据表 12–12，选取多楔带的有效长度 $L_{d0}=2360\ \text{mm}$，对应的带长修正系数 $K_L=0.96$。

表 12–12　PL 型多楔带有效长度和带长修正系数

有效长度/mm	1250	1400	1600	1800	2000	2360	2500	2650	2800
修正系数	0. 85	0. 87	0. 89	0. 91	0. 93	0. 96	0. 96	0. 98	0. 98

计算实际中心距

$$a=a_0+\frac{L_d-L_{d0}}{2}=955+\frac{2360-2422}{2}=924.0093\ \text{mm}$$

取整 $a=924\ \text{mm}$。

根据多楔带有效长度，从表 12–13 选取中心距调整量：$\Delta_{max}=29\ \text{mm}$ 和 $\delta_{min}=25\ \text{mm}$。因此，中心距尺寸的范围是

最小中心距　　$a_{min}=a-\delta_{min}=924-25=899\ \text{mm}$

最大中心距　　$a_{max}=a-\Delta_{max}=924+29=953\ \text{mm}$

表 12–13　中心距离调整量（PL 带）

有效长度/mm	Δ_{max}	δ_{min}
1250～1500	16	22
1500～1800	19	22
1800～2000	22	24
2000～2240	25	24
2240～2500	29	25
2500～3000	34	27
3000～4000	40	29

4. 计算主动多楔带轮包角

主动多楔带轮包角

$$\alpha_1=180°-\frac{d_{d2}-d_{d1}}{a}\times\frac{180°}{\pi}=180°-\frac{200-125}{924}\times\frac{180°}{\pi}=175.3494°$$

根据表 12–14，采用线性插值法得到包角修正系数 $K_\alpha=0.9845$。

表 12–14　包角修正系数 K_α

小轮包角 α_1/(°)	包角修正系数 K_α	小轮包角 α_1/(°)	包角修正系数 K_α	小轮包角 α_1/(°)	包角修正系数 K_α
180	1. 00	148	0. 90	113	0. 77
177	0. 99	145	0. 89	110	0. 76
174	0. 98	142	0. 88	106	0. 75
171	0. 97	139	0. 87	103	0. 73
169	0. 97	136	0. 86	99	0. 72
166	0. 96	133	0. 85	95	0. 70
163	0. 95	130	0. 84	91	0. 68
160	0. 94	127	0. 83	87	0. 66
157	0. 93	125	0. 81	83	0. 84
154	0. 92	120	0. 80		
151	0. 91	117	0. 79		

5. 确定多楔带的楔数

根据表 12-15，对于主动多楔带轮有效直径 $d_{e1}=125\,\text{mm}$，转速 $n_1=720\,\text{r/min}$ 在 $n_1=700\sim800\,\text{r/min}$ 的范围，采用线性插值得到基本额定功率 $P_0=0.9080\,\text{kW}$；根据表 12-16，对于传动比 $i=1.6$ 在 $i=1.58\sim1.94$ 的范围，转速 $n_1=720\,\text{r/min}$ 在 $n_1=700\sim800\,\text{r/min}$ 的范围，采用线性插值得到功率增量 $\Delta P_0=0.0420\,\text{kW}$。计算多楔带的楔数

$$z\geqslant\frac{P_d}{(P_0+\Delta P_0)K_\alpha K_L}=\frac{8.25}{(0.9080+0.0420)\times0.9845\times0.96}=9.1885$$

取整 $z=10$。

表 12-15　PL 型多楔带传递的基本额定功率　（单位：kW）

小轮转速 n_1 /r·min^{-1}	小带轮有效直径 d_{e1}/mm																
	75	80	90	95	100	106	112	118	125	132	140	150	160	170	180	200	212
100	0.07	0.08	0.10	0.11	0.12	0.13	0.13	0.14	0.16	0.17	0.19	0.20	0.22	0.24	0.25	0.28	0.30
200	0.11	0.15	0.19	0.20	0.22	0.23	0.25	0.26	0.30	0.31	0.34	0.37	0.40	0.43	0.46	0.52	0.55
300	0.19	0.22	0.26	0.28	0.31	0.33	0.35	0.37	0.42	0.44	0.48	0.53	0.57	0.62	0.66	0.75	0.79
400	0.24	0.27	0.33	0.36	0.39	0.42	0.45	0.48	0.54	0.57	0.63	0.67	0.74	0.80	0.86	0.97	1.02
500	0.28	0.32	0.40	0.43	0.47	0.51	0.54	0.58	0.66	0.69	0.76	0.83	0.90	0.97	1.01	1.18	1.25
540	0.31	0.34	0.43	0.46	0.50	0.54	0.58	0.62	0.70	0.74	0.81	0.89	0.96	1.04	1.11	1.26	1.34
600	0.33	0.37	0.46	0.51	0.55	0.60	0.63	0.68	0.76	0.81	0.89	0.97	1.05	1.13	1.22	1.38	1.40
700	0.37	0.43	0.53	0.57	0.63	0.68	0.72	0.78	0.89	0.92	1.01	1.11	1.21	1.30	1.40	1.58	1.67
800	0.42	0.47	0.59	0.64	0.70	0.75	0.81	0.87	0.98	1.03	1.14	1.25	1.35	1.46	1.57	1.77	1.87
900	0.46	0.52	0.65	0.71	0.77	0.84	0.90	0.95	1.08	1.14	1.26	1.38	1.50	1.61	1.73	1.96	2.07
1000	0.49	0.57	0.70	0.78	0.84	0.91	0.98	1.04	1.18	1.25	1.38	1.51	1.63	1.77	1.89	2.14	2.27

表 12-16　PL 型多楔带传动比引起的功率增量　（单位：kW）

小轮转速 n_1 /r·min^{-1}	传动比 i									
	1.00~1.01	1.02~1.05	1.06~1.11	1.12~1.18	1.19~1.26	1.27~1.38	1.39~1.57	1.58~1.94	1.95~1.338	≥3.39
100	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
200	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
300	0.00	0.00	0.01	0.00	0.01	0.01	0.01	0.02	0.02	0.02
400	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01	0.02	0.02	0.03	0.03	0.03
500	0.00	0.00	0.01	0.01	0.02	0.02	0.03	0.03	0.04	0.04
600	0.00	0.01	0.01	0.01	0.02	0.03	0.04	0.04	0.04	0.04
700	0.00	0.01	0.01	0.02	0.03	0.04	0.04	0.04	0.05	0.05
800	0.00	0.01	0.01	0.02	0.03	0.04	0.04	0.05	0.06	0.06
900	0.00	0.01	0.01	0.03	0.04	0.04	0.05	0.06	0.07	0.07
1000	0.00	0.01	0.01	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.07	0.07

6. 计算多楔带传动带速和压轴力

多楔带传动带速

$$v=\frac{\pi d_{e1}n_1}{60\times1000}=\frac{\pi\times125\times720}{60\times1000}=4.7124\ \mathrm{m/s}$$

多楔带传动的有效拉力

$$F=\frac{1000P_d}{v}=\frac{1000\times8.25}{4.7124}=1750.7044\ \mathrm{N}$$

根据表12-17，对于主动多楔带轮包角 $\alpha_1=175.3494°$ 在 $\alpha_1=180°\sim170°$ 范围，采用线性插值得到多楔带楔合系数 $K_z=1.5279$。因此，多楔带压轴力

$$F_Q=K_zF\sin\frac{\alpha_1}{2}=1.5279\times1750.7044\times\sin\frac{175.3494°}{2}=2672.7048\ \mathrm{N}$$

表12-17　多楔带楔合系数

主动轮包角 α_1/（°）	180	170	160	150	140	130	120
楔合系数 K_z	1.50	1.56	1.63	1.71	1.80	1.91	2.04

12.3.3　M文件和运算结果

编制M文件如下：

```
% 多楔带传动设计计算
% 已知条件
P=7.5;                          % 离心式鼓风机电动机功率(kW)
n1=720;                         % 电动机转速(r/min)
n2=450;                         % 鼓风机转速(r/min)
a0=955;                         % 初定中心距(mm)
% 1-选择多楔带型号
Ka=input('   查表12-10,选取工况系数Ka=');
Pc=Ka*P;
fprintf('        计算功率      Pc=%3.4f kW \n',Pc);
disp '    @@    多楔带常用类型:PJ\PL\PM    @@'
DXDX=input(' 查图12-5,选取多楔带类型DXDX=','s');
% 2-确定多楔带轮的有效直径
i=n1/n2;
fprintf('          传动比      i=%3.4f \n',i);
de1=input('   查表12-11,确定主动多楔带轮有效直径(mm)de1=');
switch DXDX                     % 根据多楔带型号选取多楔带轮直径增量
    case'PJ'
        Delta_e=1.2;
    case'PL'
        Delta_e=3;
    case'PM'
        Delta_e=4;
end
fprintf('          多楔带轮直径增量(mm)Delta_e=%3.4f mm \n',Delta_e);
```

```
epslion = input('   确定多楔带传动的滑差率   epslion = ');
de20 = i * (de1 + 2 * Delta_e) * (1 - epslion) - 2 * Delta_e;
fprintf('      主动多楔带轮有效直径计算值   de20 = %3.4f mm \n',de20);
de2 = input('   查表 12-11,确定从动多楔带轮有效直径(mm) de2 = ');
% 3 - 确定多楔带的有效长度和中心距
Ld0 = 2 * a0 + pi * (de1 + de2)/2 + (de2 - de1)^2/(4 * a0);
fprintf('      多楔带有效长度计算值   Ld0 = %3.4f mm \n',Ld0);
Ld = input('   查表 12-12,确定多楔带有效长度(mm) Ld = ');
Kl = input('   查表 12-12,确定多楔带带长修正系数 Kl = ');
a = a0 + (Ld - Ld0)/2;
fprintf('      多楔带传动中心距   a = %3.4f mm \n',a);
if Ld >= 1250 & Ld < 1500
    delta_max = 16;delta_min = 22;
elseif Ld >= 1500 & Ld < 1800
    delta_max = 19;delta_min = 22;
elseif Ld >= 1800 & Ld < 2000
    delta_max = 22;delta_min = 24;
elseif Ld >= 2000 & Ld < 2240
    delta_max = 25;delta_min = 24;
elseif Ld >= 2240 & Ld < 2500
    delta_max = 29;delta_min = 25;
elseif Ld >= 2500 & Ld < 3000
    delta_max = 34;delta_min = 27;
elseif Ld >= 3000 & Ld < 4000
    delta_max = 40;delta_min = 29;
end
fprintf('   查表 12-13,中心距最小调整量   delta_min = %3.4f mm \n',delta_min);
fprintf('   查表 12-13,中心距最大调整量   delta_max = %3.4f mm \n',delta_max);
a_min = a - delta_min;a_max = a + delta_max;
fprintf('      多楔带中心距最小值   a_min = %3.4f mm \n',a_min);
fprintf('      多楔带中心距最大值   a_max = %3.4f mm \n',a_max);
% 4 - 计算主动多楔带轮包角
alpha = 180 - 180 * de1 * (i - 1)/pi/a;
fprintf('      主动多楔带轮包角   alpha = %3.4f °\n',alpha);
Kalpha = DXD_BJXS(alpha);
fprintf('      * 表 12-14,插值确定带轮包角修正系数 Kalpha = %3.4f \n',Kalpha);
% 5 - 确定带的楔数
disp'      * 表 12-15,插值确定多楔带基本额定功率
P0 = DXD_JBEDGL(n1);
fprintf('      多楔带基本额定功率 P0 = %3.4f kW \n',P0);
disp'      * 表 12-16,插值确定多楔带传动功率增量
DP0 = DXD_GLZL(n1);
fprintf('      多楔带传动功率增量 DP0 = %3.4f kW \n',DP0);
```

```
zmin = Pc/((P0 + DP0) * Kalpha * Kl);
fprintf('        带楔数的计算值 zmin = %3.4f \n',zmin);
z = input('            确定带的楔数        z = ');
% 6 - 计算带速和压轴力
v = pi * de1 * n1/6e4;
fprintf('        多楔带运转速度            v = %3.4f m/s \n',v);
F = 1e3 * Pc/v;
fprintf('        作用在轴上有效拉力       F = %3.4f N \n',F);
Kz = DXD_XHXS(alpha);
fprintf('      * 表 12-17,插值确定多楔带楔合系数 Kz = %3.4f \n',Kz);
FQ = Kz * F * sin(0.5 * alpha * pi/180);
fprintf('            多楔带传动压轴力     FQ = %3.4f N \n',FQ);

% 多楔带包角修正系数线性插值的函数文件(表 12-14)
functionKalpha = DXD_BJXS(alpha)
x = [83 87 91 95 99 103 106 110 113 117 120 125 127 130 133 136 139 142 145 148 151 154 157 160
163 166 169 171 174 177 180];
y = [0.64 0.66 0.68 0.70 0.72 0.73 0.75 0.76 0.77 0.79 0.80 0.81 0.83 0.84 0.85 0.86 0.87 0.88
0.89 0.90 0.91 0.92 0.93 0.94 0.95 0.96 0.97 0.97 0.98 0.99 1.00];
Kalpha = interp1(x,y,alpha,'linear');

% PL 型多楔带基本额定功率的线性插值函数文件(表 12-15)
function P0 = DXD_JBEDGL(n1)
n1s = input('    主动多楔带轮转速首值 n1s = ');
n1w = input('    主动多楔带轮转速尾值 n1w = ');
P0s = input('    对应主动多楔带轮有效直径的基本额定功率首值 P0s = ');
P0w = input('    对应主动多楔带轮有效直径的基本额定功率尾值 P0w = ');
P0 = P0s + (n1 - n1s) * (P0w - P0s)/(n1w - n1s);

% PL 型多楔带传动比引起的功率增量的线性插值函数文件(表 12-16)
function DP0 = DXD_GLZL(n1)
n1s = input('    主动多楔带轮转速首值 n1s = ');
n1w = input('    主动多楔带轮转速尾值 n1w = ');
DP0s = input('    对应传动比的功率增量首值 DP0s = ');
DP0w = input('    对应传动比的功率增量尾值 DP0w = ');
DP0 = DP0s + (n1 - n1s) * (DP0w - DP0s)/(n1w - n1s);

% 多楔带楔合系数线性插值的函数文件(表 12-17)
function Kz = DXD_XHXS(alpha)
al = [180 170 160 150 140 130 120];
kz = [1.50 1.56 1.63 1.71 1.80 1.91 2.04];
Kz = interp1(al,kz,alpha,'linear');
```

计算结果：

查表 12-10,选取工况系数 Ka = 1. 1
计算功率　　Pc = 8. 2500 kW
@ @　多楔带常用类型:PJ\PL\PM　@ @
查图 12-5,选取多楔带类型 DXDX = PL
传动比　　i = 1. 6000
查表 12-11,确定主动多楔带轮有效直径(mm) de1 = 125
多楔带轮直径增量(mm) Delta_e = 3. 0000 mm
确定多楔带传动的滑差率 epslion = 0. 02
主动多楔带轮有效直径计算值　de20 = 199. 4080 mm
查表 12-11,确定从动多楔带轮有效直径(mm) de2 = 200
多楔带有效长度计算值　Ld0 = 2421. 9813 mm
查表 12-12,确定多楔带有效长度(mm) Ld = 2360
查表 12-12,确定多楔带带长修正系数 Kl = 0. 96
多楔带传动中心距　a = 924. 0093 mm
查表 12-13,中心距最小调整量　delta_min = 25. 0000 mm
查表 12-13,中心距最大调整量　delta_max = 29. 0000 mm
多楔带中心距最小值　a_min = 899. 0093 mm
多楔带中心距最大值　a_max = 953. 0093 mm
主动多楔带轮包角　alpha = 175. 3494 °
* 表 12-14,插值确定带轮包角修正系数 Kalpha = 0. 9845
* 表 12-15,插值确定多楔带基本额定功率
主动多楔带轮转速首值 n1s = 700
主动多楔带轮转速尾值 n1w = 800
对应主动多楔带轮有效直径的基本额定功率首值 P0s = 0. 89
对应主动多楔带轮有效直径的基本额定功率尾值 P0w = 0. 98
多楔带基本额定功率 P0 = 0. 9080 kW
* 表 12-16,插值确定多楔带传动功率增量
主动多楔带轮转速首值 n1s = 700
主动多楔带轮转速尾值 n1w = 800
对应传动比的功率增量首值 DP0s = 0. 04
对应传动比的功率增量尾值 DP0w = 0. 05
多楔带传动功率增量 DP0 = 0. 0420 kW
带楔数的计算值 zmin = 9. 1885
确定带的楔数　z = 10
多楔带运转速度　v = 4. 7124 m/s
作用在轴上有效拉力　F = 1750. 7044 N
* 表 12-17,插值确定多楔带楔合系数 Kz = 1. 5279
多楔带传动压轴力　FQ = 2672. 7048 N

12.4　滚子链传动的优化设计

滚子链传动（rooler chain gearing）是一种以链条作中间挠性件的啮合传动，如图 12-6 所示，它的结构简单，磨损较轻，应用较广，一般用于两轴相距较远的传动场合。

设计链传动时，通常已知条件为：传动的用途和工作情况，原动机类型，传递的功率 P，主动轮转速 n_1，传动比 i，以及外廓安装尺寸等。设计计算的内容为：确定滚子链的型号、链节距 p、链节数 L_p 和链排数 m，选择链轮的齿数 z_1、材料和结构，绘制链轮工作图，并确定链传动的中心距。滚子链传动的优化设计的要求是，在满足其传递功率和链速限制条件的基础上，确定一组最优的传动参数，使滚子链传动的结构质量最小。

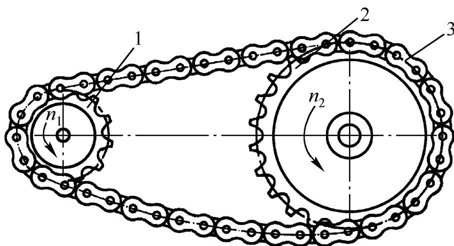


图 12-6　滚子链传动

1—主动链轮　2—从动链轮　3—链条

12.4.1　滚子链传动设计计算的有关公式和曲线拟合

（1）滚子链传动功率　对于链速 $v \geqslant 0.6$ m/s 且润滑良好的链传动，主要依据特定条件下的滚子链功率线图进行设计计算。基本设计公式是

$$P_0 \geqslant \frac{K_A P}{K_z K_m} (\mathrm{kW}) \tag{12-11}$$

式中，K_A 是工作情况系数；P 是链传动的名义功率，单位为 kW；P_0 是特定条件下单排滚子链额定功率，单位为 kW，将滚子链极限功率线图拟合为公式

$$P_0 = 0.003 z_1^{1.08} n_1^{0.9} \left(\frac{p}{25.4}\right)^{(3-0.0028p)} \tag{12-12}$$

K_z 是小链轮齿数系数，当链速 $v \geqslant 0.6$ m/s 时，链传动主要失效形式之一是链板疲劳，K_z 按照下式计算

$$K_z = \left(\frac{z_1}{19}\right)^{1.08} \tag{12-13}$$

K_m 是多排链系数，将数表拟合为公式

$$K_m = m^{0.84} \tag{12-14}$$

其中，m 为链排数。

（2）链节数 L_p 与中心距 a 和链节距 p 的关系式

$$L_p = 2\frac{a}{p} + \frac{z_2 + z_1}{2} + \frac{p}{a}\left(\frac{z_2 - z_1}{2\pi}\right)^2 \tag{12-15}$$

（3）链轮分度圆计算公式

$$d = \frac{p}{\sin(180°/z)} \tag{11-16}$$

式中，p 是链节距；z 是链轮齿数。

（4）链轮内链节齿宽 b_1 与链节距 p 的拟合直线方程式

$$b_1 = 0.1999 + 0.6078p \tag{12-17}$$

（5）单排链单位长度质量 q 与链节距 p 的数表拟合为公式

$$q = 0.0039 p^{1.9997} \tag{12-18}$$

12.4.2　滚子链传动优化设计实例

例 12–4　要求设计一电动机到液体搅拌机之间的滚子链传动，已知电动机功率 $P=7.5\,\text{kW}$，转速 $n_1=960\,\text{r/min}$，传动比 $i=2.8$，传动载荷平稳。希望传动中心距 $a\leqslant700\,\text{mm}$。试设计此链传动，使滚子链传动的结构质量为最小。

解：建立优化设计的数学模型

1. 设计变量

选择链轮的齿数 z_1、链节距 p、链节数 L_a 和链排数 m 作为设计变量

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}z_1\\p\\L_p\\m\end{bmatrix}$$

2. 目标函数

滚子链的质量为 $f_1=qL_ppm(g)$；两个链轮的质量近似表示为

$$f_2=\pi\left(\frac{d_1+d_2}{2}\right)^2b_1\gamma m=\frac{\gamma\pi b_1p^2m}{4}\left[\frac{1}{\sin(180°/z_1)}+\frac{1}{\sin(180°/z_2)}\right]^2$$

式中，钢的密度是 $\gamma=7.85\times10^{-3}\,\text{g/mm}^3$。因此链传动质量的目标函数

$$\min f(\boldsymbol{X})=f_1+f_2=qL_ppm+\frac{\gamma\pi mb_1p^2}{4}\left[\frac{1}{\sin(180°/z_1)}+\frac{1}{\sin(180°/z_2)}\right]^2$$

式中，链节数 L_p 按照式（12–15）确定，链轮内链节齿宽 b_1（链轮齿宽略大于 b_1）按照式（12–17）确定，单排链单位长度质量 q 按照式（12–18）确定。

3. 约束条件

（1）链传动承载能力限制的性能约束条件

$$g_1(\boldsymbol{X})=K_AP-P_0K_zK_m\leqslant0$$

式中，按照有关资料选取工作情况系数 $K_A=1.0$；按照已知条件，传递功率 $P=7.5\,\text{kW}$；依据式（12–12），特定条件下单排滚子链额定功率 P_0 为

$$P_0=0.003Z_1^{1.08}n_1^{0.9}\left(\frac{p}{25.4}\right)^{(3-0.0028p)}=0.003x_1^{1.08}n_1^{0.9}\left(\frac{x_2}{25.4}\right)^{(3-0.0028x_2)}$$

估计链速为 $v\geqslant6\,\text{m/s}$ 时，链传动使链板疲劳失效，依据式（12–13）得到小链轮齿数系数

$$K_z=\left(\frac{z_1}{19}\right)^{1.08}=\left(\frac{x_1}{19}\right)^{1.08}$$

依据式（12–14），多排链系数 K_m 为

$$K_m=m^{0.84}=x_4^{0.84}$$

（2）链速范围限制的性能约束条件　链速的限制条件 $v=z_1pn_1/60\times1000\geqslant0.6\,\text{m/s}$，得到

$$g_2(\boldsymbol{X})=0.6\times60000-n_1x_1x_2\leqslant0$$

（3）各个设计变量的边界约束条件　小链轮齿数的限制条件 $19\leqslant z_1\leqslant23$，得到

$$g_3(\boldsymbol{X}) = 19 - x_1 \leqslant 0$$

$$g_4(\boldsymbol{X}) = x_1 - 27 \leqslant 0$$

链节距的限制条件 $12.7 \leqslant p \leqslant 38.1$ mm，得到

$$g_5(\boldsymbol{X}) = 12.7 - x_2 \leqslant 0$$

$$g_6(\boldsymbol{X}) = x_2 - 76.2 \leqslant 0$$

根据传动中心距的限制条件 $30p \leqslant a \leqslant 50p$ 和式（12－15），得到中心距链节数的限制条件

$$g_7(\boldsymbol{X}) = 80 - x_3 \leqslant 0$$

$$g_8(\boldsymbol{X}) = x_3 - 160 \leqslant 0$$

根据链排数的限制条件 $1 \leqslant m \leqslant 4$，得到

$$g_9(\boldsymbol{X}) = 1 - x_4 \leqslant 0$$

$$g_{10}(\boldsymbol{X}) = x_4 - 4 \leqslant 0$$

这是一个具有 10 个不等式约束条件的 4 维非线性优化问题。

12.4.3 M 文件与计算结果

使用 MATLAB 求解多维非线性规划问题的 fmincon 函数，编制滚子链传动结构质量的目标函数文件 lcdyh_f.m 和非线性约束函数文件 lcdyh_g.m。选取常规设计计算结果（小链轮齿数 z_1、链节距 $p = 15.875$、链节数 $L_p = 130$ 和链排数 $m = 1$）作为初始值代入主文件中，经过迭代计算，求出离散最优解

$$\boldsymbol{X}^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \\ x_4^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ p \\ L_p \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24.1560 \\ 12.7000 \\ 130.0000 \\ 1.0000 \end{bmatrix}$$

由于性能约束 $g_1(\boldsymbol{X}^*) = 0$、边界约束 $g_4(\boldsymbol{X}^*) = 0$ 和 $g_9(\boldsymbol{X}^*) = 0$，可见最优点位于链传动功率约束边界、链节距最小值约束边界和最少链排数约束边界的交集上。

按照标准规范进行凑整，得到可行的凑整解：小链轮齿数 $z_1 = 25$，链节距 $p = 12.70$ mm，链节数 $L_p = 130$，链排数 $m = 1$，中心距 $a = 512.262$ mm。

根据转速比公式计算大链轮齿数 $z_2 = iz_1 = 2.8 \times 25 = 70$，取奇数齿 $z_2 = 71$。

链传动速度

$$v = \frac{z_1 n_1 p}{60 \times 1000} = \frac{25 \times 960 \times 12.7}{60000} = 5.08 \text{ m/s}$$

从优化设计凑整结果可知，由于充分发挥了链传动工作能力，选取的链节距比常规设计计算结果降低 1 个链号，链传动系统质量减轻了约 45%。

编制 M 文件如下：

```
%滚子链传动优化设计(传动结构质量最小)
%设计变量:x(1)=z1-小链轮齿数、x(2)=p-链节距、x(3)=Lp-链节数、x(4)=m-链排数
% 1-滚子链传动优化设计主程序
```

```
%已知条件
P=7.5;Ka=1.0;                          %传递功率和工况系数(液体搅拌机)
n1=960;i=2.8;n2=n1/i;                  %链轮转速和传动比
gamma=7.85e-3;                         %钢的密度7.85*10^(-3)g/mm^3
a0=600;                                %中心距初值
disp'          ########   滚子链传动已知条件   ########'
fprintf('              传递功率              P=%3.4f kW \n',P)
fprintf('              工况系数             Ka=%3.4f \n',Ka)
fprintf('           主动链轮转速            n1=%3.4f r/min \n',n1)
fprintf('           从动链轮转速            n2=%3.4f r/min \n',n2)
fprintf('               传动比               i=%3.4f \n',i)
%设计变量的初始值(常规设计结果)
x0=[25;15.875;130;1];
f0=lcdyh_f(x0);
fprintf('         常规设计方案质量          f0=%3.4f g \n',f0)
%设计变量的下界与上界
lb=[19;12.7;80;1];
ub=[27;76.2;160;4];
%线性不等式约束(g(3)-g(10))中设计变量的系数矩阵
a=zeros(8,4);
a(1,1)=-1;a(2,1)=1;  % g(3)=19   -x(1)<=0;  g(4)=x(1)-27   <=0
a(3,2)=-1;a(4,2)=1;  % g(5)=12.7-x(2)<=0;   g(6)=x(2)-76.2<=0
a(5,3)=-1;a(6,3)=1;  % g(7)=80   -x(3)<=0;  g(8)=x(3)-160   < =0
a(7,4)=-1;a(8,4)=1;  % g(9)=  1  -x(4)<=0; g(10)=x(4) -  4  <=0
%线性不等式约束(g(3)-g(10))中的常数项列阵
b=[-19;27;-12.7;38.1;-80;160;-1;4];
%使用多维约束优化命令fmincon(调用目标函数lcdyh_f和非线性约束函数lcdyh_g)
%没有等式约束,参数Aeq和beq定义为空矩阵符号“[ ]”
[x,fn]=fmincon(@lcdyh_f,x0,a,b,[],[],lb,ub,@lcdyh_g);
disp'        ********   滚子链传动优化设计最优解   ********'
fprintf('            小链轮齿数           z1* =%3.4f \n',x(1))
fprintf('               链节距             p* =%3.4f mm \n',x(2))
fprintf('               链节数            Lp* =%3.4f \n',x(3))
fprintf('               链排数             m* =%3.4f \n',x(4))
fprintf('            链传动质量             f* =%3.4f g \n',fn)
%调用多维约束优化非线性约束函数(lcdyh_g)计算最优点x*的性能约束函数值
g=lcdyh_g(x);
disp'        ========   最优点的性能约束函数值   ========'
fprintf('        链传动功率约束函数值     g1* =%3.4f \n',g(1))
fprintf('        链传动链速约束函数值     g2* =%3.4f \n',g(2))
%优化设计的凑整解
zj=mod(x(1),2);
if zj==1
    z1=x(1);                                  %小链轮齿数计算结果为奇数
else
```

```
        z1 = round(x(1)/2) * 2 + 1;                %将小链轮齿数四舍五入为奇数
    end
    z2 = fix(i * z1);z2o = mod(z2,2);
    if z2o == 0;z2 = z2 + 1;end                     %将大链轮齿数圆整为奇数
    pt = [12.70 15.875 19.05 25.40 31.75 38.10 44.45 50.80 63.50 76.20];
    if x(2) < = pt(1)
        p = pt(1);
    else
        for j = 1:10
            if x(2) > pt(j)
                p = pt(j + 1);                      %确定标准链节距
            end
        end
    end
    %确定链节数 Lp 和链排数 m
    Lpj = mod(x(3),2);
    ifLpj == 0
        Lp = x(3);
    else
        Lp = round(x(3)/2) * 2;                    %将链节数计算结果圆整为偶数
    end
    m = round(x(4));                               %链排数圆整为整数
    disp'    ########   滚子链传动优化设计凑整解   ########
    fprintf('          小链轮齿数          z1 = %3.4f \n',z1)
    fprintf('          大链轮齿数          z2 = %3.4f \n',z2)
    fprintf('            链节距            p = %3.4f mm \n',p)
    fprintf('            链节数           Lp = %3.4f \n',Lp)
    fprintf('            链排数            m = %3.4f \n',m)
    fz = lcdyh_f([z1 p Lp m]);
    fprintf('      凑整设计方案质量        fz = %3.4f g \n',fz)
    disp'  @@@@@@@@   计算滚子链传动链速和几何尺寸   @@@@@@@@'
    z12 = (z1 + z2)/2;z21 = (z2 - z1)/2;
    a12 = 0.25 * p * ((Lp - z12) + sqrt((Lp - z12)^2 - 8 * (z21/pi)^2));   % 传动中心距
    d1 = p/sin(pi/z1);                                                    %小链轮分度圆直径
    da1 = p * (0.54 + cot(pi/z1));                                        %小链轮齿顶圆直径
    d2 = p/sin(pi/z2);                                                    %小链轮分度圆直径
    da2 = p * (0.54 + cot(pi/z2));                                        %小链轮齿顶圆直径
    v = z1 * n1 * p/6e4;                                                  %链速
    fprintf('             链速            v = %3.4f m/s \n',v)
    fprintf('           传动中心距        a12 = %3.4f mm \n',a12)
    fprintf('      小链轮分度圆直径        d1 = %3.4f mm \n',d1)
    fprintf('      小链轮齿顶圆直径       da1 = %3.4f mm \n',da1)
    fprintf('      大链轮分度圆直径        d2 = %3.4f mm \n',d2)
    fprintf('      大链轮齿顶圆直径       da2 = %3.4f mm \n',da2)
```

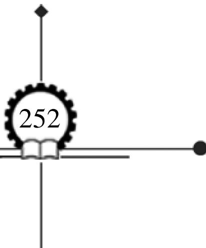
```
% 2 - 滚子链传动优化设计的目标函数(lcdyh_f)
function f = lcdyh_f(x);
n1 = 960;i = 2.8;n2 = n1/i;gamma = 7.85e - 3;a0 = 600;
q = 0.0039 * x(2)^1.9997;                  % 根据 p 与 Q 的列表数据拟合
Lp0 = 2 * a0/x(2) + x(1) * (1 + i)/2 + (x(1) * (i - 1)/(2 * pi))^2 * (x(2)/a0);
f1 = q * Lp0 * x(2) * x(4);                % 链条质量
b1 = 0.1999 + 0.6078 * x(2);               % 根据 p 与 b1 的列表数据拟合
sinz = 1/(sin(pi/x(1))) + 1/(sin(pi/round(i * x(1))));
f2 = gamma * pi * b1 * x(4) * x(2)^2 * sinz;   % 链轮质量
f = f1 + f2;

% 3 - 滚子链传动优化设计的非线性不等式约束函数(lcdyh_g)
function [g,ceq] = lcdyh_g(x);
P = 7.5;Ka = 1.0;n1 = 960;
P0 = 0.003 * x(1)^1.08 * n1^0.9 * (x(2)/25.4)^(3 - 0.0028 * x(2));
Kz = (x(1)/19)^1.08;                       % 小链轮齿数系数
Km = x(4)^0.84;                            % 多排链系数
g(1) = Ka * P - P0 * Kz * Km;              % 传递功率约束函数
g(2) = 0.6 * 6e4 - n1 * x(1) * x(2);       % 链速约束函数
ceq = [];
```

计算结果：

```
        ########滚子链传动已知条件  ########
            传递功率            P = 7.5000 kW
            工况系数           Ka = 1.0000
        主动链轮转速           n1 = 960.0000 r/min
        从动链轮转速           n2 = 342.8571 r/min
              传动比            i = 2.8000
      常规设计方案质量         f0 = 3792.8555 g
      ********  滚子链传动优化设计最优解  ********
          小链轮齿数          z1 * = 24.1560
              链节距           p * = 12.7000 mm
              链节数          Lp * = 130.0000
              链排数           m * = 1.0000
          链传动质量           f * = 2053.6471 g
      ========  最优点的性能约束函数值  ========
  链传动功率约束函数值        g1 * = 0.0000
  链传动链速约束函数值        g2 * = -258510.2983
      ########滚子链传动优化设计凑整解  ########
          小链轮齿数           z1 = 25.0000
          大链轮齿数           z2 = 71.0000
              链节距            p = 12.7000 mm
              链节数           Lp = 130.0000
              链排数            m = 1.0000
      凑整设计方案质量         fz = 2095.5076 g
```

```
@@@@@@@@计算滚子链传动链速和几何尺寸    @@@@@@@@
        链速          v = 5.0800 m/s
    传动中心距      a12 = 512.2620 mm
小链轮分度圆直径     d1 = 101.3299 mm
小链轮齿顶圆直径    da1 = 107.3889 mm
大链轮分度圆直径     d2 = 287.1137 mm
大链轮齿顶圆直径    da2 = 293.6907 mm
```



第 13 章　齿轮、蜗杆和螺旋传动的设计计算

机械传动（Mechanical transmission）在机械工程中应用非常广泛。机械传动是利用机械方式传递动力和运动的传动，而非机械的传动方式是通过如液压、电气、气动、光和热等方式来实现。根据传动件的性质，机械传动又分为用齿轮（gear）、蜗杆蜗轮（worm）、螺杆螺母（screw nut）和螺旋（screw）等实现的刚性传动，以及用皮带（belt）和链条（chain）等实现的挠性传动。

13.1　齿轮传动参数测定和公法线公差计算

通过使用游标卡尺等常用量具，可以测定变位齿轮的基本参数，然后计算齿轮副传动尺寸，加深理解齿轮各基本参数之间的关系。

在标注齿轮工作图的检验项目时，需要列出公法线平均长度极限偏差的要求。

13.1.1　变位齿轮传动参数的测定和计算

1. 确定齿轮的模数和齿制参数

通过测量齿顶圆和齿根圆直径，确定模数 m 和齿制参数 h_a^*、c^*。图 13-1a、b 所示分别为偶数齿和奇数齿的齿顶圆和齿根圆直径的测量。显然对于奇数齿齿轮

$$d_a = D + 2H_1$$
$$d_f = D + 2H_2$$

因此，齿高

$$h = \frac{d_a - d_f}{2} = H_1 - H_2 \tag{13-1}$$

齿轮模数

$$m = \frac{h}{2h_a^* + c^*} \tag{13-2}$$

将两种齿制参数：正常齿 $h_a^* = 1.0$、$c^* = 0.25$ 和短齿 $h_a^* = 0.8$、$c^* = 0.30$ 代入式(13-2)进行计算，得到的模数接近标准值的即为齿轮的实际模数 m（取标准值）。

2. 确定齿轮的压力角和变位系数

通过测量公法线长度确定压力角 α 和变位系数 x。跨齿数

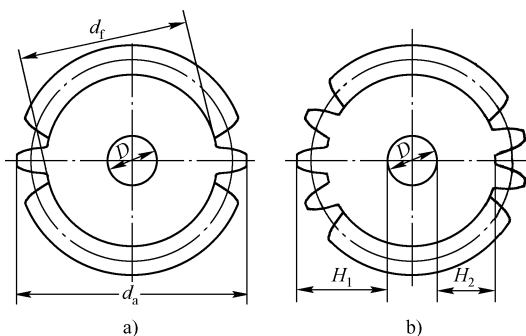


图 13-1　齿根圆和齿顶圆直径的测量

$$k = \frac{z}{9} + 0.5 \tag{13-3}$$

计算的跨齿数四舍五入取整。

分别测量跨 k 个齿的公法线长度 W'_k 和跨 $k+1$ 个齿的公法线长度 W'_{k+1}，则压力角

$$\alpha = \text{acos}\,\frac{P_b}{\pi m} = \text{acos}\,\frac{W'_{k+1} - W'_k}{\pi m} \tag{13-4}$$

将计算得到的压力角 α 圆整为接近的标准值 20°或 15°。公法线长度的测量如图 13-2 所示。

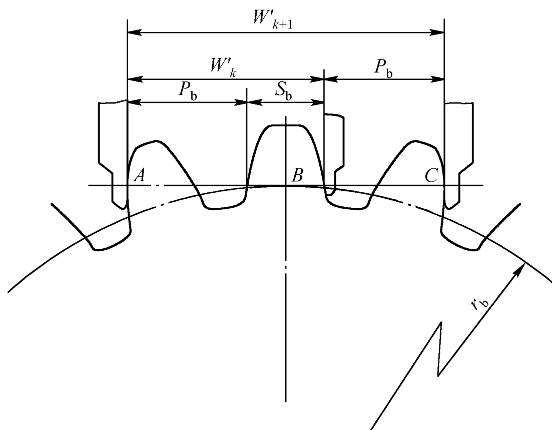


图 13-2　公法线长度的测量

变位系数

$$x = \frac{W'_k - W_k}{2m\sin\alpha} \tag{13-5}$$

式中，标准齿轮公法线长度为

$$W_k = m\cos\alpha[(k-0.5)\pi + z \times \text{inv}\alpha] \tag{13-6}$$

3. 确定齿轮副的啮合角和实际中心距

确定齿轮副的变位系数 x_1 和 x_2 后，根据无侧隙啮合方程式计算啮合角

$$\text{inv}\alpha' = \frac{2(x_1 + x_2)\tan\alpha}{z_1 + z_2} + \text{inv}\alpha \tag{13-7}$$

式中，等号右边都是已知数据（下式中用“$xz\alpha$”表示），利用 MATLAB 中的 fsolve 函数求

解该非线性方程 $f(\alpha') = \tan\alpha' - \alpha' - xz\alpha = 0$，即得到啮合角 α'。实际中心距

$$a' = a\,\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha'} = \frac{m(z_1 + z_2)}{2} \times \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha'} \tag{13-8}$$

4. 计算实例的 M 文件和运算结果

例 13-1　测定变位直齿圆柱齿轮的齿数 $z = 8$，齿根圆直径 $d_{f0} = 33.43$ mm，公法线长度 $W_2 = 24.73$ 和 $W_3 = 39.43$，试确定齿轮的其他基本参数。

```
%测定变位直齿圆柱齿轮基本参数
z=8;               %齿数
df0=33.43;         %齿根圆直径的测量值
%变位齿轮公法线长度的测量值
Wk=24.73;Wk1=39.43;
%跨齿数
k=round(z/9+0.5);
if k<2
    k=2;
end
Pb=Wk1-Wk;                                          %基圆齿距
alf=20;hd=pi/180;                                   %压力角
m=round(Pb/(pi*cos(alf*hd)));                       %模数
Wkb=m*cos(alf*hd)*((k-0.5)*pi+z*0.0149044);         % 标准齿轮公法线长度
x1=(Wk-Wkb)/(2*m*sin(alf*hd));                      % 变位系数
hf=(m*z-df0)/2;                                     %齿根高
%齿顶高系数与顶隙系数
hc=hf/m+x1;
disp''
fprintf('        齿顶高系数与顶隙系数之和    hc=%3.2f \n',hc);
hx=1.00;cx=0.25;      %按照hc计算值确定齿制-正常齿或短齿
%输出齿轮参数
disp''
disp'       ==========  变位齿轮齿轮参数   =========';
fprintf('              齿数     z=%3.0f \n',z);
fprintf('            压力角   alf=%3.0f° \n',alf);
fprintf('              模数     m=%3.3f mm \n',m);
fprintf('        齿顶高系数    hx=%3.2f \n',hx);
fprintf('          顶隙系数    cx=%3.2f \n',cx);
fprintf('          变位系数     x=%3.3f \n',x1);
disp''
disp'     ==========  变位齿轮测量和计算数据   ========='
fprintf('            跨齿数     k=%3.0f \n',k);
fprintf('      测量齿根圆直径   df0=%3.3f mm \n',df0);
fprintf('            齿根高    hf=%3.3f mm \n',hf);
fprintf('          基圆齿距    Pb=%3.3f mm \n',Pb);
fprintf('  测量齿轮公法线长度   Wk=%3.3f mm \n',Wk);
fprintf('  标准齿轮公法线长度  Wkb=%3.3f mm \n',Wkb);
%计算啮合角
```

```
Qp=2*(x1+x1)*tan(alf*hd)/(z+z)+0.0149044;            %节圆处展角弧度值
[x,f]=fsolve('tan(x)-x-0.0688793',0.0149044);        % 使用 fsolve 求解渐开线函数方程
alfp=x/hd;                                            % 啮合角
disp''
disp'  ==========   齿轮副啮合角和渐开线函数值    =========='';
fprintf('                  啮合角   alfp=%3.3f° \n',alfp);
fprintf('        啮合角渐开线函数值    Qp=%3.7f \n',Qp);
%计算中心距、分离系数、齿顶变动系数与几何尺寸
a=0.5*m*(z+z);                          %标准中心距
ap=a*cos(alf*hd)/cos(alfp*hd);          % 实际中心距
y=(ap-a)/m;                             %分离系数
sgm=x1+x1-y;                            % 齿顶变动系数
d=m*z;                                  %分度圆直径
db=d*cos(alf*hd);                       %基圆直径
da=d+2*(hx+x1-sgm)*m;                   % 齿顶圆直径
df=d-2*(hx+cx-x1)*m;                    %齿根圆直径
Wkp=Wkb+2*x1*m*sin(alf*hd);             % 公法线长度
%计算变位齿轮齿厚
alfa=acos(db/da);                                     %齿顶压力角
s=pi*m/2+2*x1*m*tan(alf*hd);                          %分度圆齿厚
sa=s*da/d-da*(tan(alfa)-alfa-0.0149044);              %齿顶圆齿厚
sb=cos(alf*hd)*(s+d*0.0149044);                       %基圆齿厚
disp''
disp'     ==========    变位齿轮齿厚和啮合角     =========='';
fprintf('              分度圆齿厚     s=%3.3f mm \n',s);
fprintf('              齿顶圆齿厚    sa=%3.3f mm \n',sa);
fprintf('                基圆齿厚    sb=%3.3f mm \n',sb);
fprintf('              齿顶压力角   alfa=%3.3f° \n',alfa/hd);
fprintf('                  啮合角   alfp=%3.3f° \n',alfp);
disp''
disp'     ==========   变位齿轮参数和几何尺寸    =========='';
fprintf('          中心距分离系数      y=%3.3f \n',y);
fprintf('            齿顶变动系数    sgm=%3.3f \n',sgm);
fprintf('              标准中心距      a=%3.3f mm \n',a);
fprintf('              实际中心距     ap=%3.3f mm \n',ap);
fprintf('              齿顶圆直径     da=%3.3f mm \n',da);
fprintf('              分度圆直径      d=%3.3f mm \n',d);
fprintf('                基圆直径     db=%3.3f mm \n',db);
fprintf('              齿根圆直径     df=%3.3f mm \n',df);
fprintf('              公法线长度   Wkp=%3.3f mm \n',Wkp);
%根据基圆齿厚、模数和压力角计算变位系数
x2=(sb/(m*cos(alf*hd))-0.5*pi-0.0149044*z)/(2*tan(alf*hd));
fprintf('                变位系数      x=%3.3f \n',x2);
```

计算结果：

齿顶高系数与顶隙系数之和　　hc = 1. 25

========== 变位齿轮参数 ==========

齿数　z = 8

压力角　alf = 20°

模数　m = 5. 000 mm

齿顶高系数　hx = 1. 00

顶隙系数　cx = 0. 25

变位系数　x = 0. 593

========== 变位齿轮测量和计算数据 ==========

跨齿数　k = 2

测量齿根圆直径　df0 = 33. 430 mm

齿根高　hf = 3. 285 mm

基圆齿距　Pb = 14. 700 mm

测量齿轮公法线长度　Wk = 24. 730 mm

标准齿轮公法线长度　Wkb = 22. 701 mm

========== 齿轮副啮合角和渐开线函数值 ==========

啮合角　alfp = 32. 364 °

啮合角渐开线函数值　Qp = 0. 0688793

========== 变位齿轮齿厚和啮合角 ==========

分度圆齿厚　s = 10. 013 mm

齿顶圆齿厚　sa = 2. 775 mm

基圆齿厚　sb = 9. 969 mm

齿顶压力角　alfa = 44. 904°

啮合角　alfp = 32. 364°

========== 变位齿轮参数和几何尺寸 ==========

中心距分离系数　y = 0. 900

齿顶变动系数　sgm = 0. 286

标准中心距　a = 40. 000 mm

实际中心距　ap = 44. 500 mm

齿顶圆直径　da = 53. 068 mm

分度圆直径　d = 40. 000 mm

基圆直径　db = 37. 588 mm

齿根圆直径　df = 33. 432 mm

公法线长度　Wkp = 24. 730 mm

变位系数　x = 0. 593

13. 1. 2　斜齿圆柱齿轮公法线长度及其偏差的计算

1. 确定齿厚极限偏差和公法线长度偏差

在规定中心距偏差的情况下，要保证侧隙要求，必须控制单个齿轮的齿厚或公法线长度。

（1）齿厚极限偏差　齿厚极限偏差 E_{Ss} 和 E_{Si}，可以按照规定的齿轮传动精度等级，查表确定齿厚偏差代号，以及齿距极限偏差 f_{Pt} 和齿圈径向跳动公差 F_r 的值后计算确定。

（2）公法线平均长度偏差

$$\left.\begin{aligned} E_{Ws} &= E_{Ss}\cos\alpha - 0.72F_r\sin\alpha \\ E_{Wi} &= E_{Ss}\cos\alpha + 0.72F_r\sin\alpha \end{aligned}\right\} \tag{13-9}$$

2. 计算实例的 M 文件和运算结果

例 13-2　已知斜齿圆柱齿轮的模数 $m_n = 4\,\text{mm}$，齿数 $z = 60$，螺旋角 $\beta = 12.92°$，试确定齿轮的公法线长度及其偏差。

```
%计算斜齿轮公法线长度及其偏差
%输入齿轮基本参数
Mn = 4;z = 60;an = 20;bat = 12.92;
disp''
disp'            ==========  斜齿圆柱齿轮基本参数  ========= ='
fprintf('                    模数        Mn = %3.2f mm \n' ,Mn)
fprintf('                    齿数         z = %3.0f \n' ,z)
fprintf('                  压力角        an = %3.3f 度 \n' ,an)
fprintf('                  螺旋角       bat = %3.3f 度 \n' ,bat)
%角度转换为弧度
hd = pi/180;
anh = an * hd;
bath = bat * hd;
invan = tan(anh) - anh;
%计算跨齿数和公法线长度
ath = atan(tan(anh)/cos(bath));
invan = tan(anh) - anh;
invat = tan(ath) - ath;
zp = z * invat/invan;
k = round(zp/9 + 0.5);
Wkn = Mn * cos(anh) * (pi * (k - 0.5) + zp * invan);
disp''
disp'     ==========  计算斜齿圆柱齿轮公法线长度及其偏差  ========='
fprintf('              端面压力角       at = %3.3f 度 \n' ,ath/hd)
fprintf('                相当齿数       zp = %3.3f \n' ,zp)
fprintf('                  跨齿数        k = %2.0f \n' ,k)
fprintf('              公法线长度      Wkn = %3.3f mm \n' ,Wkn)
%输入齿距极限偏差和齿圈径向跳动公差
fpt = 0.028;Fr = 0.071;
%输入齿厚极限偏差代号
H = -8;L = -16;
%计算齿厚极限偏差
Es = H * fpt;Ei = L * fpt;
fprintf('              齿厚上偏差       Es = %3.3f mm \n' ,Es)
fprintf('              齿厚下偏差       Ei = %3.3f mm \n' ,Ei)
%计算公法线长度极限偏差
```

```
Ews = Es * cos(anh) - 0.72 * Fr * sin(anh);
Ewi = Ei * cos(anh) + 0.72 * Fr * sin(anh);
fprintf('              公法线长度上偏差    Ews = %3.3f mm \n' ,Ews)
fprintf('              公法线长度下偏差    Ewi = %3.3f mm \n' ,Ewi)
```

计算结果：

```
        ==========  斜齿圆柱齿轮基本参数    ==========
                          模数    Mn = 4.00 mm
                          齿数     z = 60
                        压力角    an = 20.000 度
                        螺旋角   bat = 12.920 度

   ==========  计算斜齿圆柱齿轮公法线长度及其偏差    ==========
                      端面压力角    at = 20.477 度
                        相当齿数    zp = 64.555
                          跨齿数     k = 8
                      公法线长度   Wkn = 92.180 mm
                      齿厚上偏差    Es = -0.224 mm
                      齿厚下偏差    Ei = -0.448 mm
                  公法线长度上偏差   Ews = -0.228 mm
                  公法线长度下偏差   Ewi = -0.403 mm
```

13.2　圆柱齿轮传动的设计计算

圆柱齿轮承载能力计算涉及齿轮的设计、制造工艺、材料和检验等各方面的因素。齿轮强度理论由经典的刚体啮合理论发展到弹塑性体的啮合理论，并不断引入齿形、速度、制造与安装精度、弹性和热变形、润滑、表面粗糙度和材质等因素的影响系数，是一个十分复杂的问题。

13.2.1　齿轮传动设计计算的简化方法

对于一般机械中的闭式齿轮传动，以齿面接触疲劳强度和轮齿弯曲疲劳强度作为其承载能力的计算依据。按照 GB10063“通用机械渐开线圆柱齿轮－承载能力简化计算方法”，对圆柱齿轮传动进行简化设计计算。

齿轮传动设计一般已知小齿轮传递功率、转速、载荷性质和传动比等条件，要求选择齿轮材料和热处理方式，通过强度计算和参数协调，确定齿轮传动的基本参数和主要几何尺寸。

（1）根据齿面接触疲劳强度估算齿轮传动尺寸（中心距 a 或分度圆直径 d_1）的计算公式

$$a \geqslant A_a(u \pm 1) \times \sqrt[3]{\frac{KT_1}{\Psi_a u[\sigma_H]^2}}(\mathrm{mm}) \tag{13-10}$$

$$d_1 \geqslant A_d \times \sqrt[3]{\frac{KT_1(u \pm 1)}{\Psi_d u[\sigma_H]^2}}(\mathrm{mm}) \tag{13-11}$$

式中，“+”用于外啮合；“-”用于内啮合。

（2）根据齿根弯曲疲劳强度估算齿轮模数 m 的计算公式

$$m_n \geqslant A_m \times \sqrt[3]{\frac{KT_1 Y_{ES}}{\Psi_d z_1^2 [\sigma_F]}} \text{(mm)} \tag{13-12}$$

（3）齿轮强度计算公式中的有关参数说明

- A_a、A_d 和 A_m 是与齿轮螺旋角有关的常系数值。
- K 是载荷系数，一般为1.2～2，当载荷平稳、齿宽较小、轴承对称布置、轴的刚度较大、齿轮精度6级以上，以及齿轮螺旋角较大时，取较小值；反之，取较大值。
- T_1 是小齿轮传递的转矩，$T_1 = 9550\dfrac{P_1}{n_1}$（N·mm），根据小齿轮的功率 P_1（kW）和转速 n_1 确定。
- $u = z_2/z_1$ 是齿数比。
- $\psi_a = b/a$ 和 $\psi_d = b/d_1$ 是齿宽系数，分别表示齿轮宽度 b 与齿轮副中心距 a 的比值；或齿轮宽度 b 与小齿轮分度圆直径 d_1 的比值；它们的关系是 $\psi_d = \dfrac{\psi_a (u \pm 1)}{2}$。
- Y_{FS}是复合齿形系数，用以考虑齿形与齿根的应力集中、以及压应力和切应力等对齿根弯曲应力的影响，它的拟合公式是 $Y_{FS} = \dfrac{z_v}{0.269118 z_v - 0.840687}$，其中，当量齿数 $z_v = z/\cos^3\beta$。
- $[\sigma_H]$ 和 $[\sigma_F]$ 分别是试验齿轮的许用接触应力和许用弯曲应力，单位为MPa。在失效概率不大于1%时，可取$[\sigma_H] = 0.9\sigma_{Hlim}$；$[\sigma_F] = 1.4\sigma_{Flim}$（单向传动）或$[\sigma_F] = \sigma_{Flim}$（双向传动）。其中，$\sigma_{Hlim}$和$\sigma_{Flim}$是试验齿轮的齿面接触疲劳和齿根弯曲疲劳的极限应力，单位为MPa。

式（13-10）～式（13-12）中各个参数的选取，见参考文献［1］。

13.2.2 M文件基本流程和主要处理方法

除了已知数据的输入和计算结果的输出外，M程序文件主要包括三个部分内容：选择齿轮的材料和确定许用应力；按照设计准则计算和校核齿轮传动主要参数和几何尺寸；协调主要参数和几何尺寸。

1. 选择齿轮的材料和确定许用应力

采用键盘输入命令“input”，以字符串的形式，输入齿轮的材料类别（碳钢或合金钢）、齿面硬度类别（硬齿面或软齿面）；以数值的形式，输入齿面的热处理硬度（淬火硬度HRC或调质/正火硬度HBW）。在输入过程中有相应的屏幕提示信息，提高了人机交互性和直观性。

将试验齿轮的接触疲劳极限线图和弯曲疲劳极限线图拟合成直线方程，并且运用条件分支“if-elseif-end”决策结构，在判断齿轮的材料和齿面硬度类别的基础上，选择出相应的拟合直线方程，以齿面的热处理硬度为自变量，直接计算出齿轮的疲劳极限和许用应力。

2. 按照设计准则计算主要参数和几何尺寸

根据齿轮传动设计准则，对于闭式软齿面齿轮传动，按齿面接触强度进行设计，并校核其轮齿弯曲强度。对于闭式硬齿面齿轮传动，按轮齿弯曲强度进行设计，并校核其齿面接触强度。

计算系数 A_a、A_d 和 A_m。它们是与齿轮螺旋角的某个范围，如 $\beta=0°$（直齿）、$\beta=8°\sim15°$、$\beta>15°\sim25°$和 $\beta>25°\sim35°$等区间有关的常数，而且在齿轮强度计算过程中需要多次用到。因此，将这些计算系数的检索编制成独立的函数 function 文件，通过函数文件名进行调用，以 M 文件中的螺旋角 β 数值为输入参数，以系数 A_a、A_d 和 A_m 作为输出参数。

复合齿形系数 Y_{FS}需要根据齿数 z 或当量齿数 z_v 来查表选取，为了简化和方便 Y_{FS}的检索，将一维列表函数 $Y_{FS}=f(z_v)$ 拟合为曲线方程。通过选择多种曲线类型进行拟合比较，将它拟合为双曲线方程 $Y_{FS}=z_v/(0.2691185z_v-0.8406897)$，经过拟合标准误差和相关指数的检验，表明获得了很好的拟合效果。

3. 协调主要传动参数

进行齿轮传动设计时，由齿轮强度计算公式求出的中心距 a（或分度圆直径 d_1）和模数 m，只是满足齿轮承载能力要求的基本数据。考虑到齿轮参数标准化与系列化、生产工艺以及设计参数几何相关的要求，应对它们进行必要的协调，才能确定最后的设计结果。进行齿轮设计参数协调的原则是：在满足齿轮承载能力的前提下，设计参数应符合有关标准规范，而且还应满足运动条件和几何条件。

为了将根据齿根弯曲强度计算得到的齿轮模数 m 值圆整为相近的较大标准值，首先将标准模数系列值存放在数组中，然后使用控制流“for－end”循环结构和条件分支“if－elseif－end”结构配合，来实现标准模数的检索。

在设计计算中，常需要对某些数据圆整为符合一定规范的数值（如齿轮传动中心距一般取 5 的倍数，齿宽一般取偶数等），可以使用数据圆整函数 round 进行处理。例如，将计算齿宽数据 b 向增大的方向圆整为偶数，使用语句“round(b/2+0.5)*2”；将计算中心距数据 a 向增大的方向圆整为 5 的倍数，使用语句“round(a/5)*5+5”。

齿轮螺旋角一般应该在 $\beta=8°\sim25°$范围内。在参数协调过程中，可能出现螺旋角的余弦值 $\cos\beta=m_n(z_1+z_2)/(2a)>1$ 而无法计算 β 的情况，可以采用下面的语句确定中心距 a 的最小增量：da = round((Mn*(z1+z2)-2*a)/5)*5+5，然后用增大的中心距就可以重新计算螺旋角。

当需要对螺旋角 β 从弧度单位制换算成度、分、秒，可以使用如下的程序段

```
d = round(bata*180/pi-0.5)                    %将弧度化成度,取整数度
m = round((bata*180/pi-d)*60)                 %将小数点后面的度化成分,取整数分
s = round(((bata*180/pi-d)*60-m)*60)          %将小数点后面的分化成秒,取整数秒
```

依据 GB/T10063 为通用机械渐开线圆柱齿轮承载能力提供的简化计算方法，利用功能强大的科学计算平台 MATLAB，编制齿轮传动设计的 M 文件和函数文件，进行齿轮传动设计计算中的数据处理、曲线拟合、自动检索、参数协调和决策判断等工作，可以获得可靠、精确的计算结果，提高齿轮传动设计的效率和质量。

13.2.3　设计计算实例的 M 文件和运算结果

例 13-3　设计一机床中的单级斜齿圆柱齿轮传动。已知小齿轮传递功率 $P_1=22\,\text{kW}$，转

速 $n_1=970$ r/min，传动比 $i=3.5$，原动机为 Y 系列电动机，工作机有较小冲击，单向转动，齿轮相对于轴承非对称布置并靠近轴承，要求结构紧凑。

1）由于传递功率较大，转速较高，载荷有较小冲击，又要求结构紧凑，故应采用硬齿面齿轮传动。大小齿轮材料都采用 20CrMnTi，渗碳淬火，齿面硬度 60HRC。

2）讨论：本题若采用软齿面齿轮传动，大小齿轮材料都采用 40Cr，调质，小齿轮齿面硬度 280HBW，大齿轮齿面硬度 250HBW。

编制 M 文件如下：

```
% ********斜齿圆柱齿轮传动设计计算 ********
% M 文件中有关数据表见参考文献[1]
%已知条件:传递功率(kW);主动轮转速(r/min);传动比
P1 = 22;n1 = 970;i = 3.5;
ha = 1.0;ca = 0.25;hd = pi/180;                          %正常齿;角度转换弧度系数
m = [2 2.5 3 4 5 6 8 10 12 16 20 25 32 40 50];          %第一系列标准模数
K = input(   根据载荷情况,选择载荷系数 K =' );

% 1 - 确定齿轮的许用应力 sigma_FP 和 sigma_HP
disp' (注意:以下输入的齿轮材料和齿面硬度类别的标识字符要用大写,并用单引号括起)
CL = input(   选择齿轮材料:碳钢 - TG;合金钢 - HG ==' );
CM = input(   选择齿面硬度类别:硬齿面 - YC;软齿面 - RC ==' );
psi_d = input(   表 9-11:选择齿宽系数 psi_d =' );
if CL ==' TG'
    disp'   齿轮材料 - 碳钢
    if CM ==' YC'
        disp'   齿面硬度类别 - 硬齿面
        HRC1 = input(   输入小齿轮感应淬火硬度 HRC1 =' );
        HRC2 = input(   大齿轮感应淬火硬度 HRC2 =' );
        sigma_H1 = 11 * HRC1 + 610;sigma_H2 = 11 * HRC2 + 610;
        sigma_F1 = 380;sigma_F2 = 380;
    elseif CM = =' RC'
        disp'   齿面硬度类别 - 软齿面
        HBW1 = input(   输入小齿轮调质/正火硬度 HBW1 =' );
        HBW2 = input(   大齿轮调质/正火硬度 HBW2 =' );
        sigma_H1 = (9 * HBW1 + 3750)/10;sigma_H2 = (9 * HBW2 + 3750)/10;
        sigma_F1 = (2 * HBW1 + 675)/5;sigma_F2 = (2 * HBW2 + 675)/5;
    end
elseif CL ==' HG'
    disp'   齿轮材料 - 合金钢
    if CM ==' YC'
        disp'   齿面硬度类别 - 硬齿面
        sigma_H1 = 1500;sigma_H2 = 1500;
        sigma_F1 = 460;sigma_F2 = 460;
    elseif CM ==' RC'
        disp'   齿面硬度类别 - 软齿面
        HBW1 = input( 输入小齿轮调质/正火硬度 HBW1 =' );
```

```
        HBW2 = input('大齿轮调质/正火硬度 HBW2 = ');
        sigma_H1 = (10 * HBW1 + 1700)/6; sigma_H2 = (10 * HBW2 + 1700)/6;
        sigma_F1 = (19 * HBW1 + 9700)/50; sigma_F2 = (19 * HBW2 + 9700)/50;
    end
end
disp'（注意:以下输入的齿轮传动方向类别的标识字符要用大写,并用单引号括起）
FX = input('选择齿轮传动方向:单向传动 - DX;双向传动 - SX = ');
if FX == 'DX'
    disp'    齿轮单向传动
    sigma_FP1 = 1.4 * sigma_F1; sigma_FP2 = 1.4 * sigma_F2;
elseif FX == 'SX'
    disp'    齿轮双向传动
    sigma_FP1 = sigma_F1; sigma_FP2 = sigma_F2;
end
fprintf('        小齿轮齿根弯曲许用应力    sigma_FP1 = %3.2f MPa \n',sigma_FP1)
fprintf('        大齿轮齿根弯曲许用应力    sigma_FP2 = %3.2f MPa \n',sigma_FP2)
sigma_HP1 = 0.9 * sigma_H1; sigma_HP2 = 0.9 * sigma_H2;
fprintf('        小齿轮齿面接触许用应力    sigma_HP1 = %3.2f MPa \n',sigma_HP1)
fprintf('        大齿轮齿面接触许用应力    sigma_HP2 = %3.2f MPa \n',sigma_HP2)
if sigma_HP1 > sigma_HP2
    sigma_HP = sigma_HP2;
else
    sigma_HP = sigma_HP1;
end

% 2 - 分别按照硬齿面齿轮传动和软齿面齿轮传动进行设计计算
disp'    初选斜齿轮螺旋角的范围一般是 8°～10°'
beta = input('初选齿轮螺旋角(°) beta = ');
[Aa,Ad,Am] = ADM(beta);        % 根据螺旋角查询齿轮强度计算系数
T1 = 9550 * P1/n1
if CM == 'YC'
    disp'        硬齿面齿轮传动 - 按照齿根弯曲强度确定齿轮模数
    disp'        闭式硬齿面齿轮传动小齿轮齿数范围是:17～20'
    z1 = input('输入小齿轮齿数 z1 = ');
    z2 = round(i * z1)
    u = z2/z1;
    zv1 = z1/(cos(beta * hd))^3
    zv1 = input('        确定小齿轮当量齿数 zv1 = ');
    zv2 = u * zv1
    zv2 = input('确定大齿轮当量齿数 zv2 = ');
    Yfs1 = zv1/(0.269118 * zv1 - 0.840687)          % 根据拟合曲线方程计算
    Yfs1 = input('        确定小齿轮齿形系数 Yfs1 = ');
    if zv2 >= 60
        Yfs2 = 3.88
    else
        Yfs2 = zv2/(0.269118 * zv2 - 0.840687)
```

```
    Yfs2 = input('确定大齿轮齿形系数 Yfs2 =');
end
ifYfs1/sigma_FP1 > Yfs2/sigma_FP2
    Yfcp = Yfs1/sigma_FP1;
else
    Yfcp = Yfs2/sigma_FP2;
end
mj = Am * (K * T1 * Yfcp/(psi_d * z1^2))^(1/3);
for j = 1:15
    if mj < = m(j);mn = m(j);break;end
end
aj = mn * (z1 + z2)/(2 * cos(beta * hd))              % 中心距计算值
a = round(aj/2 + 0.5) * 2                             % 中心距圆整值
beta_a = mn * (z1 + z2)/(2 * a)                       % 螺旋角余弦值
if beta_a >= 1
    disp'    无法计算螺旋角,需要增大中心距
    disp'    中心距尾数一般是偶数、5 或是 0'
    a = input('选取中心距 a =');
    beta_a = mn * (z1 + z2)/(2 * a)                   % 增大中心距后的螺旋角余弦值
end
beta_j = acos(mn * (z1 + z2)/(2 * a));beta = beta_j/hd
d1 = mn * z1/cos(beta_j);
disp'          * 校核齿面接触强度 *'
[Aa,Ad,Am] = ADM(beta);      % 根据实际螺旋角查询齿轮强度计算系数
dx = Ad * (K * T1 * (u + 1)/(psi_d * u * sigma_HP^2))^(1/3)
if dx < = d1
    disp'          @ 满足齿面接触强度 @'
else
    disp'     * 不满足齿面接触强度,需要重新计算!'
    aj = dx * (1 + u)/(2 * cos(beta * hd))
    disp'          中心距尾数一般是偶数、5 或是 0'
    a = input('选取中心距 a =');
    mj = 2 * a * cos(beta * hd)/(z1 + z2);
    for j = 1:15
        if mj < = m(i);mn = m(i);break;end
    end
    beta_a = mn * (z1 + z2)/(2 * a)                   % 螺旋角余弦值
    if beta_a >= 1
        disp'    无法计算螺旋角,需要增大中心距
        beta_a = mn * (z1 + z2)/(2 * a)       % 增大中心距后的螺旋角余弦值
    end
    beta_j = acos(mn * (z1 + z2)/(2 * a));beta = beta_j/hd;
end
fprintf('mn = %3.2f mm \n',mn);
d1 = mn * z1/(cos(beta_j))
d2 = mn * z2/(cos(beta_j))
```

```
        da1 = d1 +2 * ha * mn
        da2 = d2 +2 * ha * mn
        b = psi_d * d1
        b2 = input('确定大齿轮宽度(mm)  b2 = ');
        b1 = input('确定小齿轮宽度(mm)  b1 = ');
    elseif CM == 'RC'
        disp'    软齿面齿轮传动 - 按照齿面接触强度确定齿轮直径'
        disp'    闭式软齿面齿轮传动小齿轮齿数范围是:20 ~30'
        z1 = input('输入小齿轮齿数  z1 = ');
        z2 = round(i * z1)
        u = z2/z1;
        dj = Ad * (K * T1 * (u +1)/(psi_d * u * sigma_HP^2))^(1/3);
        aj = dj * (1 + u)/(2 * cos(beta * hd))
        a = round(aj/2 +0.5) * 2;
        mj =2 * a * cos(beta * hd)/(z1 + z2);
        for j =1:15
            if mj < = m(j);mn = m(j);break;end
        end
        beta_a = mn * (z1 +z2)/(2 * a)              % 螺旋角余弦值
        if beta_a >=1
            disp'          无法计算螺旋角,需要增大中心距'
            disp'          中心距尾数一般是偶数、5 或是 0'
            a = input('选取中心距 a = ');
            beta_a = mn * (z1 +z2)/(2 * a)          % 增大中心距后的螺旋角余弦值
        end
        beta_j = acos(mn * (z1 +z2)/(2 * a));beta = beta_j/hd
        d1 = mn * z1/cos(beta_j)
        disp'          * 校核齿根弯曲强度 *'
        zv1 = z1/(cos(beta * hd))^3
        zv1 = input('    确定小齿轮当量齿数 zv1 = ');
        zv2 = u * zv1
        zv2 = input('确定大齿轮当量齿数 zv2 = ');
        Yfs1 = zv1/(0.269118 * zv1 -0.840687)
        Yfs1 = input('    确定小齿轮齿形系数 Yfs1 = ');
        if zv2 >=60
            Yfs2 =3.88
        else
            Yfs2 = zv2/(0.269118 * zv2 -0.840687)       % 根据拟合曲线方程计算
            Yfs2 = input('    确定大齿轮齿形系数 Yfs2 = ');
        end
        ifYfs1/sigma_FP1 > Yfs2/sigma_FP2
            Yfcp = Yfs1/sigma_FP1;
        else
            Yfcp = Yfs2/sigma_FP2;
        end
        [Aa,Ad,Am] = ADM(beta);     % 根据实际螺旋角查询齿轮强度计算系数
```

```
        mx = Am * (K * T1 * Yfcp/(psi_d * z1^2))^(1/3);
        if mx <= mn
            disp('          @ 满足齿根弯曲强度 @')
        else
            disp('     * 不满足齿根弯曲强度,需要重新计算!')
            aj = mn * (z1 + z2)/(2 * cos(beta * hd));
            a = round(aj/2 + 0.5) * 2;
            beta_j = acos(mn * (z1 + z2)/(2 * a));
            beta = beta_j/hd;
        end
        disp ('     法面模数(mm) mn = '),mn;
        fprintf ('  mn = %3.2f mm \n',mn);
        d1 = mn * z1/(cos(beta_j))
        d2 = mn * z2/(cos(beta_j))
        da1 = d1 + 2 * ha * mn
        da2 = d2 + 2 * ha * mn
        b = psi_d * d1
        b2 = input(' 确定大齿轮宽度(mm)   b2 = ');
        b1 = input(' 确定小齿轮宽度(mm)   b1 = ');
    end

    % 3 - 齿轮传动计算系数函数文件 ADM.m
    function [Aa,Ad,Am] = ADM(beta)
    if beta < 8
        Aa = 483;Ad = 766;Am = 12.6;
    elseif beta >= 8 & beta < 15
        Aa = 476;Ad = 756;Am = 12.4;
    elseif beta >= 15 & beta < 25
        Aa = 462;Ad = 733;Am = 12.0;
    elseif beta >= 25 & beta < 35
        Aa = 447;Ad = 709;Am = 11.5;
    end
```

硬齿面齿轮传动计算结果如下。

```
    *** 硬齿面齿轮传动设计计算过程 ***
        根据载荷情况,选择载荷系数 K = 1.4
    (注意:以下输入的齿轮材料和齿面硬度类别的标识字符要用大写,并用单引号括起)
        选择齿轮材料:碳钢 - TG;合金钢 - HG = 'HG'
        选择齿面硬度类别:硬齿面 - YC;软齿面 - RC = 'YC'
        表 9-11:选择齿宽系数 psi_d = 0.45
      齿轮材料 - 合金钢
      齿面硬度类别 - 硬齿面
    (注意:以下输入的齿轮传动方向类别的标识字符要用大写,并用单引号括起)
        选择齿轮传动方向:单向传动 - DX;双向传动 - SX = 'DX'
      齿轮单向传动
        小齿轮齿根弯曲许用应力   sigma_FP1 = 644.00 MPa
```

```
      大齿轮齿根弯曲许用应力   sigma_FP2 = 644.00 MPa
      小齿轮齿面接触许用应力   sigma_HP1 = 1350.00 MPa
      大齿轮齿面接触许用应力   sigma_HP2 = 1350.00 MPa
    初选斜齿轮螺旋角的范围一般是 8°～10°
      初选齿轮螺旋角(°) beta = 10
T1 =    216.5979
      硬齿面齿轮传动－按照齿根弯曲强度确定齿轮模数
      闭式硬齿面齿轮传动小齿轮齿数范围是:17～20
      输入小齿轮齿数 z1 = 17
z2 =        60
zv1 =     17.7990
      确定小齿轮当量齿数 zv1 = 17.8
zv2 =     62.8235
      确定大齿轮当量齿数 zv2 = 62.8
Yfs1 =        4.5068
      确定小齿轮齿形系数 Yfs1 = 4.51
Yfs2 =        3.8800
aj =    156.3757
a =      158
beta_a =        0.9747
beta =     12.9199
               * 校核齿面接触强度 *
dx =     58.9661
               @ 满足齿面接触强度 @
mn = 4.00 mm
d1 =     69.7662
d2 =    246.2338
da1 =     77.7662
da2 =    254.2338
b =     31.3948
      确定大齿轮宽度(mm)   b2 = 32
      确定小齿轮宽度(mm)   b1 = 38
```

软齿面齿轮传动计算结果如下。

```
 *** 软齿面齿轮传动设计计算过程 ***
      根据载荷情况,选择载荷系数 K = 1.4
(注意:以下输入的齿轮材料和齿面硬度类别的标识字符要用大写,并用单引号括起)
      选择齿轮材料:碳钢－TG;合金钢－HG =' HG'
      选择齿面硬度类别:硬齿面－YC;软齿面－RC =' RC'
      表 9-11:选择齿宽系数 psi_d = 0.90
    齿轮材料－合金钢
    齿面硬度类别－软齿面
      输入小齿轮调质/正火硬度 HBW1 = 280
          大齿轮调质/正火硬度 HBW2 = 250
(注意:以下输入的齿轮传动方向类别的标识字符要用大写,并用单引号括起)
      选择齿轮传动方向:单向传动－DX;双向传动－SX =' DX'
```

```
  齿轮单向传动
    小齿轮齿根弯曲许用应力    sigma_FP1 =420.56 MPa
    大齿轮齿根弯曲许用应力    sigma_FP2 =404.60 MPa
    小齿轮齿面接触许用应力    sigma_HP1 =675.00 MPa
    大齿轮齿面接触许用应力    sigma_HP2 =630.00 MPa
  初选斜齿轮螺旋角的范围一般是 8°~10°
    初选齿轮螺旋角(°) beta =10
T1 =    216.5979
    软齿面齿轮传动-按照齿面接触强度确定齿轮直径
    闭式软齿面齿轮传动小齿轮齿数范围是:20~30
    输入小齿轮齿数   z1 =21
z2 =       74
aj =    178.6878
beta_a =       1.0556
              无法计算螺旋角,需要增大中心距
              中心距尾数一般是偶数、5 或是 0
    选取中心距 a =192
beta_a =       0.9896
beta =      8.2771
d1 =     84.8842
             * 校核齿根弯曲强度 *
zv1 =     21.6702
    确定小齿轮当量齿数 zv1 =21.7
zv2 =     76.4667
    确定大齿轮当量齿数 zv2 =76.5
Yfs1 =       4.3407
    确定小齿轮齿形系数 Yfs1 =4.34
Yfs2 =       3.8800
             @满足齿根弯曲强度 @
mn =4.00 mm
d1 =     84.8842
d2 =    299.1158
da1 =     92.8842
da2 =    307.1158
b =     76.3958
    确定大齿轮宽度(mm)   b2 =78
    确定小齿轮宽度(mm)   b1 =86
```

硬齿面齿轮传动和软齿面齿轮传动的设计计算结果比较见表 13-1。

表 13-1　硬齿面齿轮传动和软齿面齿轮传动的设计计算结果比较

项　　目	硬齿面齿轮传动	软齿面齿轮传动
齿轮材料和热处理	20CrMnTi，渗碳淬火，齿面硬度 60HRC	采用 40Cr 调质，小齿轮齿面硬度 280HBW，大齿轮齿面硬度 250HBW
法面模数	$m_n=4$ mm	$m_n=4$ mm

（续）

项　　目	硬齿面齿轮传动	软齿面齿轮传动
分度圆直径	$d_1=69.7662$ mm $d_2=246.2338$ mm	$d_1=84.8842$ mm $d_2=299.1158$ mm
齿轮宽度	$b_1=38$ mm $b_2=32$ mm	$b_1=86$ mm $b_2=78$ mm
分度圆螺旋角	$\beta=12.9199°$	$\beta=8.2771°$
中心距	$a=158$ mm	$a=192$ mm

经比较，硬齿面齿轮传动的结构尺寸较小，其两轮质量大约仅是软齿面齿轮传动的28%。硬齿面齿轮的承载能力要比软齿面齿轮高得多，因此在相同的工作条件下，硬齿面齿轮传动具有结构紧凑、使用寿命长和技术经济指标高的显著特点。我国齿轮行业已逐步采用精度较高的中硬齿面和硬齿面技术来取代软齿面齿轮传动。

13.3　齿轮传动的几何规划

齿轮传动优化设计问题一般是已知传递功率、主动轴转速和传动比等条件，在满足强度要求的条件下，获得最佳的基本参数。齿轮传动优化设计问题的目标函数和约束函数一般由广义多项式构成，对于这一类特殊的非线性规划问题，利用对偶原理可以将高度非线性规划问题转变成具有线性约束的最优化问题求解，简洁方便，避免了采用数值迭代计算的麻烦。并且可以利用几何规划的对偶关系，深入了解问题的某些特征。

13.3.1　构造几何规划的数学模型

（1）设计变量

$$\boldsymbol{X}=[x_1,x_2,x_3]^{\mathrm{T}}=[m_n,z_1,\psi_{\mathrm{d}}]^{\mathrm{T}} \tag{13-13}$$

其中，m_{n} 是齿轮的模数；z_1 是小齿轮齿数；$\psi_{\mathrm{d}}=b/d_1$ 是齿宽系数。

（2）目标函数　齿轮副的传动尺寸参数

$$g_0(\boldsymbol{X})=C_{01}x_1x_2x_3+C_{02}x_1x_2 \tag{13-14}$$

其中，C_{01}和 C_{02}分别是齿轮轴向尺寸和径向尺寸两个分目标的权。

（3）约束函数　外啮合圆柱齿轮齿面接触疲劳强度条件和齿根弯曲疲劳强度条件分别为

$$\left.\begin{aligned} d_1 &\geqslant A_{\mathrm{d}}\times\sqrt[3]{\frac{KT_1(u+1)}{\psi_{\mathrm{d}}u[\sigma_{\mathrm{H}}]^2}}(\mathrm{mm}) \\ m_{\mathrm{n}} &\geqslant A_{\mathrm{m}}\times\sqrt[3]{\frac{KT_1Y_{\mathrm{FS}}}{\psi_{\mathrm{d}}z_1^2[\sigma_{\mathrm{F}}]}}(\mathrm{mm}) \end{aligned}\right\} \tag{13-15}$$

其中，$d_1=m_nz_1/\cos\beta$ 是小齿轮分度圆直径，单位为 mm，m_{n} 是齿轮法面模数，单位为 mm。其他参数的意义见 13.2 节圆柱齿轮传动的设计计算。

令

$$\left.\begin{aligned} c_{11} &= A_{\mathrm{d}}\times\sqrt[3]{\frac{KT_1(u+1)}{u[\sigma_{\mathrm{H}}]^2}}\times\cos\beta \\ c_{21} &= A_{\mathrm{m}}\times\sqrt[3]{\frac{KT_1Y_{\mathrm{FS}}}{[\sigma_{\mathrm{F}}]}} \end{aligned}\right\} \tag{13-16}$$

因此强度约束条件是

$$\left.\begin{aligned} g_1(\boldsymbol{X}) &= C_{11}x_1^{-1}x_3^{-\frac{1}{3}} \leqslant 1 \\ g_2(\boldsymbol{X}) &= C_{21}x_1^{-1}x_2^{-\frac{2}{3}}x_3^{-\frac{1}{3}} \leqslant 1 \end{aligned}\right\} \tag{13-17}$$

问题的维数 $N=3$，项数 $T=4$，且各项都是正项式，困难度 $D=T-N-1=4-3-1=0$，所以这是一个困难度为零的正项几何规划问题。其数学模型是

$$\left.\begin{aligned} &\min g_0(\boldsymbol{X}) \\ &\text{s. t. } g_u(\boldsymbol{X}) \leqslant 1 \qquad (u=1,2) \\ &\boldsymbol{X} > 0 \end{aligned}\right\} \tag{13-18}$$

其中，$g_0(\boldsymbol{X})$是目标函数，$g_u(\boldsymbol{X}) \leqslant 1$ 是强迫约束条件，$X>0$ 是自然约束条件。

13.3.2 几何规划算法分析

几何规划问题式（13–18）的对偶规划是

$$\left.\begin{aligned} &\max d(\boldsymbol{\omega}) \\ &\text{s. t. } \omega_{00} = 1 \\ &\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega\kappa} = 0 \\ &\boldsymbol{\omega} \geqslant 0 \end{aligned}\right\} \tag{13-19}$$

其中，ω_{00}是目标函数中各项最优权之和，$\boldsymbol{A}$ 是设计变量的指数矩阵，ω 是对偶变量。

设原规划的对偶变量为 $\boldsymbol{\omega}=[\omega_{01},\omega_{02},\omega_{11},\omega_{21}]^{\mathrm{T}}$，根据规范性条件和正交性条件建立线性方程组

$$\left.\begin{aligned} \omega_{01}+\omega_{02} &= 1 \\ \omega_{01}+\omega_{02}-\omega_{11}-\omega_{21} &= 0 \\ \omega_{01}+\omega_{02}-\omega_{11}-\frac{2}{3}\omega_{21} &= 0 \\ \omega_{01}-\frac{1}{3}\omega_{11}-\frac{1}{3}\omega_{21} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{13-20}$$

其中，第 1 个式子是规范性条件，第 2、3、4 个式子是正交性条件。式（13–20）的唯一解是

$$\omega_{01}^* = \frac{1}{3}, \omega_{02}^* = \frac{2}{3}, \omega_{11}^* = 1, \omega_{21}^* = 0$$

显然满足非负性条件 $\omega^* \geqslant 0$，ω^* 就是对偶规划可行最优解。由于 $\omega_{21}^*=0$，说明齿根弯曲疲劳强度约束条件对对偶规划的目标函数极大值没有影响。

对偶规划的目标函数极大值 $d(\beta^*)$

$$\max d(\beta) = \left(\frac{C_{01}}{\omega_{01}}\right)^{\omega_{01}} \left(\frac{C_{02}}{\omega_{02}}\right)^{\omega_{02}} \left(\frac{C_{11}\omega_{01}}{\omega_{11}}\right)^{\omega_{11}} \left(\frac{C_{21}\omega_{20}}{\omega_{21}}\right)^{\omega_{1}}$$

其中，ω_{10}和 ω_{20}分别是第 1 个和第 2 个约束条件的各项权之和，在本问题中由于该两个约束条件各只有 1 项，所以有 $\omega_{10}=\omega_{11}$和 $\omega_{20}=\omega_{21}$。

根据几何规划的对偶定理，对偶规划的目标函数极大值与原问题的极小值 $g_0(\boldsymbol{X}^*)$相等，代入数据整理后得到

$$\max d(\beta)=(3C_{01})^{\frac{1}{3}}(1.5C_{02})^{\frac{2}{3}}(C_{11})^{1}=1.88988C_{01}^{\frac{1}{3}}C_{02}^{\frac{2}{3}}C_{11}=g_0(\boldsymbol{X}^*) \qquad (13\text{-}21)$$

根据目标函数式（13-14），原始设计变量 $\boldsymbol{X}^*$ 与对偶变量 ω^* 应该满足如下关系

$$\left.\begin{aligned} x_1x_2x_3&=\frac{\omega_{01}^*}{C_{01}}g_0(\boldsymbol{X}^*)\\ x_1x_2&=\frac{\omega_{02}}{C_{02}}g_0(\boldsymbol{X}^*)\end{aligned}\right\} \qquad (13\text{-}22)$$

13.3.3　几何规划实例

例 13-4　设计某机床中的单级斜齿圆柱齿轮传动。已知小齿轮传递功率 $P_1=22\,\text{kW}$，转速 $n_1=970\,\text{r/min}$，传动比 $i=3.5$，原动机为 Y 系列电动机，工作机有中等冲击，单向转动，齿轮相对于轴承对称布置并靠近轴承，要求结构紧凑。

（1）选择齿轮材料及确定许用应力　由于传递功率较大，转速较高，载荷有中等冲击，又要求结构紧凑，故应采用硬齿面齿轮传动。大小齿轮都采用 20CrMnTi，渗碳淬火，齿面硬度 60HRC。由设计资料查出试验齿轮的疲劳极限，确定许用应力

$$\sigma_{\text{Hlim1}}=\sigma_{\text{Hlim2}}=1500\,\text{MPa} \qquad \sigma_{\text{HP}}=0.9\sigma_{\text{Hlim1}}=0.9\times1500=1350\,\text{MPa}$$

$$\sigma_{\text{Flim1}}=\sigma_{\text{Flim2}}=460\,\text{MPa} \qquad \sigma_{\text{FP}}=1.4\sigma_{\text{Flim1}}=1.4\times460=644\,\text{MPa}$$

（2）确定强度约束函数的各项系数　根据中等冲击载荷、轴承对称布置和轴的刚度较大，取载荷系数 $K=1.4$。小齿轮传递转矩

$$T_1=9550\frac{P_1}{n_1}=9550\frac{22}{970}=216.6\,\text{N}\cdot\text{m}$$

两个齿轮的齿根弯曲疲劳许用应力相同，因此在齿根弯曲疲劳强度条件中应该取小齿轮的复合齿形系数 Y_{SF}。由于采用硬齿面齿轮传动，小齿轮齿数一般可取 $z_1=18\sim20$，齿轮螺旋角一般是 $\beta=8°\sim15°$，根据设计资料，近似按照齿轮的当量齿数 $z_1\approx20$ 时取 $Y_{\text{SF}}=4.38$。

根据设计资料，按照 $\beta=8°\sim15°$时，取 $A_{\text{d}}=756$ 和 $A_{\text{m}}=12.4$。因此各项系数为

$$C_{01}=1, C_{02}=2\ \text{（要求径向尺寸紧凑）}$$

$$c_{11}=A_{\text{d}}\times\sqrt[3]{\frac{KT_1(u+1)}{u\sigma_{\text{HP}}^2}}\times\cos\beta=756\times\sqrt[3]{\frac{1.4\times216.6\times(3.5+1)}{3.5\times1350^2}}\times\cos12°=44.2262$$

$$c_{21}=A_{\text{m}}\times\sqrt[3]{\frac{KT_1Y_{\text{FS}}}{\sigma_{\text{FP}}}}=12.4\times\sqrt[3]{\frac{1.4\times216.6\times4.38}{644}}=15.7838$$

（3）优化结果　将各项系数值代入式（13-21），得到目标函数最优解

$$\begin{aligned} g_0(\boldsymbol{X}^*)&=(3C_{01})^{\frac{1}{3}}(1.5C_{02})^{\frac{2}{3}}C_{11}\\ &=1.88988C_{01}^{\frac{1}{3}}C_{02}^{\frac{2}{3}}C_{11}\\ &=1.88988\times1^{\frac{1}{3}}\times2^{\frac{2}{3}}\times44.2262=132.678\end{aligned}$$

将式（13-22）的上、下两式相除，得到齿宽系数最优解

$$x_3=\frac{\omega_{01}}{C_{01}}\times\frac{C_{02}}{\omega_{02}}=\frac{\frac{1}{3}\times2}{1\times\frac{2}{3}}=1$$

由齿面接触疲劳强度约束条件式（13-17）中第 1 式，有

$$x_1 \geqslant C_{11}x_2^{-1}x_3^{-1/3} = \frac{44.2262}{x_2 \times 1^{1/3}}$$

取小齿轮齿数 $x_2 = Z_1 = 20$，则 $x_1 \geqslant 2.21$，取第一系列标准模数 $x_1 = m_n = 2.5$ mm。

（4）协调设计参数　初取螺旋角 $\beta = 12°$，则中心距

$$a = \frac{m_n z_1(1+i)}{2\cos\beta} = \frac{2.5 \times 20(1+3.5)}{2\cos 12°} = 115.013 \text{ mm}$$

取圆整值 $a = 115$ mm，则螺旋角

$$\beta = \text{acos}\frac{m_n z_1(1+i)}{2a} = \text{acos}\frac{2.5 \times 20 \times (1+3.5)}{2 \times 115} = 11.9687°$$

与初取值相符。

小齿轮分度圆直径

$$d_1 = \frac{m_n z_1}{\cos\beta} = \frac{2.5 \times 20}{\cos 11.969°} = 51.1111 \text{ mm}$$

齿轮宽度

$$b = \psi_d d_1 = 1 \times 51.1111 = 51.1111 \text{ mm}$$

取齿轮宽度 $b = 52$ mm。

（5）计算离散最优解的约束函数值　将数据代入式（13-17），得到

$$g_1(\boldsymbol{X}^*) = C_{11}x_1^{-1}x_2^{-1}x_3^{-\frac{1}{3}} = C_{11}m_n^{-1}z_1^{-1}\psi_d^{-\frac{1}{3}} = 44.2262 \times 2.5^{-1} \times 20 \times 1^{-\frac{1}{3}} = 0.884523$$

$$g_2(\boldsymbol{X}^*) = C_{21}x_1^{-1}x_2^{-\frac{2}{3}}x_3^{-\frac{1}{3}} = C_{21}m_n^{-1}z_1^{-\frac{2}{3}}\psi_d^{-\frac{1}{3}} = 15.7838 \times 2.5^{-1} \times 20^{-\frac{2}{3}} \times 1^{-\frac{1}{3}} = 0.856877$$

由于它们都小于 1，所以离散最优解在可行域内。又因为 $g_2(\boldsymbol{X}^*) < g_1(\boldsymbol{X}^*)$，说明该问题离散最优解的齿根弯曲疲劳强度相对有较大的裕度，对硬齿面齿轮传动有利。

讨论：如果要求径向尺寸和轴向尺寸同样紧凑，取 $C_{01=1}$ 和 $C_{02} = 1$。则齿宽系数

$$x_3 = \frac{\omega_{01}}{C_{01}} \times \frac{C_{02}}{\omega_{02}} = \frac{\frac{1}{3} \times 1}{1 \times \frac{2}{3}} = 0.5$$

由齿面接触疲劳强度约束条件式（13-17）中第 1 式有

$$x_1 \geqslant C_{11}x_2^{-1}x_3^{-1/3} = \frac{44.2262}{x_2 \times 0.5^{1/3}} = \frac{55.7215}{x_2}$$

取小齿轮齿数 $x_2 = z_1 = 20$，则 $x_1 \geqslant 2.79$，取标准模数 $x_1 = m_n = 3$ mm。

协调设计参数后得到中心距 $a = 138$ mm，螺旋角 $\beta = 11.969°$，齿轮宽度 $b = 31$ mm。可见，相对于第一种情况，齿轮副的径向尺寸增大，轴向尺寸减少。

几何规划可以用于处理目标函数和约束函数是由广义多项式构成的优化设计问题。首先根据实际问题构造几何规划模型，然后利用对偶关系通过计算线性方程组求解出对偶可行解（满足规范性、正交性和非负性条件），最后根据原始变量与对偶变量的关系求出问题最优解，求解过程简洁方便。

13.3.4　M 文件和运算结果

```
%齿轮传动的几何规划
%维数 N=3;x(1)-法面模数 mn,x(2)-小齿轮齿数 z1,x(3)-齿宽系数 psi_d
```

```
% 项数 T = 5(目标函数 2 项,约束函数 3 项)
% 1 - 目标函数(2 项)
disp'        ##   目标函数第 1 项   ##
c01 = 1;
x1_f1 = 1;x2_f1 = 1;x3_f1 = 1;
fprintf(            系数      c01 = %3.4f \n' ,c01)
fprintf(    x(1)的指数    x1_f1 = %3.4f \n' ,x1_f1)
fprintf(    x(2)的指数    x2_f1 = %3.4f \n' ,x2_f1)
fprintf(    x(3)的指数    x3_f1 = %3.4f \n' ,x3_f1)
disp'        ##   目标函数第 2 项   ##
c02 = 2;
x1_f2 = 1;x2_f2 = 1;
fprintf(            系数      c02 = %3.4f \n' ,c02)
fprintf(    x(1)的指数    x1_f2 = %3.4f \n' ,x1_f2)
fprintf(    x(2)的指数    x2_f2 = %3.4f \n' ,x2_f2)

% 2 - 约束函数(2 项)
P1 = 22;n1 = 970;u = 3.5;K = 1.4;Ad = 756;Am = 12.4;Yfs = 4.38;
beta0 = 12;hd = pi/180;                  % 螺旋角;角度转换弧度系数
sigma_HP = 1350;sigma_FP = 644;
T1 = 9550 * P1/n1;                       % 小齿轮传递转矩
fprintf( 小齿轮传递转矩   T1 = %3.4f Nm \n' ,T1)
disp'        @@   约束函数第 1 项   @@
c11 = Ad * (K * T1 * (u + 1)/(u * sigma_HP^2))^(1/3) * cos(beta0 * hd);
x1_g1 = -1;x2_g1 = -1;x3_g1 = -1/3;
fprintf(              系数      c11 = %3.4f \n' ,c11)
fprintf(      x(1)的指数    x1_g1 = %3.4f \n' ,x1_g1)
fprintf(      x(2)的指数    x2_g1 = %3.4f \n' ,x2_g1)
fprintf(      x(3)的指数    x3_g1 = %3.4f \n' ,x3_g1)
disp'        @@   约束函数第 2 项   @@
c21 = Am * (K * T1 * Yfs/sigma_FP)^(1/3);
x1_g2 = -1;x2_g2 = -2/3;x3_g2 = -1/3;
fprintf(              系数      c21 = %3.4f \n' ,c21)
fprintf(      x(1)的指数    x1_g2 = %3.4f \n' ,x1_g2)
fprintf(      x(2)的指数    x2_g2 = %3.4f \n' ,x2_g2)
fprintf(      x(3)的指数    x3_g2 = %3.4f \n' ,x3_g2)

% 3 - 根据对偶规划的规范性条件和正交性条件构造的线性方程组
disp'  对偶规划的系数矩阵':
A = sym( [1,1,0,0;1,1,-1,-1;1,1,-1,-2/3;1,0,-1/3,-1/3]' )
disp'  线性方程组等号右边的常数列阵':
B = [1 0 0 0]'
disp'  对偶变量的解析解':
```

```
omeg = (A\B)
disp'    对偶变量的数值解'
omega = double(omeg)                                    % 将符号数组转换为字符数组
omega_01 = omega(1);omega_02 = omega(2);omega_11 = omega(3);omega_21 = omega(4);
disp'    (对偶变量的解 omega 满足非负条件)'

% 4 - 几何规划极小值(对偶规划的目标函数极大值)和优化解
dx1 = (c01/omega_01)^omega_01;
dx2 = (c02/omega_02)^omega_02;
dx3 = c11^omega_11;
dx4 = c21^omega_21;
g0 = dx1 * dx2 * dx3 * dx4;
fprintf('    几何规划极小值    go = %3.6f \n',g0)
psi_d = omega_01 * c02/(omega_02 * c01);
fprintf('        齿宽系数     psi_d = %3.2f \n',psi_d)
z1 = input('选取小齿轮齿数(17 - 21) z1 = ');
m = [2 2.5 3 4 5 6 8 10 12 16 20 25 32 40 50];
mn_j = c11/z1/psi_d^-(1/3);
for i = 1:15
    if mn_j <= m(i);mn = m(i);break;end           % 选用标准模数
end
fprintf('        法面模数          mn = %3.2f mm \n',mn)

% 5 - 协调设计参数
fprintf('        初选螺旋角        beta0 = %3.4f ° \n',beta0)
disp'    中心距计算值',aj = mn * z1 * (1 + u)/(2 * cos(beta0 * hd))
a = input('中心距圆整值(mm)    a = ');
beta = acos(mn * z1 * (1 + u)/(2 * a));
fprintf('              螺旋角      beta = %3.4f °\n',beta/hd)
d1 = mn * z1/cos(beta);
fprintf('    小齿轮分度圆直径    d1 = %3.4f mm \n',d1);
disp'        齿宽计算值',bj = d1 * psi_d
b = input('确定齿宽(mm)    b = ');

% 6 - 计算离散最优解的约束函数值
g1 = c11/mn/z1/psi_d^(1/3);
disp'    离散最优解的'
fprintf('        齿面接触疲劳强度约束函数值    g1 = %3.6f \n',g1)
g2 = c21/mn/z1^(2/3)/psi_d^(1/3);
fprintf('        齿根弯曲疲劳强度约束函数值    g2 = %3.6f \n',g2)
```

计算结果：

```
        ##目标函数第 1 项    ##
          系数      c01 =1.0000
  x(1)的指数    x1_f1 =1.0000
  x(2)的指数    x2_f1 =1.0000
  x(3)的指数    x3_f1 =1.0000
        ##目标函数第 2 项    ##
          系数      c02 =2.0000
  x(1)的指数    x1_f2 =1.0000
  x(2)的指数    x2_f2 =1.0000
小齿轮传递转矩    T1 =216.5979 Nm
        @@约束函数第 1 项    @@
          系数      c11 =44.2262
  x(1)的指数    x1_g1 = -1.0000
  x(2)的指数    x2_g1 = -1.0000
  x(3)的指数    x3_g1 = -0.3333
        @@约束函数第 2 项    @@
          系数      c21 =15.7838
  x(1)的指数    x1_g2 = -1.0000
  x(2)的指数    x2_g2 = -0.6667
  x(3)的指数    x3_g2 = -0.3333

  对偶规划的系数矩阵:
A =
[      1,   1,        0,        0]
[      1,   1,       -1,       -1]
[      1,   1,       -1,     -2/3]
[      1,   0,     -1/3,     -1/3]
  线性方程组等号右边的常数列阵:
B =
     1
     0
     0
     0
  对偶变量的解析解:
omeg =   [ 1/3, 2/3,    1,    0]
  对偶变量的数值解:
omega =0.3333      0.6667      1.0000          0
  (对偶变量的解 omega 满足非负条件)

  几何规划极小值   go =132.678496
    齿宽系数     psi_d =1.00
  选取小齿轮齿数(17 -21) z1 =20
    法面模数          mn =2.50 mm

    初选螺旋角        beta0 =12.0000°
```

中心距计算值:aj =　115.0133
中心距圆整值(mm)　a = 115
螺旋角　beta = 11.9687 °
小齿轮分度圆直径　d1 = 51.1111 mm
齿宽计算值:bj =　51.1111
确定齿宽(mm)　b = 52

离散最优解的:
齿面接触疲劳强度约束函数值　g1 = 0.884523
齿根弯曲疲劳强度约束函数值　g2 = 0.856877

13.4　两级圆柱齿轮减速器优化设计

齿轮减速器是原动机和工作机之间独立的闭式机械传动装置，能够降低转速和增大转矩，是一种广泛应用在工矿企业及运输、建筑等部门中的机械传动装置。圆柱齿轮减速器的传统设计方法是：设计人员根据各种资料、文献提供的数据，结合自己的设计经验，和已有减速器进行类比，初步制订出一个设计方案，然后对这个方案进行验算。常规方法设计效率低下，而且齿轮减速器不是最优的设计方案，往往存在着体积大、质量大、承载能力低、成本高和使用寿命短等问题。为了降低减速器的成本，提高设计效率，对圆柱齿轮减速器进行优化设计，选择其最佳参数，是提高承载能力，减轻质量和降低成本的一种重要途径。

13.4.1　两级圆柱齿轮传动的设计理论

减速器的优化设计一般是在给定传递功率 P、传动比 i、输入转速 n_1 以及其他技术条件和要求下，找出一组使减速器的某项经济技术指标达到最优的设计参数。下面以两级斜齿圆柱齿轮优化设计为例，讨论建立减速器优化设计数学模型时，选择设计变量、目标函数和约束条件的一般原则。

1）两级斜齿圆柱齿轮减速器的结构如图 13-3 所示。要求在保证承载能力的条件下按照总中心距 a_Σ 最小进行优化设计。减速器的总中心距计算公式为

$$a_\Sigma = a_1 + a_2 = \frac{m_{n1} z_1 (1 + i_1) + m_{n2} z_3 (1 + i_2)}{2\cos\beta} \tag{13-23}$$

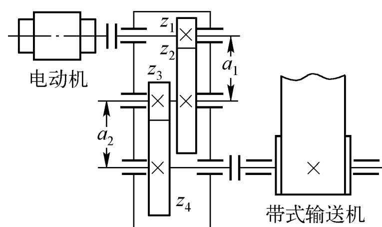


图 13-3　两级斜齿圆柱齿轮减速器

式中，m_{n1}，m_{n2}分别为高速级和低速级齿轮副的法面模数，z_1，z_3 分别为高速级和低速级的小齿轮齿数，i_1，i_2 分别为高速级和低速级的传动比，β 为齿轮副螺旋角。

2）根据减速器的总传动比 i，则低速级传动比为 $i_2 = i/i_1$。因此，计算总中心距 a_Σ 的独立参数有 6 个：m_{n1}、m_{n2}、z_1、z_3、i、β。

3）根据齿轮齿面接触疲劳强度条件 $d_1 \geqslant A_d \sqrt[3]{\dfrac{KT_1 (u \pm 1)}{\psi_d u [\sigma_H]^2}}$（其中：齿数比等于传动比 $u = i$，“+”号用于外啮合，“-”用于内啮合），得到高速级和低速级的齿面接触疲劳强度

约束条件分别是

$$\left.\begin{aligned}&KT_1A_d^3(1+i_1)\cos^3\beta-\psi_d[\sigma_H]^2m_{n1}^3z_1^3i_1\leqslant 0\\&KT_2A_d^3(i+i_1)\cos^3\beta-\psi_d[\sigma_H]^2im_{n2}^3z_3^3\leqslant 0\end{aligned}\right\}\quad(13\text{-}24)$$

4）根据齿轮齿根弯曲疲劳强度条件 $m_n\geqslant A_m\times\sqrt[3]{\dfrac{KT_1Y_{FS}}{\psi_d z_1^2[\sigma_F]}}$，得到高速级和低速级的齿根弯曲疲劳强度约束条件分别是

$$\left.\begin{aligned}&KT_1A_m^3Y_{FS1}-\psi_d[\sigma_F]m_{n1}^3z_1^2\leqslant 0\\&KT_2A_m^3Y_{FS2}-\psi_d[\sigma_F]m_{n2}^3z_3^2\leqslant 0\end{aligned}\right\}\quad(13\text{-}25)$$

式（13-24）和式（13-25）中各参数的意义见 13.2 节圆柱齿轮传动的设计计算。

5）高速级和低速级齿轮副传递的转矩

$$\left.\begin{aligned}&T_1=9550\frac{P_1}{n_1}\\&T_2=9550\frac{P_2}{n_2}=9550\frac{ni_1P_1}{n_1}\end{aligned}\right\}\quad(13\text{-}26)$$

式中，高速级和低速级之间传动效率 $\eta\approx 0.95$（包括圆柱齿轮传动、滚动轴承和联轴器等效率）。

6）复合齿形系数与当量齿数关系的拟合公式是

$$Y_{FS}=\frac{z_v}{az_v-b}=\frac{z}{az-b\cos^3\beta}\quad(13\text{-}27)$$

式中，常数 $a=0.269118$，$b=0.840687$，斜齿轮的当量齿数 $z_v=z/\cos^3\beta$。

对于两级圆柱齿轮减速器，齿轮相对于轴承非对称布置，载荷变动小，硬齿面齿轮传动推荐的齿宽系数 $\psi_d=0.3\sim 0.6$，直齿轮取较小值，斜齿轮取较大值。

7）为避免高速级大齿轮与低速轴发生干涉的几何约束条件为

$$E+r_{a2}-a_2\leqslant 0$$

式中，E 是低速级轴线与高速级大齿轮齿顶圆之间的距离，根据经验 $E\geqslant 50$ mm；高速级大齿轮的齿顶圆半径 $r_{a2}=\dfrac{m_{n1}z_2}{2\cos\beta}+h_{an}^*m_{n1}$，对于正常齿的法面齿高系数 $h_{an}^*=1.0$；低速级齿轮副中心距 $a_2=\dfrac{m_{n2}(z_2+z_4)}{2\cos\beta}=\dfrac{m_{n2}z_3(1+i/i_1)}{2\cos\beta}=\dfrac{m_{n2}z_3(i_1+i)}{2i_1\cos\beta}$。因此得到

$$m_{n1}z_1i_1^2+2(E+m_{n1})i_1\cos\beta-m_{n2}z_3(i_1+i)\leqslant 0\quad(13\text{-}28)$$

13.4.2　优化设计实例和数学模型

例 13-5　已知某两级斜齿圆柱齿轮减速器的参数：高速级输入功率 $P_1=6.2$ kW，转速 $n_1=1450$ r/min，总传动比 $i=31.5$，双向传动，齿轮宽度系数 $\psi_d=0.5$，载荷系数 $K=1.3$，齿轮材料采用 45 钢表面淬火，硬度 45HRC。要求按照总中心距 a_Σ 最小来确定齿轮传动方案。

根据齿轮材料与热处理规范，得到齿轮材料的接触疲劳极限 $\sigma_{Hlim}=1150$ MPa，齿轮材料的弯曲疲劳极限 $\sigma_{Flim}=340$ MPa。因此，齿面许用接触应力 $[\sigma_H]=0.9\sigma_{Hlim}=1035$ MPa，齿根

许用弯曲应力$[\sigma_F]=\sigma_{Flim}=340$ MPa（双向传动）。

解：建立优化设计的数学模型

（1）设计变量　将影响齿轮传动总中心距 a_Σ 的六个独立参数作为设计变量

$$X=[m_{n1},m_{n2},z_1,z_3,i_1,\beta]^T=[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6]^T$$

其中，m_{n1}，m_{n2}分别为高速级和低速级齿轮副的模数，z_1，z_3 分别为高速级和低速级小齿轮齿数，i_1 为高速级传动比，β 为齿轮副螺旋角。

（2）目标函数　根据式（13-22），减速器总中心距 a_Σ 最小的目标函数

$$\min f(X)=\frac{x_1x_3(1+x_5)+x_2x_4(1+ix_5^{-1})}{2\cos x_6}$$

（3）约束条件

1）根据式（13-24）得到齿面接触疲劳强度约束条件

$$g_1(X)=KT_1A_d^3(x_3+1)\cos^3x_6-\psi_d[\sigma_H]^2x_1^3x_3^3x_5\leqslant 0$$
$$g_2(X)=KT_2A_d^3(i+x_5)\cos^3x_6-\psi_d[\sigma_H]^2ix_2^3x_4^3\leqslant 0$$

2）根据式（13-25）和式（13-27）得到齿根弯曲疲劳强度约束条件

$$g_3(X)=KT_1A_m^3-\psi_d[\sigma_F]x_1^3x_3(ax_3-b\cos^3x_6)\leqslant 0$$
$$g_4(X)=KT_2A_m^3-\psi_d[\sigma_F]x_2^3x_4(ax_4-b\cos^3x_6)\leqslant 0$$

上面 4 式中，按照螺旋角$\beta=8°\sim15°$，取材料系数 $A_d=756$，$A_m=12.4$。

3）根据式（13-28）得到高速级大齿轮与低速轴不发生干涉的几何约束条件

$$g_5(X)=x_1x_3x_5^2+2(E+x_1)x_5\cos x_6-x_2x_4(x_5+i)\leqslant 0$$

4）边界约束。根据传递功率与转速估计高速级和低速级齿轮副模数的范围；综合考虑传动平稳、轴向力不能太大、轴齿轮的分度圆直径不能太小与两级传动的大齿轮浸油深度大致相近等因素，估计两级传动大齿轮的齿数范围、高速级传动比范围和齿轮副螺旋角范围等。

$g_6(X)=2-x_1\leqslant 0$　（高速级齿轮副模数的下限）

$g_7(X)=x_1-5\leqslant 0$　（高速级齿轮副模数的上限）

$g_8(X)=3.5-x_2\leqslant 0$　（低速级齿轮副模数的下限）

$g_9(X)=x_2-6\leqslant 0$　（低速级齿轮副模数的上限）

$g_{10}(X)=14-x_3\leqslant 0$　（高速级小齿轮齿数的下限）

$g_{11}(X)=x_3-22\leqslant 0$　（高速级小齿轮齿数的上限）

$g_{12}(X)=16-x_4\leqslant 0$　（低速级小齿轮齿数的下限）

$g_{13}(X)=x_4-22\leqslant 0$　（低速级小齿轮齿数的上限）

$g_{14}(X)=5.8-x_5\leqslant 0$　（高速级传动比的下限）

$g_{15}(X)=x_5-7\leqslant 0$　（高速级传动比的上限）

$g_{16}(X)=8-x_6\leqslant 0$　（齿轮副螺旋角的下限）

$g_{17}(X)=x_6-15\leqslant 0$　（齿轮副螺旋角的上限）

因此，这是一个六维非线性优化设计问题。

13.4.3　M 文件和运算结果

1. 编制 M 文件

使用函数 fmincon 求解约束极小值问题，需要建立如下函数文件：

- 目标函数的函数文件 jsqyh_f. m。
- 非线性不等式约束的函数文件 jsqyh_g. m。
- 编制调用目标函数与非线性约束的函数文件 jsqyh. m。

函数文件 jsqyh. m 中需要给定有关信息：初始点 x_0；线性不等式约束条件的系数矩阵 ***A*** 和常数向量 ***b***；线性等式约束条件的系数矩阵 ***Aeq*** 和常数向量 ***beq***；设计变量 ***X*** 的下界向量 ***Lb*** 和上界向量 ***Ub*** 等已知参数。程序运行后输出参数有：目标函数的最优解 ***x*** 点及其函数值。如果需要，还可以返回优化算法信息的数据结构、目标函数在最优点的梯度 grad 和 Hessian 矩阵值等信息。

```
% 两级斜齿轮传动优化设计
% 1 - 减速器中心距优化设计主程序
% 设计变量的初始值
x0 = [2;4;18;20;6.4;10];
% 设计变量的下界与上界
lb = [2;3.5;14;16;5.8;8];
ub = [5;6;22;22;7;15];
% 线性不等式约束(g6(x) - g17(x))中设计变量的系数矩阵
a = zeros(12,6);
a(1,1) = -1;a(2,1) = 1;
a(3,2) = -1;a(4,2) = 1;
a(5,3) = -1;a(6,3) = 1;
a(7,4) = -1;a(8,4) = 1;
a(9,5) = -1;a(10,5) = 1;
a(11,6) = -1;a(12,6) = 1;
% 线性不等式约束(g6(x) - g17(x))中的常数项列阵
b = [ -2;5; -3.5;6; -14;22; -16;22; -5.8;7; -8;15];
% 使用多维约束优化命令 fmincon(调用目标函数 jsqyh_f 和非线性约束函数 jsqyh_g)
% 没有等式约束,参数 Aeq 和 beq 定义为空矩阵符号“[ ]”
[x,fn] = fmincon(@jsqyh_f,x0,a,b,[],[],lb,ub,@jsqyh_g);
disp'        ********  两级斜齿轮传动中心距优化设计最优解    *******'
fprintf(            高速级齿轮副模数              mn1 = %3.4f mm \n' ,x(1))
fprintf(            低速级齿轮副模数              mn2 = %3.4f mm \n' ,x(2))
fprintf(            高速级小齿轮齿数                z1 = %3.4f      \n' ,x(3))
fprintf(            低速级小齿轮齿数                z3 = %3.4f      \n' ,x(4))
fprintf(          高速级齿轮副传动比                i1 = %3.4f      \n' ,x(5))
fprintf(                齿轮副螺旋角              beta = %3.4f ° \n' ,x(6))
fprintf(              减速器总中心距               a12 = %3.4f mm \n' ,fn)
% 调用多维约束优化非线性约束函数(jsqyh_g)计算最优点 x * 的性能约束函数值
g = jsqyh_g(x);
disp'          ========     最优点的性能约束函数值        ======='
```

```
fprintf('        高速级齿轮副接触疲劳强度约束函数值    g1 = %3.4f \n',g(1))
fprintf('        低速级齿轮副接触疲劳强度约束函数值    g2 = %3.4f \n',g(2))
fprintf('        高速级小齿轮齿根弯曲强度约束函数值    g3 = %3.4f \n',g(3))
fprintf('        低速级小齿轮齿根弯曲强度约束函数值    g4 = %3.4f \n',g(4))
fprintf('        大齿轮齿顶与轴不干涉几何约束函数值    g5 = %3.4f \n',g(5))
```

计算结果：

```
      ********两级斜齿轮传动中心距优化设计最优解    ********
             高速级齿轮副模数             mn1 = 2.8385 mm
             低速级齿轮副模数             mn2 = 3.8690 mm
             高速级小齿轮齿数               z1 = 15.1807
             低速级小齿轮齿数               z3 = 16.0000
             高速级齿轮副传动比             i1 = 6.5039
             齿轮副螺旋角                 beta = 15.0000 °
             减速器总中心距                 a12 = 330.8634 mm
        ========最优点的性能约束函数值       ========
    高速级齿轮副接触疲劳强度约束函数值    g1 = -0.0001
    低速级齿轮副接触疲劳强度约束函数值    g2 = -0.0010
    高速级小齿轮齿根弯曲强度约束函数值    g3 = -130634.3523
    低速级小齿轮齿根弯曲强度约束函数值    g4 = 0.0000
    大齿轮齿顶与轴不干涉几何约束函数值    g5 = -604.3788
```

```
%四舍五入优化设计结果
%确定齿轮齿数
mn1 = 3;mn2 = 4;z1 = 15;z3 = 16;i = 31.5;i1 = x(5);hd = pi/180;
disp'    @@@@@@@@       优化设计圆整结果       @@@@@@@@'
i2 = i/i1;
fprintf('             低速级传动比            i2 = %3.4f \n',i2)
z2j = z1 * i1;
fprintf('        齿轮 2 齿数的计算值          z2j = %3.4f \n',z2j)
z2 = input(' 确定齿轮 2 的齿数 z2 =');
z4j = z3 * i2;
fprintf('        齿轮 4 齿数的计算值          z4j = %3.4f \n',z4j)
z4 = input(' 确定齿轮 4 的齿数 z4 =');
%确定总中心距和螺旋角
acj = (mn1 * (z1 + z2) + mn2 * (z3 + z4))/(2 * cos(x(6) * hd));
fprintf('        圆整中心距计算值            acj = %3.4f \n',acj)
ac = input(' 确定中心距(mm) ac =');
beta = acos((mn1 * (z1 + z2) + mn2 * (z3 + z4))/(2 * ac));
fprintf('            螺旋角的计算值         beta = %3.4f °\n',beta/hd)
```

四舍五入结果：

```
  @@@@@@@@       优化设计圆整结果       @@@@@@@@
低速级传动比            i2 = 4.8433
```

```
    齿轮2齿数的计算值          z2j = 97.5578
      确定齿轮2的齿数           z2 = 98
    齿轮4齿数的计算值          z4j = 77.4925
      确定齿轮4的齿数           z4 = 77
  四舍五入中心距计算值          acj = 368.0407
       确定中心距(mm)           ac = 365
         螺旋角的计算值        beta = 13.1009°
```

```
disp'    @@@@@@@@    齿轮传递转矩、复合齿形系数    @@@@@@@@'
P1 = 6.2;n1 = 1450;T1 = 9550 * P1/n1;eta = 0.94;T2 = 9550 * eta * x(5) * P1/n1;
fprintf('        高速级齿轮副传递的转矩          T1 = %3.4f Nm \n' ,T1)
fprintf('        低速级齿轮副传递的转矩          T2 = %3.4f Nm \n' ,T2)
ay = 0.269118;by = 0.840687;
Yfs1 = z1/(ay * z1 - by);Yfs3 = z3/(ay * z3 - by);
fprintf('     高速级小齿轮复合齿形系数        Yfs1 = %3.4f \n' ,Yfs1)
fprintf('     低速级小齿轮复合齿形系数        Yfs3 = %3.4f \n' ,Yfs3)
```

```
   @@@@@@@@    齿轮传递转矩、复合齿形系数    @@@@@@@@
      高速级齿轮副传递的转矩          T1 = 40.8345 Nm
      低速级齿轮副传递的转矩          T2 = 249.6466 Nm
   高速级小齿轮复合齿形系数        Yfs1 = 4.6932
   低速级小齿轮复合齿形系数        Yfs3 = 4.6173
```

```
% 2 - 两级斜齿轮减速器总中心距的目标函数(jsqyh_f)
function f = jsqyh_f(x);
i = 31.5;hd = pi/180;
a1 = x(1) * x(3) * (1 + x(5));
a2 = x(2) * x(4) * (1 + i/x(5));
f = (a1 + a2)/2 * cos(x(6) * hd);
```

```
% 3 - 两级斜齿轮减速器优化设计的非线性不等式约束函数(jsqyh_g)
function [g,ceq] = jsqyh_g(x);
P1 = 6.2;n1 = 1450;i = 31.5;psi_d = 0.6;sigma_HP = 1035;sigma_FP = 340;
T1 = 9550 * P1/n1;eta = 0.94;K = 1.3;Ad = 756;Am = 12.4;E = 50;hd = pi/180;
T2 = 9550 * eta * x(5) * P1/n1;ay = 0.269118;by = 0.840687;
g(1) = K * T1 * Ad^3 * (x(3) + 1) * cos(x(6) * hd)^3 - psi_d * sigma_HP^2 * x(1)^3 * x(3)^3 * x
(5);
g(2) = K * T2 * Ad^3 * (x(5) + i) * cos(x(6) * hd)^3 - psi_d * i * sigma_HP^2 * x(2)^3 * x(4)^3;
g(3) = K * T1 * Am^3 - psi_d * sigma_FP * x(1)^3 * x(3) * (ay * x(3) - by * cos(x(6) * hd));
g(4) = K * T2 * Am^3 - psi_d * sigma_FP * x(2)^3 * x(4) * (ay * x(3) - by * cos(x(6) * hd));
g(5) = x(5) * (2 * (E + x(1)) * cos(x(6) * hd) + x(1) * x(2) * x(3)) - x(2) * x(4) * (i + x
(5));
ceq = [];
```

2. 优化结果分析和处理

M 文件运算的优化结果是

$$X^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_2^* \\ x_2^* \\ x_2^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{n1} \\ m_{n2} \\ z_1 \\ z_3 \\ i_1 \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.8385 \\ 3.8690 \\ 15.1807 \\ 16.0000 \\ 6.5039 \\ 15.000 \end{bmatrix}$$

经检验，最优点 $\boldsymbol{X}^*$ 位于性能约束 $g_1(\boldsymbol{X})$、$g_2(\boldsymbol{X})$ 和 $g_4(\boldsymbol{X})$，以及边界约束 $g_{12}(\boldsymbol{X})$、$g_{17}(\boldsymbol{X})$ 的交集上。

1）m_{n1}，m_{n2} 高速级和低速级齿轮副模数按照规范圆整为标准值 $m_{n1}=3$ mm 和 $m_{n2}=4$ mm。

2）高速级小齿轮齿数圆整为整数 $z_1=15$。

3）根据高速级传动比 $i_1=6.5189$，则高速级大齿轮齿数为 $z_2=i_1z_1=6.5309\times15=97.5578$，取 $z_2=98$。

4）根据低速级传动比 $i_2=\dfrac{i}{i_1}=\dfrac{31.5}{6.5039}=4.8433$，则低速级大齿轮齿数为 $z_4=i_2z_3=4.8433\times16=77.4925$，取 $z_4=77$。

设计方案经过圆整后的离散优化解在六维设计空间的可行域内。

5）减速器总中心距

$$a_{\Sigma}=\frac{m_{n1}(Z_1+Z_2)+m_{n2}(Z_3+Z_4)}{2\cos\beta}=\frac{3\times(15+98)+4\times(16+77)}{2\cos15^\circ}=368.0407\text{ mm}$$

将减速器总中心距圆整为相近的数值 $a_{\Sigma}=365$ mm，则齿轮副螺旋角调整为 $\beta=13.1009^\circ$（螺旋角在 $8^\circ\sim15^\circ$ 范围内，前面选取的材料系数 $A_d=756$ 和 $A_m=12.4$ 合理）。

13.5 螺旋齿轮传动的设计计算

如果斜齿圆柱齿轮副的法面模数和法面压力角相等，但是它们的螺旋角不相等，则安装后两个斜齿轮的轴线在空间交错（既不平行又不相交），组成交错轴斜齿轮传动——螺旋齿轮传动。

13.5.1 螺旋齿轮传动原理

1. 齿轮副的轴夹角

如图 13-4a 所示的螺旋齿轮传动，两轮分度圆相切于 C 点，两轮轴线在两轮分度圆柱公切面上投影的夹角，称为两轮的轴夹角，其值为

$$\Sigma=|\beta_1\pm\beta_2| \tag{13-29}$$

式中，β_1 与 β_2 分别是两轮的螺旋角；“+”号用于两轮螺旋角方向相同时，“-”号用于两轮螺旋角方向相反时。若 $\Sigma=0$，$\beta_1=-\beta_2$，则为平行轴外啮合斜齿圆柱齿轮机构。

与平行轴斜齿轮传动不同的是，由于交错轴斜齿轮副的两轮螺旋角不一定相同，因此两

轮的端面模数和端面压力角也不一定分别相等。

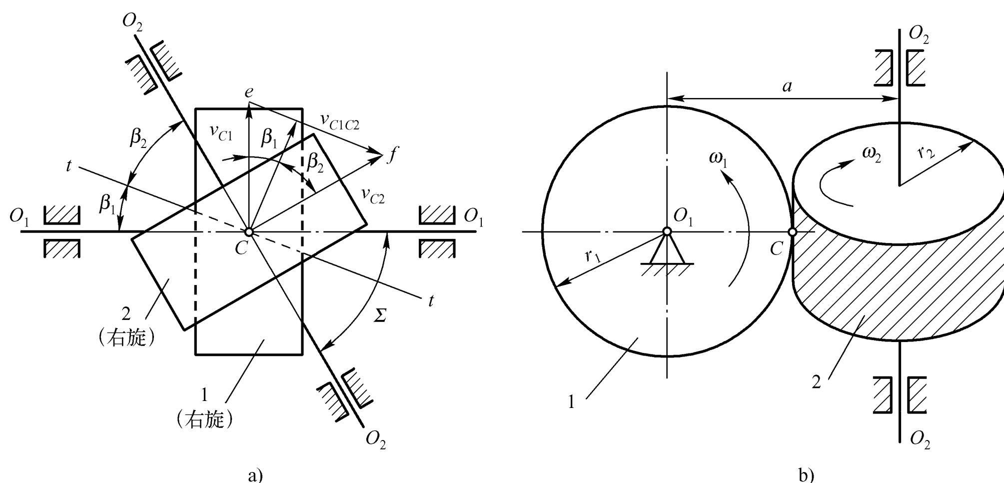


图 13-4　螺旋齿轮传动

2. 中心距

如图 13-4b 所示，过 C 点作交错轴斜齿轮副轴线的公垂线，它的长度就是交错轴斜齿轮传动的中心距

$$a = r_1 + r_2 = \frac{m_n}{2}\left(\frac{z_1}{\cos\beta_1} + \frac{z_2}{\cos\beta_2}\right) \tag{13-30}$$

3. 传动比

假设两轮的端面模数分别为 m_{t1} 与 m_{t2}，分度圆直径分别为 d_1 与 d_2，则两轮齿数分别为 $z_1 = \dfrac{d_1}{m_{t1}}$ 与 $z_2 = \dfrac{d_2}{m_{t2}}$。因此，两轮的传动比为

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{\dfrac{d_2}{m_{n2}/\cos\beta_2}}{\dfrac{d_1}{m_{n1}/\cos\beta_1}} = \frac{d_2\cos\beta_2}{d_1\cos\beta_1} \tag{13-31}$$

螺旋齿轮的传动比 i 是恒定的，两轮的中心距 a 或轴夹角 $\sum$ 改变时，传动比不受影响。

4. 常规啮合的无侧隙啮合方程式

螺旋齿轮常规啮合（最紧密啮合）时的中心距最小，重合度最大，这时无侧隙啮合方程式为

$$x_{n1} + x_{n2} = \frac{1}{2\tan\alpha_n}\left[z_1(\mathrm{inv}\alpha'_{t1} - \mathrm{inv}\alpha_{t1}) + z_2(\mathrm{inv}\alpha'_{t2} - \mathrm{inv}\alpha_{t2})\right] \tag{13-32}$$

式中，x_{n1} 与 x_{n2} 分别是两轮的法面变位系数；α'_{t1} 与 α_{t1} 分别是齿轮 1 的端面啮合角和端面压力角；α'_{t2} 与 α_{t2} 分别是斜齿轮 2 的端面啮合角和端面压力角；z_1 与 z_2 分别是两轮的齿数。

5. 齿轮副的实际啮合线

螺旋齿轮副的实际啮合线长度为

$$B_1B_2 = \frac{\sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2}}{\cos\beta_{b1}} + \frac{\sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2}}{\cos\beta_{b2}} - \frac{a - r_{b1}\cos\alpha'_{t1} - r_{b2}\cos\alpha'_{t2}}{\sin\alpha_n} \tag{13-33}$$

式中，r_{a1} 与 r_{a2} 分别是两轮的齿顶圆半径；r_{b1} 与 r_{b2} 分别是两轮的基圆半径；α'_{t1} 与 α'_{t2} 分别是两轮的端面啮合角；β_{b1} 与 β_{b2} 分别是两轮的基圆螺旋角；α_n 是齿轮的法面压力角；a 是齿轮副中心距。

6. 从动轮的转向

交错轴斜齿轮传动中从动轮的转向取决于两齿轮螺旋角的大小和方向，它可以通过速度矢量图解法来确定。例如，在图 13-4a 中，假设齿轮 1 是主动轮，它在节点 C 处的速度 ν_{C1} 方向是已知的（与齿轮 1 的轴线 O_1O_1 垂直），两齿轮在节点 C 的相对滑动速度 ν_{C1C2} 方向 ef 应该与两齿轮齿面在节点 C 处的公切线 tt 平行；斜齿轮 2 的速度方向应该与斜齿轮 2 的轴线 O_2O_2 垂直，作出速度矢量△Cef 的封闭边 Cf，它就是斜齿轮 2 在节点 C 的速度矢量 ν_{C2}。因此，从动轮的转向如图 13-4b 所示。

综上所述，交错轴斜齿轮传动的特点是，可以通过改变两齿轮螺旋角的大小来调整两齿轮的轴夹角、中心距和传动比［式（13-29）~式（13-31）］，或通过改变两齿轮螺旋角的方向来调整从动轮的转向。交错轴斜齿轮传动的主要缺点是相互啮合的齿廓为点接触，而且齿廓之间除了沿齿高方向有相对滑动外，沿螺旋齿槽方向也有较大的相对滑动，造成齿廓磨损快，传动效率低，一般适用于低速轻载的辅助传动中。

13.5.2 螺旋齿轮传动设计计算实例

例 13-6 已知某螺旋齿轮传动的基本参数：齿数 $z_1=17$ 与 $z_2=50$，法面压力角 $\alpha_n=20°$，齿顶高系数 $h_a^*=1$，顶隙系数 $C^*=0.25$，两齿轮的轴夹角 $\sum=60°$。设计弯曲强度较高的螺旋齿轮传动。

解：

1. 选取两齿轮的螺旋角

为了提高两齿轮的弯曲强度，两齿轮按正轮制造。因此，选择两齿轮的分度圆柱螺旋角

$$\beta_1=\beta_2=0.5(\sum-1°)=0.5\times(60°-1°)=29.5°$$

有 $\beta_1+\beta_2=59°$，略小于两齿轮的轴夹角 $\sum=60°$。

2. 计算齿轮的角度尺寸

1）齿轮端面分度圆柱压力角

$$\alpha_{t1}=\alpha_{t2}=\mathrm{atan}\frac{\tan\alpha_n}{\cos\beta_1}=\mathrm{atan}\frac{\tan 20°}{\cos 29.5°}=22.6940°$$

2）齿轮基圆柱螺旋角

$$\beta_{b1}=\beta_{b2}=\mathrm{atan}(\tan\beta_1\cos\alpha_{t1})=\mathrm{atan}(\tan 29.5°\cos 22.6940°)=27.5632°$$

3）齿轮节圆柱螺旋角：由于 $k=\sin\beta_{b1}/\sin\beta_{b2}=1$，所以

$$\beta'_1=\beta'_2=\mathrm{atan}\frac{k\sin\sum}{1+k\cos\sum}=\mathrm{atan}\frac{1\times\sin 60°}{1+1\times\cos 60°}=30°$$

4）齿轮法面节圆压力角（公共齿条法面齿形角）

$$\alpha'_n=\mathrm{acos}\frac{\sin\beta_{b1}}{\sin\beta'_1}=\mathrm{acos}\frac{\sin 27.5632°}{\sin 30°}=22.2632°$$

5）齿轮端面节圆压力角（公共齿条法面齿形角）

$$\alpha'_{t1}=\alpha'_{t2}=\mathrm{acos}\frac{\tan\beta_{b1}}{\tan\beta'_1}=\mathrm{acos}\frac{\tan 27.5632°}{\tan 30°}=25.3006°$$

3. 计算两齿轮的变位系数

齿轮副的总变位系数

$$x_{n1}+x_{n2}=\frac{z_1(\mathrm{inv}\alpha'_{t1}-\mathrm{inv}\alpha_{t1})+z_2(\mathrm{inv}\alpha'_{t2}-\mathrm{inv}\alpha_{t2})}{2\tan\alpha_n}$$

$$=\frac{(17+50)(\mathrm{inv}25.3006-\mathrm{inv}22.6940)}{2\tan 20^\circ}=0.8312$$

选取小齿轮变位系数 $x_{n1}=0.40$，则大齿轮变位系数 $x_{n2}=0.8312-0.40=0.4312$。

4. 计算齿轮的长度尺寸

1）公共齿条的法面模数

$$m'_n=m_n\frac{\cos\alpha_n}{\cos\alpha'_n}=2\times\frac{\cos 20^\circ}{\cos 22.2632^\circ}=2.0308\ \mathrm{mm}$$

2）齿轮节圆柱半径

$$r'_1=\frac{m'_n z_1}{2\cos\alpha'_n}=\frac{2.0308\times 17}{2\cos 22.2632^\circ}=19.8328\ \mathrm{mm}$$

$$r'_2=\frac{m'_n z_2}{2\cos\alpha'_n}=\frac{2.0308\times 50}{2\cos 22.2632^\circ}=58.3317\ \mathrm{mm}$$

3）齿轮传动最小中心距

$$a=r'_1+r'_2=19.8238+58.3317=78.1645\ \mathrm{mm}$$

4）齿轮分度圆柱半径

$$r_1=\frac{m_n z_1}{2\cos\beta_1}=\frac{2\times 17}{2\cos 29.5^\circ}=19.5322\ \mathrm{mm}$$

$$r_2=\frac{m_n z_2}{2\cos\beta_2}=\frac{2\times 50}{2\cos 29.5^\circ}=57.4478\ \mathrm{mm}$$

5）齿轮基圆柱半径

$$r_{b1}=r_1\cos\alpha_{t1}=19.5322\times\cos 22.6940^\circ=18.0200\ \mathrm{mm}$$

$$r_{b2}=r_2\cos\alpha_{t2}=57.4478\times\cos 22.6940^\circ=53.0001\ \mathrm{mm}$$

6）齿轮齿根圆柱半径

$$r_{f1}=r_1-m_n(h_a^*+C^*-x_{n1})=19.5322-2\times(1+0.25-0.40)=17.8322\ \mathrm{mm}$$

$$r_{f2}=r_2-m_n(h_a^*+C^*-x_{n2})=57.4478-2\times(1+0.25-0.4312)=55.8102\ \mathrm{mm}$$

7）齿轮齿顶圆柱半径

$$r_{a1}=a-r_{f2}-C^*m_n=78.1644-55.8102-0.25\times 2=21.8543\ \mathrm{mm}$$

$$r_{a2}=a-r_{f1}-C^*m_n=78.1644-17.8322-0.25\times 2=59.8322\ \mathrm{mm}$$

5. 校验齿轮传动的重合度

1）齿轮传动实际啮合线长度

$$B_1B_2=\frac{\sqrt{r_{a1}^2-r_{b1}^2}}{\cos\beta_{b1}}+\frac{\sqrt{r_{a2}^2-r_{b2}^2}}{\cos\beta_{b2}}-\frac{a-r_{b1}\cos\alpha'_{t1}-r_{b2}\cos\alpha'_{t2}}{\sin\alpha_n}$$

$$=\frac{\sqrt{21.8543^2-18.0200^2}}{\cos 27.5632^\circ}+\frac{\sqrt{59.8322^2-53.0001^2}}{\cos 27.5632^\circ}$$

$$-\frac{78.1644-18.0200\cos 25.3006^\circ-53.0001\cos 25.3006^\circ}{\sin 20^\circ}=8.4288\ \mathrm{mm}$$

2）齿轮有效齿宽

$$b_{a1}=B_1B_2\sin\beta_{b1}=8.4288\times\sin 27.5632^\circ=3.9002\ \text{mm}$$

$$b_{a2}=B_1B_2\sin\beta_{b2}=8.4288\times\sin 27.5632^\circ=3.9002\ \text{mm}$$

在齿轮传动弯曲强度允许的情况下，取两齿轮的实际齿宽大于有效齿宽。

3）齿轮传动的重合度

$$\varepsilon=\frac{B_1B_2}{\pi m_n\cos\alpha_n}=\frac{8.4288}{\pi\times2\times\cos 20^\circ}=1.4276$$

由于 $\varepsilon>1$，齿轮副可以连续传动。

13.5.3 M 文件和运算结果

编制 M 文件如下：

```
% 螺旋齿轮传动设计计算
% 已知条件:齿数、法面压力角、法面模数、齿顶高系数、顶隙系数、轴交角
z1 = 17;z2 = 50;alpha_n = 20;m_n = 2;ha = 1;C = 0.25;Sigma = 60;hd = pi/180;
% 计算齿轮的分度圆柱压力角、基圆柱和节圆柱螺旋角、法面和端面节圆压力角
beta_1 = 0.5 * (Sigma - 1);beta_2 = beta_1;
fprintf('              两齿轮螺旋角          beta_1 = %3.4f °\n',beta_1);
alpha_t1 = atan(tan(alpha_n * hd)/cos(beta_1 * hd));alpha_t2 = alpha_t1;
fprintf(' 两齿轮分度圆柱螺旋角          alpha_t1 = %3.4f °\n',alpha_t1/hd);
beta_b1 = atan(tan(beta_1 * hd) * cos(alpha_t1));beta_b2 = beta_b1;
fprintf('      两齿轮基圆柱螺旋角          beta_b1 = %3.4f °\n',beta_b1/hd);
k = sin(beta_b1)/sin(beta_b1);
beta_1p = atan(k * sin(Sigma * hd)/(1 + k * cos(Sigma * hd)));beta_2p = beta_1p;
fprintf('      两齿轮节圆柱螺旋角          beta_1p = %3.4f °\n',beta_1p/hd);
alpha_np = acos(sin(beta_b1)/sin(beta_1p));
fprintf(' 两齿轮法面节圆压力角          alpha_np = %3.4f °\n',alpha_np/hd);
alpha_t1p = acos(tan(beta_b1)/tan(beta_1p));alpha_t2p = alpha_t1p;
fprintf(' 两齿轮端面节圆压力角          alpha_t1p = %3.4f °\n',alpha_t1p/hd);
% 确定两齿轮的变位系数
inv_t1p = tan(alpha_t1p) - alpha_t1p;inv_t1 = tan(alpha_t1) - alpha_t1;
inv_t2p = tan(alpha_t2p) - alpha_t2p;inv_t2 = tan(alpha_t2) - alpha_t2;
xc = (z1 * (inv_t1p - inv_t1) + z2 * (inv_t2p - inv_t2))/(2 * tan(alpha_n * hd))
x_n1 = input('        选择小齿轮法面变位系数     x_n1 = ');
x_n2 = xc - x_n1;
fprintf('                  大齿轮法面变位系数     x_n2 = %3.4f \n',x_n2);
% 计算齿轮的几何尺寸
m_np = m_n * cos(alpha_n * hd)/cos(alpha_np);
fprintf('                  公共齿条的法面模数    m_np = %3.4f mm \n',m_np);
r_1p = m_np * z1/(2 * cos(beta_1 * hd));
r_2p = m_np * z2/(2 * cos(beta_2 * hd));
fprintf('                    小齿轮节圆柱半径     r_1p = %3.4f mm \n',r_1p);
fprintf('                    大齿轮节圆柱半径     r_2p = %3.4f mm \n',r_2p);
a = (r_1p + r_2p);
fprintf('                    两齿轮最小中心距         a = %3.4f mm \n',a);
```

```
r_1 = m_n * z1/(2 * cos(beta_1 * hd));
r_2 = m_n * z2/(2 * cos(beta_2 * hd));
fprintf('                    小齿轮分度圆半径      r_1 = %3.4f mm \n' ,r_1);
fprintf('                    大齿轮分度圆半径      r_2 = %3.4f mm \n' ,r_2);
r_b1 = r_1 * cos(alpha_t1);
r_b2 = r_2 * cos(alpha_t2);
fprintf('                    小齿轮基圆柱半径     r_b1 = %3.4f mm \n' ,r_b1);
fprintf('                    大齿轮基圆柱半径     r_b2 = %3.4f mm \n' ,r_b2);
r_f1 = r_1 - m_n * (ha + C - x_n1);
r_f2 = r_2 - m_n * (ha + C - x_n2);
fprintf('                  小齿轮齿根圆柱半径     r_f1 = %3.4f mm \n' ,r_f1);
fprintf('                  大齿轮齿根圆柱半径     r_f2 = %3.4f mm \n' ,r_f2);
r_a1 = a - r_f2 - 0.25 * m_n; % 为保证合理顶隙 0.25 * mn,根据中心距计算齿轮齿顶圆柱半径
r_a2 = a - r_f1 - 0.25 * m_n;
fprintf('                  小齿轮齿顶圆柱半径     r_a1 = %3.4f mm \n' ,r_a1);
fprintf('                  大齿轮齿顶圆柱半径     r_a2 = %3.4f mm \n' ,r_a2);
% 校验齿轮传动的重合度
B1 = sqrt(r_a1^2 - r_b1^2)/cos(beta_b1) + sqrt(r_a2^2 - r_b2^2)/cos(beta_b2);
B2 = (a - r_b1 * cos(alpha_t1p) - r_b2 * cos(alpha_t2p))/sin(alpha_np);
B1B2 = B1 - B2;
fprintf('              齿轮传动实际啮合线长度    B1B2 = %3.4f mm \n' ,B1B2);
b_a1 = B1B2 * sin(beta_b1);
b_a2 = B1B2 * sin(beta_b2);
fprintf('                      小齿轮有效宽度     b_a1 = %3.4f mm \n' ,b_a1);
fprintf('                      大齿轮有效宽度     b_a2 = %3.4f mm \n' ,b_a2);
epsilon = B1B2/(pi * m_n * cos(alpha_n * hd));
fprintf('                      齿轮传动重合度  epsilon = %3.4f \n' ,epsilon);
```

计算结果：

```
          两齿轮螺旋角       beta_1 = 29.5000°
  两齿轮分度圆柱螺旋角     alpha_t1 = 22.6940°
    两齿轮基圆柱螺旋角      beta_b1 = 27.5632°
    两齿轮节圆柱螺旋角      beta_1p = 30.0000°
  两齿轮法面节圆压力角     alpha_np = 22.2632°
  两齿轮端面节圆压力角    alpha_t1p = 25.3006°

xc =     0.8312
     选择小齿轮法面变位系数     x_n1 = 0.40
         大齿轮法面变位系数     x_n2 = 0.4312
         公共齿条的法面模数     m_np = 2.0308 mm
           小齿轮节圆柱半径     r_1p = 19.8328 mm
           大齿轮节圆柱半径     r_2p = 58.3317 mm
           两齿轮最小中心距        a = 78.1644 mm
           小齿轮分度圆半径      r_1 = 19.5322 mm
           大齿轮分度圆半径      r_2 = 57.4478 mm
           小齿轮基圆柱半径     r_b1 = 18.0200 mm
```

大齿轮基圆柱半径　r_b2 = 53.0001 mm
小齿轮齿根圆柱半径　r_f1 = 17.8322 mm
大齿轮齿根圆柱半径　r_f2 = 55.8102 mm
小齿轮齿顶圆柱半径　r_a1 = 21.8543 mm
大齿轮齿顶圆柱半径　r_a2 = 59.8322 mm

齿轮传动实际啮合线长度　B1B2 = 8.4288 mm
小齿轮有效宽度　b_a1 = 3.9002 mm
大齿轮有效宽度　b_a2 = 3.9002 mm
齿轮传动重合度　epsilon = 1.4276

13.6　圆柱蜗杆传动的优化设计

蜗杆传动是在空间交错的两轴间传递运动和动力的一种传动，两轴线间的夹角可为任意值，常用的为 90°，如图 13-5 所示。蜗杆传动的传动比大，工作平稳，噪声小，结构紧凑，可以实现自锁。但一般的蜗杆传动效率较低，蜗轮常需用较贵的非铁金属（如青铜）制造。蜗杆传动广泛用于分度机构和中小功率的传动系统。

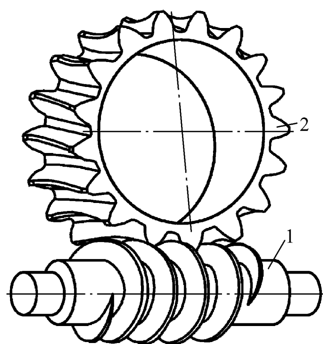


图 13-5　蜗杆传动
1—蜗杆　2—蜗轮

圆柱蜗杆传动是蜗杆分度曲面为圆柱面的蜗杆传动。其中常用的有阿基米德圆柱蜗杆传动，蜗杆的端面齿廓为阿基米德螺旋线，其轴面齿廓为直线。阿基米德蜗杆可以在车床上用梯形车刀加工，所以制造简单，但难以磨削，故精度不高。在阿基米德圆柱蜗杆传动中，蜗杆与蜗轮齿面的接触线与相对滑动速度之间的夹角很小，不易形成润滑油膜，故承载能力较低。

13.6.1　建立优化设计的数学模型

在蜗杆传动中，为了减摩耐磨，通常蜗轮齿圈需用贵重的青铜等材料制造。为了节省较贵重的非铁金属，降低成本，在蜗杆传动的优化设计中，应该以蜗轮非铁金属齿圈体积最小作为设计目标。

1. 目标函数和设计变量

如图 13-6 所示，蜗轮齿圈的结构尺寸包括：齿顶圆直径 d_a、齿根圆直径 d_f、齿圈外径 d_e、内径 d_0 和齿宽 b。蜗轮齿圈的体积可以表示为

$$V=\frac{\pi b(d_e^2-d_0^2)}{4}$$

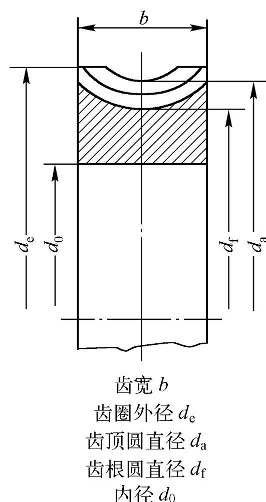


图 13-6　蜗轮齿圈的结构尺寸

式中，蜗轮齿圈外径 d_e 和齿宽 b，根据蜗杆头数 z_1 按照

表 13-2 选取。

表 13-2　蜗轮齿圈外径 d_e 和宽度 b 的选取

蜗杆头数 z_1	1	2、3	4~6
蜗轮齿圈外径 d_e	$d_e \leqslant d_a + 2m$	$d_e \leqslant d_a + 1.5m$	$d_e \leqslant d_a + m$
蜗轮齿宽 b	$b \leqslant 0.75 d_{a1}$		$b \leqslant 0.67 d_{a1}$

从表 13-2 可知，$d_e = d_a + \psi_e m$，$b = \psi_b d_{a1}$，两式中的系数 ψ_e 和 ψ_b 根据表 13-2 确定（根据蜗杆头数 z_1 不同，$\psi_e = 2$、1.5 或 1，$\psi_b = 0.75$ 或 0.67）。

- 齿圈内径 $d_0 = d_f - 2m$。
- 蜗杆齿顶圆直径 $d_{a1} = (q+2)m$，q 是蜗杆的直径系数。
- 蜗轮齿数 $z_2 = iz_1$，其中 i 是传动比；z_1 是蜗杆头数。
- 蜗轮齿顶圆直径 $d_a = (z_2 + 2)m = (iz_1 + 2)m$。
- 蜗轮齿根圆直径 $d_f = (z_2 - 2.4)m = (iz_1 - 2.4)m$。

将上述关系代入蜗轮齿圈的体积计算式得到

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi b(d_e^2 - d_0^2)}{4} = \frac{\pi \psi_b d_{a1}}{4}[(d_a + \psi_e m)^2 - (d_f - 2m)^2] \\ &= \frac{\pi \psi_b (q+2)m}{4}\{[(iz_1 + 2)m + \psi_e m]^2 - [(iz_1 - 2.4)m - 2m]^2\} \\ &= \frac{\pi \psi_b (q+2)m^3}{4}[(iz_1 + \psi_e + 2)^2 - (iz_1 - 4.4)^2] \end{aligned} \tag{13-34}$$

从式（13-34）可知，除了系数 ψ_e 和 ψ_b 根据从表 13-2 确定外，蜗轮齿圈的体积是蜗杆头数 z_1、模数 m、直径系数 q 和传动比 i 的函数。由于传动比 i 一般是已知量，因此，取蜗杆头数 z_1、模数 m 和直径系数 q 作为设计变量，即

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ m \\ q \end{bmatrix}$$

因此，根据式（13-34）可以将目标函数写成

$$f(\boldsymbol{X}) = \frac{\pi \psi_b (x_3 + 2)x_2^3}{4}[(ix_1 + \psi_e + 2)^2 - (ix_1 - 4.4)^2] \tag{13-35}$$

2. 约束条件

1）蜗轮齿面接触强度的限制：根据蜗轮齿面接触强度条件

$$m\sqrt[3]{q} \geqslant \sqrt[3]{KT_2\left(\frac{15150}{z_2[\sigma_H]}\right)^2} \tag{13-36}$$

式中，载荷系数 $K = 1 \sim 1.4$，载荷平稳，齿面滑动速度≤3 m/s，7 级以上精度时取小值；蜗轮传递的转矩 $T_2 = i\eta T_1 = 9550 i\eta P_1/n_1$，蜗杆传动效率 $\eta \approx 1 - 0.035\sqrt{i}$；$[\sigma_H]$是蜗轮齿圈材

料的许用接触应力。

因此得到
$$g_1(\boldsymbol{X})=KT_2\left(\frac{15150}{ix_1[\sigma_H]}\right)^2-x_2^3x_3\leqslant 0$$

2）蜗轮齿根弯曲强度的限制：由于蜗轮轮齿的齿根是圆弧形，抗弯能力较高，很少发生蜗轮轮齿折断。所以，对于闭式蜗杆传动，通常不再进行蜗轮齿根弯曲强度计算。

3）蜗杆刚度的限制：要求蜗杆工作时最大挠度不大于 $0.001d_1=0.001mq$，即

$$y=\frac{\sqrt{F_{t1}^2+F_{r1}^2}}{48EJ}L^3\leqslant 10^{-3}d_1 \tag{13-37}$$

式中，蜗杆支承跨度 $L\approx 0.9d_2=0.9miz_1$；惯性矩 $J=\pi/64d_{f1}^4=\pi/64m^4(q-2.4)^4$；蜗杆圆周力 $F_{t1}=2T_1/d_1=2T_1/mq$；径向力 $F_{r1}=2T_2\tan 20°/d_2=2T_2\tan 20°/iz_1m$；弹性模量 $E=2.1\times 10^5$ MPa（钢）。将上述关系代入式（13-37）整理得到

$$g_2(\boldsymbol{X})=0.729i^3x_1^3\sqrt{\left(\frac{2T_1}{x_2x_3}\right)^2+\left(\frac{2T_2\tan 20°}{ix_1x_2}\right)^2}-157.5\pi x_{2\,3}^2(x_3-2.4)^4\leqslant 0$$

4）蜗杆头数的限制：对于动力传动，要求 $z_1=2\sim 4$。因此有

$$g_3(\boldsymbol{X})=x_1-3\leqslant 0$$
$$g_4(\boldsymbol{X})=2-x_1\leqslant 0$$

5）模数的限制：对于中小功率的蜗杆动力传动，要求 $3\leqslant m\leqslant 5$。因此有

$$g_5(\boldsymbol{X})=x_2-5\geqslant 0$$
$$g_6(\boldsymbol{X})=3-x_2\leqslant 0$$

6）蜗杆直径系数的限制：对应上述模数的范围，要求 $5\leqslant q\leqslant 16$。因此有

$$g_7(\boldsymbol{X})=x_3-16\leqslant 0$$
$$g_8(\boldsymbol{X})=5-x_3\leqslant 0$$

综上所述，优化设计数学模型是有 6 个边界约束和 2 个性能约束的 3 维非线性规划问题。

13.6.2 设计实例 M 文件和计算结果

例 13-7 已知某运输机用单级普通圆柱蜗杆减速器的输入功率 $P_1=6$ kW，转速 $n_1=1450$ r/min，传动比 i = 20，单向传动，载荷平稳（载荷系数 $K=1.1$）。蜗杆选用低碳合金钢 20CrMnTi，芯部调质，齿部渗碳淬火，硬度 >45HRC；蜗轮选用锡青铜 ZCuSn10Pb1，金属模铸造。蜗轮齿圈的许用接触应力 $[\sigma_H]=220$ MPa。试按照要求蜗轮齿圈体积最小进行优化设计。

根据传动比 $i=20$，选取蜗杆头数 $z_1=2$，则蜗轮齿数 $z_2=iz_1=20\times 2=40$。

根据传动比估算传动效率

$$\eta=(100-3.5\sqrt{i})\%=(100-3.5\sqrt{20})\%=0.8435$$

将已知数据代入式（13-34）之中，整理得到优化设计数学模型

$$\left.\begin{array}{c}\min f(\boldsymbol{X})=0.25\pi\psi_{\mathrm{b}}x_2^3(x_3+2)\left[(ix_1+\psi_{\mathrm{e}}+2)^2-(ix_1-4.4)^2\right]\\ \mathrm{s.\,t.}\ g_1(\boldsymbol{X})=KT_2\left(\dfrac{15150}{ix_1[\sigma_{\mathrm{H}}]}\right)-x_2^3x_3\leqslant 0\\ g_2(\boldsymbol{X})=0.729i^3x_1^3\sqrt{\left(\dfrac{2T_2}{i\eta x_2x_3}\right)^2+\left(\dfrac{2T_2\tan 20^\circ}{ix_1x_2}\right)^2}-157.5\pi x_2^2x_3(x_3-2.4)^4\leqslant 0\\ g_3(\boldsymbol{X})=x_1-3\leqslant 0\\ g_4(\boldsymbol{X})=2-x_1\leqslant 0\\ g_5(\boldsymbol{X})=x_2-5\geqslant 0\\ g_6(\boldsymbol{X})=3-x_2\leqslant 0\\ g_7(\boldsymbol{X})=x_3-16\leqslant 0\\ g_8(\boldsymbol{X})=5-x_3\leqslant 0\end{array}\right\}$$

可见，这是一个 3 维有 8 个不等式约束的非线性优化设计问题。

1. 编制 M 文件

采用 MATLAB 求解约束极小值的优化工具箱函数 fmincon 求解。在主程序中输入有关数据：初始点 $\boldsymbol{X}^{(0)}=[2,5,18]^{\mathrm{T}}$、设计变量的边界条件、6 个线性不等式约束的设计变量系数矩阵和常数向量，编制关于目标函数表达式的函数文件 wgcd_f 和约束函数文件 wgcd_g。

```
%蜗杆传动优化设计(蜗轮齿圈体积最小)
% 1 - 蜗杆传动运动和动力参数
K = 1.1;P1 = 6;n1 = 1450;i = 20;sigma_HP = 220;
disp'    ########   蜗杆传动运动和动力参数   ########
fprintf(          蜗杆传递功率          P1 = %3.4f kW \n' ,P1)
fprintf(              蜗杆转速          n1 = %3.4f r/min \n' ,n1)
fprintf(                传动比            i = %3.4f \n' ,i)
fprintf(              载荷系数            K = %3.4f \n' ,K)
fprintf(      蜗轮许用接触应力  sigma_HP = %3.4f MPa \n' ,sigma_HP)
eta = 1 - 0.035 * sqrt(i);T1 = 9550 * P1/n1;T2 = i * eta * T1;
fprintf(          蜗杆传动效率          eta = %3.4f \n' ,eta)
fprintf(          蜗杆传递转矩          T1 = %3.4f Nm \n' ,T1)
fprintf(          蜗轮传递转矩          T2 = %3.4f Nm \n' ,T2)
% 2 - 求解多维非线性约束优化问题
%设计变量的初始值
x0 = [2;5;18];
%设计变量的下限与上限
lb = [2;3;5];
ub = [3;5;16];
%线性不等式约束(g3 - g8)中设计变量的系数矩阵和常数项列阵
a = [ ];b = [ ];              %在约束函数文件中定义
%等式约束参数 Aeq,beq 定义为空矩阵符号"[ ]"
Aeq = [ ];beq = [ ];
[x,fval] = fmincon(@ wgcd_f,x0,a,b,Aeq,beq,lb,ub,@ wgcd_g);
```

```
disp'        * * * * * * * * *   蜗杆传动优化设计结果   * * * * * * * * *'
fprintf(              蜗杆头数              z1 = %3.4f \n' ,x(1))
fprintf(                  模数              m = %3.4f mm \n' ,x(2))
fprintf(          蜗杆直径系数              q = %3.4f \n' ,x(3))
fprintf(          蜗轮齿圈体积              V = %3.4f mm^3 \n' ,fval)
g = wgcd_g(x);
disp'      @@@@@@   蜗杆传动最优解的约束函数值   @@@@@@'
fprintf(    蜗轮齿面接触强度              g1 = %3.4f \n' ,g(1))
fprintf(          蜗杆弯曲刚度              g2 = %3.4f \n' ,g(2))
fprintf(        蜗杆头数最大值              g3 = %3.4f \n' ,g(3))
fprintf(        蜗杆头数最小值              g4 = %3.4f \n' ,g(4))
fprintf(            模数最大值              g5 = %3.4f \n' ,g(5))
fprintf(            模数最小值              g6 = %3.4f \n' ,g(6))
fprintf(        直径系数最大值              g7 = %3.4f \n' ,g(7))
fprintf(        直径系数最小值              g8 = %3.4f \n' ,g(8))
% 3 - 计算蜗杆传动常规设计计算参数的蜗轮齿圈体积
V0 = wgcd_f(x0);
fprintf( 设计初值的蜗轮齿圈体积    V0 = %3.4f mm^3 \n' ,V0)
% 4 - 计算主要几何尺寸
z1 = input( 确定蜗杆头数   z1 =' );
m = input( 确定模数(mm) m =' );
q = input( 确定蜗杆直径系数   q =' );
% 计算蜗杆传动优化设计凑整解的蜗轮齿圈体积
Vz = wgcd_f([z1 m q]);
fprintf( 优化设计凑整解的蜗轮齿圈体积    Vz = %3.4f mm^3 \n' ,Vz)
d1 = q * m;z2 = i * z1;d2 = z2 * m;          % 蜗杆和蜗轮分度圆直径(mm)
a = 0.5 * (d1 + d2);                          % 中心距(mm)
da1 = d1 + 2 * m;da2 = d2 + 2 * m;            % 蜗杆和蜗轮齿顶圆直径(mm)
df1 = d1 - 2.4 * m;                           % 蜗杆齿根圆直径(mm)
b1n = 2 * round((8 + 0.06 * z2) * m/2);       % 蜗杆螺纹部分长度最小值(mm)
gamma = atan(z1/q);                           %  蜗杆导程角(弧度)
Sn = 0.5 * pi * m * cos(gamma);               % 蜗杆分度圆法向齿厚(mm)
psi_e = 1.5;psi_b = 0.75;                     % 齿宽系数和外圆系数
b2m = round(psi_b * da1);                     % 蜗轮宽度(mm)
de2m = da2 + psi_e * m;                       % 蜗轮外圆直径(mm)
disp' &&&&&&&&&&   蜗杆传动主要几何尺寸   &&&&&&&&&&'
fprintf(              蜗杆分度圆直径        d1 = %3.4f mm \n' ,d1)
fprintf(              蜗轮分度圆直径        d2 = %3.4f mm \n' ,d2)
fprintf(                      中心距         a = %3.4f mm \n' ,a)
fprintf(              蜗杆齿顶圆直径       da1 = %3.4f mm \n' ,da1)
fprintf(              蜗轮齿顶圆直径       da2 = %3.4f mm \n' ,da2)
fprintf(              蜗杆齿根圆直径       df1 = %3.4f mm \n' ,df1)
fprintf(   蜗杆螺纹部分长度最小值        b1n = %3.4f mm \n' ,b1n)
fprintf(                  蜗杆导程角 gamma = %3.4f °\n' ,gamma/pi * 180)
fprintf(   蜗杆分度圆法向齿厚直径         Sn = %3.4f mm \n' ,Sn)
fprintf(                    蜗轮宽度       b2m = %3.4f mm \n' ,b2m)
```

```
fprintf('              蜗轮外圆直径    de2m = %3.4f mm \n' ,de2m)
```

计算结果：

```
    ########蜗杆传动运动和动力参数    ########
          蜗杆传递功率          P1 = 6.0000 kW
              蜗杆转速          n1 = 1450.0000 r/min
                传动比             i = 20.0000
              载荷系数            K = 1.1000
      蜗轮许用接触应力 sigma_HP = 220.0000 MPa
          蜗杆传动效率         eta = 0.8435
          蜗杆传递转矩          T1 = 39.5172 Nm
          蜗轮传递转矩          T2 = 666.6363 Nm

      ********蜗杆传动优化设计结果     ********
              蜗杆头数          z1 = 3.0000
                  模数            m = 5.0000 mm
          蜗杆直径系数            q = 7.7277
          蜗轮齿圈体积            V = 673921.3374 mm^3
    @@@@@@蜗杆传动最优解的约束函数值    @@@@@@
      蜗轮齿面接触强度          g1 = 0.0000
          蜗杆弯曲刚度          g2 = -76603674.8916
        蜗杆头数最大值          g3 = 0.0000
        蜗杆头数最小值          g4 = -1.0000
            模数最大值          g5 = 0.0000
            模数最小值          g6 = -2.0000
        直径系数最大值          g7 = -11.0000
        直径系数最小值          g8 = 0.0000

  设计初值的蜗轮齿圈体积    V0 = 920226.4844 mm^3

        确定蜗杆头数    z1 = 3
          确定模数(mm)  m = 5
    确定蜗杆直径系数    q = 8
  优化设计凑整解的蜗轮齿圈体积    Vz = 692787.4481 mm^3
    &&&&&&&&&& 蜗杆传动主要几何尺寸     &&&&&&&&&&
          蜗杆分度圆直径        d1 = 40.0000 mm
          蜗轮分度圆直径        d2 = 300.0000 mm
                  中心距          a = 170.0000 mm
          蜗杆齿顶圆直径       da1 = 50.0000 mm
          蜗轮齿顶圆直径       da2 = 310.0000 mm
          蜗杆齿根圆直径       df1 = 28.0000 mm
  蜗杆螺纹部分长度最小值       b1n = 58.0000 mm
              蜗杆导程角  gamma = 20.5560 °
  蜗杆分度圆法向齿厚直径        Sn = 7.3539 mm
                蜗轮宽度       b2m = 38.0000 mm
```

蜗轮外圆直径　de2m = 317.5000 mm

```
% 蜗杆传动优化设计的目标函数
function f = wgcd_f(x);
i = 20;psi_e = 1.5;psi_b = 0.75;                    % 按照 z1 = 2、3 取系数
a1 = pi * psi_b * x(2)^3 * (x(3) + 2)/4;
a2 = (i * x(1) + psi_e + 2)^2;
a3 = (i * x(1) - 4.4)^2;
f = a1 * (a2 - a3);

% 蜗杆传动优化设计的约束函数
function[g,geq] = wgcd_g(x);
K = 1.1;P1 = 6;n1 = 1450;i = 20;sigma_HP = 220;
eta = 1 - 0.035 * sqrt(i);T1 = 9550 * P1/n1;T2 = i * eta * T1;
g(1) = K * T2 * (15150/(i * x(1) * sigma_HP))^2 - x(2)^3 * x(3);
g2_1 = 0.729 * i^3 * x(1)^3 * sqrt((2 * T1/(x(2) * x(3)))^2 + (2 * T2 * tan(pi/9)/(i * x(1) * x
(2)))^2);
g2_2 = 157.5 * pi * x(2)^2 * x(3) * (x(3) - 2.4)^4;
g(2) = g2_1 - g2_2;
g(3) = x(1) - 3;g(4) = 2 - x(1);
g(5) = x(2) - 5;g(6) = 3 - x(2);
g(7) = x(2) - 16;g(8) = 5 - x(2);
geq = [];
```

2. 优化方法与结果分析

调用优化工具箱函数 fmincon 进行迭代计算得到

$$\boldsymbol{X}^* = [x_1^*, x_2^*, x_3^*]^{\mathrm{T}} = [z_1^*, m^*, q^*]^{\mathrm{T}} = [3.0000, 5.0000, 7.7277]^{\mathrm{T}}$$

$$V_{\min} = f(\boldsymbol{X}^*) = 673921.3374\ \mathrm{mm}^3$$

经检验，极小点 $\boldsymbol{X}^*$ 在蜗轮齿圈齿面接触强度约束条件 $g_1(\boldsymbol{X})$ 和边界约束条件 $g_3(\boldsymbol{X})$、$g_5(\boldsymbol{X})$ 和 $g_8(\boldsymbol{X})$ 的交集上。

对优化结果进行圆整，取蜗杆头数 $z_1 = 3$，模数 $m = 5$ mm，按照设计规范取直径系数 $q = 8$，则蜗轮齿圈体积 $V = 692787.4481\ \mathrm{mm}^3$。经过检验，凑整解在可行域内。

该实例的常规设计计算结果是：蜗杆头数 $z_1 = 2$，模数 $m = 5$ mm，直径系数 $q = 18$，蜗轮齿圈体积是 $V_0 = 920226.4844\ \mathrm{mm}^3$。

蜗杆传动优化设计凑整解的蜗轮齿圈体积 $V = 692787.4481\ \mathrm{mm}^3$，大约是常规设计计算结果的 75%，可见优化设计获得满意的结果。其主要原因是在充分发挥蜗杆传动能力的条件下，增加了蜗杆的头数，降低了蜗杆直径系数，使得蜗杆直径降低较多；虽然蜗轮直径有所增加，但是它的齿宽随着蜗杆直径的降低而得以大幅降低，所以整个蜗轮齿圈的体积明显减小。

13.7　螺旋传动的设计计算

螺旋传动是利用螺杆和螺母的啮合来传递动力和运动的机械传动，主要用于将旋转运动

转换成直线运动，将转矩转换成推力。按工作特点，螺旋传动用的螺旋分为传力螺旋（以传递动力为主，它用较小的转矩产生较大的轴向推力，要求自锁）、传导螺旋（以传递运动为主，常要求具有高的运动精度）和调整螺旋（用于调整并固定零件或部件之间的相对位置，要求自锁）。按螺纹间摩擦性质，螺旋传动可分为滑动螺旋传动和滚动螺旋传动。滑动螺旋传动又可分为普通滑动螺旋传动和静压螺旋传动。普通滑动螺旋传动通常采用梯形螺纹（应用最广）和锯齿形螺纹（用于单面受力），矩形螺纹由于工艺性较差、强度较低等原因应用很少。

螺旋传动的结构主要是指螺杆、螺母的固定和支承的结构形式。螺旋传动的工作刚度与精度等和支承结构有直接关系，当螺杆短而粗且垂直布置时，如起重及加压装置的传力螺旋，可以利用螺母本身作为支承。当螺杆细长且水平布置时，如机床的传导螺旋（丝杠）等，应在螺杆两端或中间附加支承，以提高螺杆的工作刚度。此外，对于轴向尺寸较大的螺杆，应采用对接的组合结构代替整体结构，以减少制造工艺上的困难。螺母的结构有整体螺母、组合螺母和剖分螺母等形式。整体螺母结构简单，但由磨损产生的轴向间隙不能补偿，只适合在精度要求较低的螺旋中使用。对于经常双向传动的传导螺旋，为了消除轴向间隙和补偿旋合螺纹的磨损，避免反向传动时的空行程，常采用组合螺母或剖分螺母。

滑动螺旋工作时，主要承受转矩及轴向拉力（或压力）的作用，同时在螺杆和螺母的旋合螺纹间有较大的相对滑动，其失效形式主要是螺纹磨损。因此，滑动螺旋的基本尺寸（即螺杆直径与螺母高度），通常是根据耐磨性条件确定的。对于受力较大的传力螺旋，还应校核螺杆危险截面以及螺母螺纹牙的强度，以防止发生塑性变形或断裂；对于要求自锁的螺杆应校核其自锁性；对于精密的传导螺旋应校核螺杆的刚度（螺杆的直径应根据刚度条件确定），以免受力后由于螺距的变化引起传动精度降低；对于长径比很大的螺杆，应校核其稳定性，以防止螺杆受压后失稳；对于高速的长螺杆还应校核其临界转速，以防止产生过度的横向振动等。

13.7.1　螺旋传动设计计算主要内容

普通滑动螺旋传动设计计算的主要内容是：耐磨性计算、螺杆的强度计算、螺母螺纹牙的强度计算、自锁条件计算和螺杆的稳定性计算等。

1. 耐磨性计算

滑动螺旋的磨损与螺纹工作面上的压力、滑动速度、螺纹表面粗糙度以及润滑状态等因素有关。其中最主要的是螺纹工作面上的压力，压力越大螺旋副间越容易形成过度磨损。因此，滑动螺旋的耐磨性计算，主要是限制螺纹工作面上的工作应力 p 小于材料的许用应力 $[p]$。

如图 13-7 所示，假设作用于螺杆的轴向力为 Q(N)，螺纹的承压面积（指螺纹工作表面投影到垂直于轴向力的平面上的面积）为 A(mm^2)，螺纹中径为 d_2(D_2)，螺纹工作高度为 h(mm)，螺纹螺距为 P(mm)，螺母高度为 H(mm)，螺纹工作圈数为 $u = H/P$。则螺纹工作面上的耐磨性条件校核公式

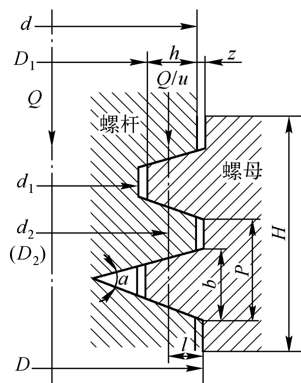


图 13-7　螺旋传动参数尺寸和受力分析

$$p=\frac{Q}{A}=\frac{Q}{\pi d_2 hu}=\frac{QP}{\pi d_2 hH}\leqslant[p](\mathrm{MPa}) \tag{13-38}$$

令螺母高度系数 $\varphi=H/d_2$，一般 $\varphi=1.2\sim3.5$。对于整体螺母，由于磨损后不能调整间隙，为使受力分布比较均匀，螺纹工作圈数不宜过多，故取 $\varphi=1.2\sim2.5$；对于剖分螺母和兼作支承的螺母，可取 $\varphi=2.5\sim3.5$；只有传动精度较高，载荷较大，要求工作寿命较长时，才允许取 $\varphi=4$。

将螺母高度 $H=\varphi d_2$ 代入式（13-38）整理后，得到耐磨性条件设计公式

$$d_2\geqslant\sqrt{\frac{QP}{\pi h\varphi[p]}}(\mathrm{mm}) \tag{13-39}$$

式中，对于矩形和梯形螺纹的螺纹工作高度 $h=0.5P$；［p］是材料的许用应力。

根据式（13-39）算得螺纹中径 d_2 后，应按国家标准规范选取相应的公称直径 d 及螺距 P。螺纹工作圈数 u 不宜超过 10 圈。

2. 螺旋副自锁条件计算

螺纹几何参数确定后，对于有自锁性要求的螺旋副，还应校核螺旋副是否满足自锁条件

$$\gamma\leqslant\rho_{\mathrm{v}}=\mathrm{atan}f_{\mathrm{v}}=\mathrm{atan}\,\frac{f}{\cos\beta} \tag{13-40}$$

式中，γ 是螺纹导程角；f_{v} 是螺旋副的当量摩擦因数；ρ_{v} 是当量摩擦角；β 是螺纹牙型斜角，对于梯形螺纹 $\beta=15°$，锯齿形螺纹工作面 $\beta=15°$，非工作面 $\beta=1.5°$；f 是材料摩擦因数。

3. 螺杆的强度计算

受力较大的螺杆需进行强度计算。螺杆工作时承受轴向力和转矩的共同作用，根据第四强度理论求出危险截面的组合应力 σ_{e}，其强度条件为

$$\sigma_{\mathrm{e}}=\sqrt{\sigma^2+3\tau^2}=\sqrt{\left(\frac{Q}{A}\right)^2+3\left(\frac{T_1}{W_{\mathrm{T}}}\right)^2}=\frac{1}{A}\sqrt{Q^2+3\left(\frac{T_1}{d_1}\right)^2}\leqslant[\sigma](\mathrm{MPa}) \tag{13-41}$$

式中，螺杆的螺纹小径 d_1，单位为 mm；螺纹段危险截面面积 $A=\frac{\pi d_1^2}{4}$，单位为 mm^2；螺纹段抗扭截面系数 $W_{\mathrm{T}}=\pi d_1^3/16=Ad_1/4$，单位为 mm^3；螺杆所受转矩（即螺旋副的摩擦力矩）$T_1=\frac{Q\tan(\lambda+\rho_{\mathrm{v}})d_2}{2}$，单位为 N·mm；螺杆材料的许用应力［$\sigma$］，单位为 MPa。

4. 螺母螺纹牙的强度计算

螺纹牙多发生剪切和挤压破坏，一般螺母的材料强度低于螺杆，故只需校核螺母螺纹牙的强度。

（1）抗剪强度条件　如图 13-8 所示，如果将一圈螺纹沿螺母的螺纹大径 D 处展开，则可看作宽度为 πD 的悬臂梁。假设螺母每圈螺纹所承受的平均压力为 Q/u，并作用在以螺纹中径 D_2 为直径的圆周上，则螺纹牙危险截面 $a-a$ 的抗剪强度条件为

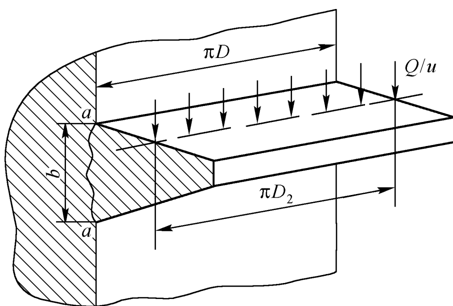


图 13-8　螺母螺纹牙的强度计算

$$\tau=\frac{Q}{\pi Dbu}\leqslant[\tau](\text{MPa}) \tag{13-42}$$

式中，螺母材料的许用切应力是 $[\tau]$。

（2）抗弯强度条件　螺纹牙危险截面 $a-a$ 的抗弯强度条件为

$$\sigma_{\text{b}}=\frac{6Ql}{\pi Db^2u}\leqslant[\sigma]_{\text{b}}(\text{MPa}) \tag{13-43}$$

式中，螺纹牙根部的厚度 b，单位为 mm，对于矩形螺纹 $b=0.5P$，对于梯形螺纹 $b=0.65P$，对于 30°锯齿形螺纹，$b=0.75P$，P 为螺纹螺距；弯曲力臂 $l=(D-D_2)$，单位为 mm；螺母材料的许用弯曲应力为 $[\sigma]_{\text{b}}$。

当螺杆和螺母的材料相同（如钢制螺旋副）时，由于螺杆的小径 d_1 小于螺母螺纹的大径 D，故应校核螺杆螺纹牙的强度。此时，式（13-43）中的 D 应改为 d_1。

5. 螺杆的稳定性计算

对于长径比大的受压螺杆，当轴向压力 Q 大于某一临界值时，螺杆就会突然发生侧向弯曲而丧失其稳定性。因此，螺杆承受的轴向力 Q 必须小于临界载荷 Q_{c} 时的稳定性系数即

$$S_{\text{sc}}=\frac{Q_{\text{c}}}{Q}\geqslant S_{\text{s}} \tag{13-44}$$

式中，螺杆稳定性安全系数 S_{s}，对于传力螺旋（如起重螺杆等）$S_{\text{s}}=3.5\sim5.0$，对于传导螺旋 $S_{\text{s}}=2.5\sim4.0$，对于精密螺杆或水平螺杆 $S_s>4.0$。

螺杆的临界载荷 Q_{c} 根据螺杆的柔度 λ_{s} 值的大小选用不同的公式计算

$$\lambda_{\text{s}}=\frac{\mu L}{i} \tag{13-45}$$

式中，螺杆长度系数 $\mu=2.0$（对于螺旋起重器的螺杆，可以按照一端固定，一端自由）；L 是螺杆的工作长度，单位为 mm，若螺杆两端有支承时，取两支点间的距离作为工作长度；若螺杆一端以螺母支承时，则以螺母中部到另一端支点的距离，作为工作长度；i 为螺杆危险截面的惯性半径，单位为 mm，若螺杆的危险截面面积 $A=\pi d_1^2$，则

$$i=\sqrt{\frac{I}{A}}=\sqrt{\frac{\pi d_1^4/64}{\pi d_1^2/4}}=\frac{d_1}{4}(\text{mm}) \tag{13-46}$$

式中，螺杆危险截面的惯性矩 $I=\pi d_1^4/64$，单位为 mm^4。

1）螺杆的柔度 $\lambda_{\text{s}}\geqslant90$ 时，临界载荷 Q_{c} 可按欧拉公式计算

$$Q_{\text{c}}=\frac{\pi^2EI}{(\mu l)^2} \tag{13-47}$$

式中，钢制螺杆的拉压弹性模量 $E=2.06\times10^5$ MPa。

2）$40\leqslant\lambda_{\text{s}}<90$ 时，对于未淬火钢，取临界载荷

$$Q_{\text{c}}=\frac{340}{1+0.00013\lambda_{\text{s}}^2}\times\frac{\pi d_1^2}{4}(\text{N}) \tag{13-48}$$

对于淬火钢，取临界载荷

$$Q_{\text{c}}=\frac{480}{1+0.0002\lambda_{\text{s}}^2}\times\frac{\pi d_1^2}{4} \tag{13-49}$$

3）$\lambda_{\text{s}}<40$ 时，可以不进行稳定性校核。

13.7.2 螺旋起重器设计计算实例

例 13-8 设计一个螺旋起重器，最大起重量 $Q=30000\ \text{N}$，最大起重高度 $F=180\ \text{mm}$。螺杆采用 45 钢调质，屈服极限 $\sigma_s=355\ \text{MPa}$，强度极限 $\sigma_b=600\ \text{MPa}$；由于该螺旋传动的工作速度低，螺母采用铝青铜 ZCuAl10Fe3，许用应力 $[p]=22\ \text{MPa}$。

1. 按照螺旋副耐磨性条件计算螺杆中径 d_2

螺旋起重器的螺母是整体式，取高度系数 $\varphi=2$，根据式（13-39）有

$$d_2 \geqslant \sqrt{\frac{QP}{\pi h\varphi[p]}}=\sqrt{\frac{2Q}{\pi\varphi[p]}}=\sqrt{\frac{2\times30000}{2\pi\times22}}=20.8341\ \text{mm}$$

按照技术规范，取螺杆的公称直径 $d=28\ \text{mm}$，螺距 $P=3\ \text{mm}$，中径 $d_2=26.5\ \text{mm}$，小径 $d_1=24.5\ \text{mm}$；螺母大径 $D=28.5\ \text{mm}$。

2. 验算螺旋副的自锁性能

螺杆是单线螺纹，螺旋线数 $n=1$，螺纹导程角

$$\gamma=\text{atan}\frac{nP}{\pi d_2}=\text{atan}\frac{1\times3}{26.5\pi}=2.0638$$

钢螺杆与铸造铝青铜螺母组合的螺旋副摩擦因数 $f=0.09$，根据式（13-40）计算当量摩擦角

$$\rho_v=\text{atan}\frac{f}{\cos\beta}=\text{atan}\frac{0.09}{\cos15^\circ}=5.3232$$

可见 $\gamma<\rho_v$，该螺旋副满足自锁条件。

3. 校核螺杆的强度

螺杆工作时所受螺旋副的摩擦力矩

$$T_1=\frac{Q\tan(\gamma+\rho_v)d_2}{2}=\frac{30000\times26.5\tan(2.0638^\circ+5.3232^\circ)}{2}=51533.9788\ \text{N}\cdot\text{mm}$$

螺杆螺纹段危险截面面积 $A=\pi d_1^2/4=26.5^2\pi/4=471.4352\ \text{mm}^2$，螺杆材料的许用拉伸应力 $[\sigma]=\sigma_s/4=355/4=88.75\ \text{MPa}$。根据式（13-41）计算螺杆危险截面的组合应力 σ_e

$$\sigma_e=\frac{1}{A}\sqrt{Q^2+3\left(\frac{T_1}{d_1}\right)^2}=\frac{1}{471.4352}\sqrt{30000^2+3\left(\frac{51533.9788}{26.5}\right)^2}=64.1030\ \text{MPa}<[\sigma]$$

可见，螺杆满足组合强度条件。

4. 校核螺母螺纹牙强度

选取螺母牙旋合圈数 $u=10$，梯形螺纹牙根部厚度 $b=0.65P=0.65\times3=1.95\ \text{mm}$；铸造铝青铜螺母材料的许用切应力 $[\tau]=35\ \text{MPa}$。根据式（13-42），螺母螺纹牙危险截面的切应力为

$$\tau=\frac{Q}{\pi Dbu}=\frac{30000}{28.5\times1.95\times10\pi}=17.1827\ \text{MPa}\leqslant[\tau]$$

铸造铝青铜螺母材料的许用弯曲应力 $[\sigma]_b=55\ \text{MPa}$，弯曲力臂 $l=(D-D_2)/2=$

(28.5 − 26.5)/2 = 1 mm。根据式（13–43），螺纹牙危险截面的弯曲应力为

$$\sigma_{\mathrm{b}}=\frac{6Ql}{\pi Db^2u}=\frac{6\times 30000\times 1}{28.5\times 1.95^2\times 10\pi}=52.8699\ \mathrm{MPa}\leqslant[\sigma]_{\mathrm{b}}$$

可见，螺母牙满足抗剪和抗弯强度条件。

5. 校核螺杆稳定性

对于螺旋起重器的螺杆，按照一端固定，一端自由，取长度系数 $\mu=2.0$；根据结构设计，螺杆的最大工作长度 $L=253$ mm；螺杆危险截面的惯性半径 $i=d_1/4=24.5/4=6.125$ mm。根据式（13–45）计算柔度

$$\lambda_{\mathrm{s}}=\frac{\mu L}{i}=\frac{2.00\times 253}{6.125}=82.6122$$

由于 $40\leqslant\lambda_{\mathrm{s}}<90$，对于调质（未淬火）钢螺杆，按照式（13–48）计算临界载荷

$$Q_c=\frac{340A}{1+0.00013\lambda_{\mathrm{s}}^2}=\frac{340\times 471.4352}{1+0.0013\times 82.6122^2}=95684.1740\ \mathrm{N}$$

对于起重螺杆取稳定性安全系数 $S_{\mathrm{s}}=3.5\sim 5.0$，按照式（13–44）计算螺的工作稳定性系数

$$S_{\mathrm{sc}}=\frac{Q_{\mathrm{c}}}{Q}=\frac{95684.1740}{30000}=3.1895<S_{\mathrm{s}}$$

可见，螺杆不满足工作稳定性，应该适当增大螺杆直径，或缩短螺杆的工作长度。

13.7.3　M 文件和运算结果

```
%螺旋起重器设计计算
%已知条件
Q = 30000;                      %起重量(N)
Hmax = 180;                     % 最大起重高度
du = 180/pi;hd = pi/180;
fprintf(     螺旋起重器的最大起重量      Q = %3.4f N \n'  ,Q);
fprintf(     螺旋起重器的最大起重高度 Hmax = %3.4f mm \n'  ,Hmax);
RCL = input( 螺杆热处理方式(淬火 - CHG,未淬火 - TZG):' );
if RCL ==' CHG'
    disp'       蜗杆采用淬火钢 ;
elseif RCL ==' TZG'
    disp'       蜗杆采用调质钢 ;
end
disp''
% 1 - 按照螺旋副耐磨性条件计算螺杆直径
sigma_s = 355;sigma_b = 600;          %螺杆的屈服极限和抗拉强度(45 钢)
fprintf(     螺杆材料强度极限 sigma_b = %3.4f MPa \n'  ,sigma_b);
p_y = 22;                              %钢螺杆 - 铸造铝青铜螺母组合的许用挤压应力(低速)
```

```
phi =2.0;                                   %整体螺母的高度系数
d2_j = sqrt(2 * Q/(pi * phi * p_y));  %  螺杆的计算直径
fprintf('        螺杆的计算直径计算值       d2_j = %3.4f mm \n' ,d2_j);
d = input('        确定螺杆的公称直径(mm)  d =' );
P = input('        确定螺杆的螺距(mm)        P =' );
d2 = input('        确定螺杆的中径(mm)     d2 =' );
d1 = input('        确定螺杆的小径(mm)     d1 =' );
Dm = input('        确定螺母的大径(mm)   Dm =' );
disp''
% 2 - 校核螺旋副自锁条件
n =1;                                       %单头螺纹
gamma = atan(n * P/pi/d2);            %  螺纹导程角
fprintf('              螺旋副导程角             gamma = %3.4f °\n' ,gamma * du);
f =0.09;                                    %钢螺杆 - 铸造铝青铜螺母组合的摩擦因数
beta =15;                                   %梯形螺纹牙型斜角
rho_v = atan(f/cos(beta * hd));         %  螺旋副当量摩擦角
fprintf('              螺旋副当量摩擦角       rho_v = %3.4f °\n' ,rho_v * du);
if gamma < = rho_v
      disp('                          螺旋副满足自锁条件' )
else
      disp('                          螺旋副不满足自锁条件' )
end
disp''
% 3 - 校核螺杆组合强度
T1 = Q * tan(gamma + rho_v) * d2/2;                       %螺杆螺旋副的摩擦力矩
A = pi * d1^2/4;Wt = pi * d1^3/16;                         %螺杆的危险截面面积和抗扭截面系数
sigma_e = sqrt(Q^2 +3 * (T1/d1)^2)/A;                    %  螺杆危险截面的当量应力
sigma_p_g = sigma_s/4;                                     %钢螺杆的许用拉伸应力
fprintf('        螺杆螺旋副的摩擦力矩              T1 = %3.4f Nmm \n' ,T1);
fprintf('        螺杆危险截面面积                   A = %3.4f mm^2 \n' ,A);
fprintf('        螺杆抗扭截面系数                  Wt = %3.4f mm^3 \n' ,Wt);
fprintf('        螺杆危险截面的当量应力   sigma_e = %3.4f MPa \n' ,sigma_e);
fprintf('        螺杆的许用拉伸应力      sigma_p_g = %3.4f MPa \n' ,sigma_p_g);
if sigma_e < = sigma_p_g
      disp('                          螺杆满足组合强度条件' )
else
      disp('                          螺杆不满足组合强度条件' )
end
disp''
% 4 - 校核螺母螺纹牙强度
% 4 -1 螺母螺纹牙抗剪强度
b =0.65 * P;                                  %螺母螺纹牙根部厚度
u =10;                                        %螺母螺纹牙旋合圈数
```

```
tau_p = 35;                          % 青铜螺母许用剪切应力
tau = Q/(pi * Dm * b * u);           % 螺母螺纹牙根部剪切应力
fprintf('    螺母螺纹牙根部厚度                    b = %3.4f mm \n' ,b);
fprintf('    螺母螺纹牙旋合圈数                    u = %3.4f 圈 \n' ,u);
fprintf('    螺母许用剪切应力              tau_p = %3.4f MPa \n' ,tau_p);
fprintf('    螺母螺纹牙根部剪切应力          tau = %3.4f MPa \n' ,tau);
if tau < = tau_p
    disp('          螺母螺纹牙根部满足抗剪强度条件')
else
    disp('          螺母螺纹牙根部不满足抗剪强度条件')
end
disp''
% 4 - 2 螺母螺纹牙弯曲强度
l = (Dm - d2)/2;                              % 螺母螺纹牙根部弯曲力臂
sigma_b_m = 55;                               % 青铜螺母螺纹牙根部许用弯曲应力
sigma_b_w = 6 * Q * l/(pi * Dm * b^2 * u);    % 螺母螺纹牙根部弯曲应力
fprintf('   螺母螺纹牙根部弯曲力臂                l = %3.4f mm \n' ,l);
fprintf('   螺母螺纹牙根部许用弯曲应力   sigma_b_m = %3.4f MPa \n' ,sigma_b_m);
fprintf('   螺母螺纹牙根部弯曲应力       sigma_b_w = %3.4f MPa \n' ,sigma_b_w);
if sigma_b_w < = sigma_b_m
    disp('          螺母螺纹牙根部满足抗弯强度条件')
else
    disp('          螺母螺纹牙根部不满足抗弯强度条件')
end
disp''
% 5 - 校核螺杆稳定性
Lm = 253;
fprintf('    螺杆最大工作高度        Lm = %3.4f mm \n' ,Lm);
mu = 2;                                        % 螺旋起重器视为一端固定一端自由
lambda = 4 * mu * Lm/d1;                       % 螺杆柔度系数
fprintf('    螺杆柔度系数        lambda = %3.4f \n' ,lambda);
E = 2.06 * 1e5;                                % 钢的拉压弹性模量(MPa)
I = pi * d1^4/64;                              % 螺杆危险截面的惯性矩(mm^4)
if lambda < 40
    disp' 不必对螺杆进行稳定性校核
elseif lambda >= 90
    Qc = pi^2 * E * I/(mu * Lm)^2;
else
    if RCL == ' CHG'
        Qc = 340 * A/(1 + 0.00013 * lambda^2);
    elseif RCL == ' TZG'
        Qc = 480 * A/(1 + 0.0002 * lambda^2);
    end
```

```
end
fprintf('        螺杆稳定临界载荷          Qc = %3.4f N \n',Qc);
Ssc = Qc/Q;
fprintf('        螺杆工作稳定系数          Ssc = %3.4f \n',Ssc);
Ss = 3.5;
if Ssc >= Ss
    disp('                  螺杆满足稳定性条件')
else
    disp('                  螺杆不满足稳定性条件')
end
```

计算结果：

```
     ********螺旋起重器设计计算结果    ********

    螺旋起重器的最大起重量                 Q = 30000.0000 N
    螺旋起重器的最大起重高度            Hmax = 180.0000 mm
    螺杆热处理方式(淬火 - CHG,未淬火 - TZG):TZG
      蜗杆采用调质钢
    螺杆材料强度极限                 sigma_b = 600.0000 MPa

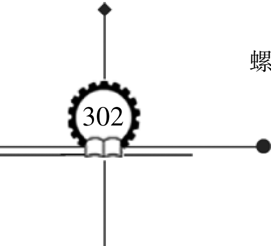
    螺杆的计算直径计算值                d2_j = 20.8341 mm
      确定螺杆的公称直径(mm)              d = 28
      确定螺杆的螺距(mm)                  P = 3
      确定螺杆的中径(mm)                 d2 = 26.5
      确定螺杆的小径(mm)                 d1 = 24.5
      确定螺母的大径(mm)                 Dm = 28.5

        螺旋副导程角                 gamma = 2.0638 °
        螺旋副当量摩擦角             rho_v = 5.3232 °
                螺旋副满足自锁条件

    螺杆螺旋副的摩擦力矩                  T1 = 51533.9788 Nmm
    螺杆危险截面面积                       A = 471.4352 mm^2
    螺杆抗扭截面系数                      Wt = 2887.5409 mm^3
    螺杆危险截面的当量应力           sigma_e = 64.1030 MPa
    螺杆的许用拉伸应力             sigma_p_g = 88.7500 MPa
                  螺杆满足组合强度条件

    螺母螺纹牙根部厚度                     b = 1.9500 mm
    螺母螺纹牙旋合圈数                     u = 10.0000 圈
    螺母许用剪切应力                   tau_p = 35.0000 MPa
    螺母螺纹牙根部剪切应力               tau = 17.1827 MPa
            螺母螺纹牙根部满足抗剪强度条件

螺母螺纹牙根部弯曲力臂                     l = 1.0000 mm
```



螺母螺纹牙根部许用弯曲应力　sigma_b_m = 55.0000 MPa
螺母螺纹牙根部弯曲应力　sigma_b_w = 52.8699 MPa
螺母螺纹牙根部满足抗弯强度条件

螺杆最大工作高度　Lm = 253.0000 mm
螺杆柔度系数　lambda = 82.6122
螺杆稳定临界载荷　Qc = 95684.1740 N
螺杆工作稳定系数　Ssc = 3.1895
螺杆不满足稳定性条件

第 14 章　轴系设计计算和分析

轴系（shaft system）由轴（axis）、轴承（bearing）和安装于轴上的传动件（transmission parts）、密封件（sealing parts）及定位组件（locate parts）组成。如图 14-1 所示。其主要功能是支撑旋转零件，传递转矩和运动。

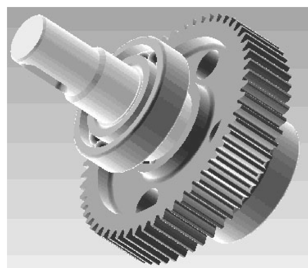


图 14-1　轴系部件

14.1　轴系部件设计计算

轴系设计计算主要包括：运动和动力参数计算、挠性传动（V 带传动或滚子链传动）设计计算、齿轮传动设计、转轴设计计算和滚动轴承工作寿命计算等内容。

例 14-1　设计带式运输机传动装置（图 14-2）中的输出轴轴系。电动机 1 通过 V 带传动 2 和单级斜齿圆柱齿轮减速器 3，以及联轴器 4，驱动卷筒和运输带运转。工作条件：运输带的工作拉力 $F=2000$ N，工作速度 $v=1.5$ m/s，卷筒直径 $D=250$ mm，单向连续运转，载荷有振动；两班制工作，3 年大修，使用期 10 年；小批量生产；运输带速度允许误差为 ±5%。

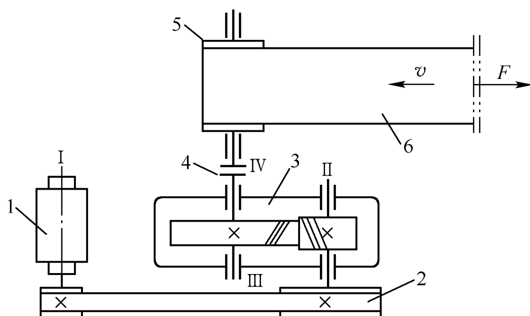


图 14-2　带式运输机传动方案

1—电动机　2—V 带传动　3—单级斜齿圆柱齿轮减速器　4—联轴器　5—卷筒　6—运输带

设计计算过程依据参考文献［1］。

14.1.1　机械传动装置的运动和动力参数计算

（1）机械传动效率　V 带传动 $\eta_1=0.97$，8 级精度的一般齿轮传动（油润滑）$\eta_2=0.97$，滚动轴承（油润滑）：$\eta_3=0.99$（球），$\eta_3=0.98$（滚子），联轴器 $\eta_4=0.99$。传动装置总效率

$$\eta=\eta_1\eta_2\eta_3^2\eta_4=0.97\times0.97\times0.98^2\times0.99=0.895$$

（2）运输带所需的功率

$$P_W=\frac{F_v}{1000}=\frac{2000\times1.5}{1000}=3.0\,\text{kW}$$

（3）确定电动机功率

$$P_d=\frac{P_W}{\eta}=\frac{3.0}{0.895}=3.353\,\text{kW}$$

（4）确定电动机转速　根据所需电动机功率，选用同步转速 1000 r/min 的 Y 系列三相异步电动机 Y132M1－6（额定功率 4 kW）。

（5）总传动比及其分配　滚筒转速与总传动比

$$n_W=\frac{60000\times v}{\pi D}=\frac{60000\times1.5}{200\pi}=114.592\,\text{r/min}$$

$$i=\frac{n_m}{n_W}=\frac{960}{114.592}=8.378$$

取单级圆柱齿轮传动比 $i_2=3.5$，则 V 带传动比 $i_1=\frac{i}{i_2}=\frac{8.378}{3.5}=2.394$。

（6）计算各轴运动和动力参数　各轴编号：电动机（小带轮）轴Ⅰ、小齿轮（输入）轴Ⅱ、大齿轮（输出）轴Ⅲ、滚筒轴Ⅳ。

① 各轴转速

$$n_1=n_m=960\,\text{r/min}$$

$$n_2=\frac{n_1}{i_1}=\frac{960}{2.394}=401.070\,\text{r/min}$$

$$n_3=\frac{n_2}{i_2}=\frac{401.070}{3.5}=114.592\,\text{r/min}$$

$$n_4=n_3=114.592\,\text{r/min}$$

② 各轴功率

$$P_1=P_d=3.353\,\text{kW}$$

$$P_2=\eta_1P_1=0.97\times3.353=3.253\,\text{kW}$$

$$P_3=\eta_2\eta_3P_2=0.97\times0.98\times3.253=3.092\,\text{kW}$$

$$P_4=\eta_3\eta_4P_3=0.98\times0.99\times3.092=3.00\,\text{kW}$$

③ 各轴转矩

$$T_1=9550\frac{P_1}{n_1}=9550\times\frac{3.353}{960}=33.355\,\text{N}\cdot\text{m}$$

$$T_2=9550\frac{P_2}{n_2}=9550\times\frac{3.253}{401.070}=77.454\,\text{N}\cdot\text{m}$$

$$T_3=9550\frac{P_3}{n_3}=9550\times\frac{3.092}{114.592}=257.698\text{ N}\cdot\text{m}$$

$$T_4=9550\frac{P_4}{n_4}=9550\times\frac{3.000}{114.592}=250.018\text{ N}\cdot\text{m}$$

计算得到的运动和动力参数见表14-1。

表14-1　传动装置的运动和动力参数

参　数	轴　号			
	电动机轴Ⅰ	轴Ⅱ	轴Ⅲ	轴Ⅳ
传动类型	V带传动		齿轮传动	联轴器
传动比 i	2.394		3.500	1
效率 η	0.97		0.97	0.99
转速 $n/\text{r}\cdot\text{min}^{-1}$	960	401.070	114.592	114.592
功率 P/kW	3.353	3.253	3.092	3.000
转矩 T/N·m	33.360	77.454	257.698	250.018

14.1.2　V带传动设计计算

根据表14-1中数据，带式输送机的V带传动的输入功率 $P_1=3.353$ kW，满载转速 $n_1=960$ r/min，传动比 $i=2.394$，两班制工作，要求传动中心距 $a_0\approx550$ mm。

1）确定计算功率 P_C 和选取V带类型　查参考文献［1］表7-14得工作情况系数 K_A，根据参考文献［1］式（7-15）有

$$P_C=K_AP=1.2\times3.353=4.024\text{ kW}$$

根据 P_C 和 n_1 从参考文献［1］图7-14中选用A型普通V带。

2）确定带轮基准直径 d_{d1} 和 d_{d2}。由参考文献［1］表7-2查得主动带轮允许的最小基准直径 $d_{d1\min}=75$ mm，再从该表带轮的基准直径系列中，取 $d_{d1}=100$ mm。

根据参考文献［1］式（7-17），计算从动带轮基准直径 d_{d2}

$$d_{d2}=i_1d_{d1}=2.394\times100=239.4\text{ mm}$$

查参考文献［1］表7-2，选取 $d_{d2}=250$ mm 符合带轮的基准直径系列要求。

3）验算带的速度 v。根据参考文献［1］式（7-16）

$$v=\frac{\pi d_{d1}n_1}{60\times1000}=\frac{\pi\times100\times960}{60\times1000}=5.027\text{ m/s}$$

带的速度在(5～25)m/s的范围之内，合适。

4）确定普通V带的基准长度 L_d 和传动中心距 a。根据参考文献［1］式（7-18）有

$$a_0=(0.7\sim2)(d_{d1}+d_{d2})=(0.7\sim2)\times(100+250)=(245\sim700)\text{ mm}$$

按照结构要求取中心距 $a_0=500$ mm，符合兼顾带传动绕转次数和结构尺寸因素的范围。

根据参考文献［1］式（7-19）计算带的初选长度

$$L_0 \approx 2a_0 + \frac{\pi}{2}(d_{d1} + d_{d2}) + \frac{(d_{d2} - d_{d1})^2}{4a_0}$$

$$= 2 \times 500 + \frac{\pi}{2}(100 + 250) + \frac{(250 - 100)^2}{4 \times 500} = 1542.844\ \text{mm}$$

根据参考文献［1］表 7-5，选带的基准长度 $L_d = 1600\ \text{mm}$。

根据参考文献［1］式（7-20）计算带的实际中心距 a

$$a \approx a_0 + \frac{L_d - L_0}{2} = 500 + \frac{1600 - 1543}{2} = 528.5\ \text{mm}$$

将计算结果四舍五入为 $a = 529\ \text{mm}$。

中心距也可按式 $a = a_1 + \sqrt{a_1^2 - a_2}$（其中，$a_1 = L_d/4 - \pi d_{d1}(i+1)/8$，$a_2 = d_{d1}^2(i-1)^2/8$）计算。

5）验算主动轮上的包角 α_1。根据参考文献［1］式（7-22）有

$$\alpha_1 = 180°\left(1 - \frac{d_{d2} - d_{d1}}{a\pi}\right) = 180°\left(1 - \frac{250 - 100}{529\pi}\right) = 164.902° > 120°$$

主动轮上的包角合适。

6）计算 V 带的根数 z。根据 A 型 V 带、$n_1 = 960\ \text{r/min}$ 和 $d_{d1} = 100\ \text{mm}$，查参考文献［1］表 7-8 得 $P_0 = 0.97\ \text{kW}$。

根据 A 型 V 带、$n_1 = 960\ \text{r/min}$ 和 $i = 2.294$，查参考文献［1］表 7-10 得 $\Delta P_0 = 0.11\ \text{kW}$。

根据 $\alpha = 165°$，查参考文献［1］表 7-12 得 $K_\alpha = 0.96$。

根据 $L_d = 1600\ \text{mm}$，查参考文献［1］表 7-13 得 $K_L = 0.99$。

将以上计算系数代入参考文献［1］式（7-21）有

$$z = \frac{P_C}{(P_0 + \Delta P_0)K_\alpha K_L} = \frac{4.023}{(0.97 + 0.11) \times 0.96 \times 0.99} = 3.92$$

取带的根数 $z = 4$ 根。

7）计算初拉力 F_0。根据 A 型 V 带，查参考文献［1］表 7-1 得 V 带每米长度质量 $q = 0.10\ \text{kg/m}$，代入参考文献［1］式（7-24）

$$F_0 = 500\frac{P_C}{vz}\left(\frac{2.5}{K_\alpha} - 1\right)qv^2 = 500 \times \frac{3.353}{5.027 \times 4}\left(\frac{2.5}{0.96} - 1\right) + 0.1 \times 5.027^2 = 136\ \text{N}$$

8）计算作用在带轮轴上的压力 F_Q。根据参考文献［1］式（7-25）有

$$F_Q = 2ZF_0\sin\frac{\alpha_1}{2} = 2 \times 4 \times 136 \times \sin\frac{165°}{2} = 1284\ \text{N}$$

9）进行带轮结构设计，确定技术要求，画出带轮工作图（略）。

14.1.3　圆柱齿轮传动设计计算

根据表 14-1 中数据，圆柱齿轮传动的主动齿轮传递功率 $P_1 = 3.253\ \text{kW}$，转矩 $T_1 = 77.454\ \text{N} \cdot \text{m}$，转速 $n_1 = 401\ \text{r/min}$，传动比 $i_{12} = 3.5$。

1）选择齿轮材料，并确定许用应力。由于传递功率和转速中等，载荷有轻微冲击，为使结构紧凑，采用硬齿面齿轮传动。大小齿轮都采用 45 钢，表面淬火，齿面硬度 45HRC。

由参考文献［1］图9-38和图9-39查出试验齿轮的疲劳极限，确定许用应力

$$\sigma_{\mathrm{Hlim1}}=\sigma_{\mathrm{Hlim2}}=1150\ \mathrm{MPa}$$

$$\sigma_{\mathrm{Flim1}}=\sigma_{\mathrm{Flim2}}=320\ \mathrm{MPa}$$

$$[\sigma_{\mathrm{H}}]=0.9\sigma_{\mathrm{Hlim1}}=0.9\times1150=1035\ \mathrm{MPa}$$

$$[\sigma_{\mathrm{F}}]=1.4\sigma_{\mathrm{Flim1}}=1.4\times320=448\ \mathrm{MPa}$$

2）选择齿轮传动的精度等级和设计参数。由于是带式运输机上用齿轮传动，转速不高，参照参考文献［1］表9-12，选择普通8级精度，要求齿面粗糙度 $R_a\leqslant3.2\sim6.3\ \mu\mathrm{m}$，采用范成法插齿或滚齿。

取小齿轮齿数 $z_1=18$，则 $z_2=i_{12}z_1=3.5\times18=63$。参考文献［1］表9-11选齿宽系数 $\psi_{\mathrm{d}}=0.65$。初选螺旋角 $\beta=10°$。

3）按轮齿弯曲强度计算模数。按参考文献［1］式（9-32）计算当量齿数

$$z_{\mathrm{V1}}=\frac{z_1}{\cos^3\beta}=\frac{18}{\cos^3 10°}=18.85$$

$$z_{\mathrm{V2}}=iz_{\mathrm{V1}}=3.5\times18.8=65.8$$

从参考文献［1］表9-10查出复合齿形系数 $Y_{\mathrm{SF1}}=4.43$，$Y_{\mathrm{SF2}}=3.88$。

根据较小冲击载荷、轴承对称布置和轴的刚度较大，取载荷系数 $K=1.4$。

按参考文献［1］式（9-53）计算模数（由于 $\sigma_{\mathrm{FP1}}=\sigma_{\mathrm{FP2}}$，而 $Y_{\mathrm{FS1}}>Y_{\mathrm{FS2}}$，将 Y_{FS1} 代入计算）

$$m_{\mathrm{n}}\geqslant A_{\mathrm{m}}\times\sqrt[3]{\frac{KT_1Y_{\mathrm{FS}}}{\psi_{\mathrm{d}}z_1^2\sigma_{\mathrm{FP}}}}=12.0\times\sqrt[3]{\frac{1.4\times32.361\times4.43}{0.65\times18^2\times448}}=1.53\ \mathrm{mm}$$

按参考文献［1］表9-1取标准值 $m_{\mathrm{n}}=2\ \mathrm{mm}$。

上式中，根据参考文献［1］表9-8选取的 $A_{\mathrm{m}}=12.0$，对应的螺旋角范围是 $15°<\beta\leqslant25°$。

4）协调设计参数。

① 计算中心距

$$a=\frac{m_{\mathrm{n}}(z_1+z_2)}{2\cos\beta}=\frac{2(18+63)}{2\cos10°}=82.250\ \mathrm{mm}$$

取 $a=85\ \mathrm{mm}$。

② 计算螺旋角

$$\beta=\mathrm{acos}\,\frac{m_{\mathrm{n}}(z_1+z_2)}{2a}=\mathrm{acos}\,\frac{2(18+63)}{2\times85}=17.647°(\text{右旋})$$

β 在 $8°\sim25°$的范围内，适用。

5）计算主要几何尺寸。

① 齿轮分度圆直径

$$d_1=\frac{m_{\mathrm{n}}z_1}{\cos\beta}=\frac{2\times18}{\cos17.647°}=37.778\ \mathrm{mm}$$

$$d_2=id_1=3.5\times37.778=132.222\ \mathrm{mm}$$

② 齿轮齿顶圆直径

$$d_{a1}=m_{\mathrm{n}}\left(\frac{z_1}{\cos\beta}+2h_{\mathrm{an}}^*\right)=2\times\left(\frac{18}{\cos17.647}+2\times1\right)=41.778\ \mathrm{mm}$$

$$d_{a2}=m_n\left(\frac{z_2}{\cos\beta}+2h_{an}^*\right)=2\times\left(\frac{63}{\cos17.647}+2\times1\right)=136.222\ \text{mm}$$

③ 齿轮齿根圆直径

$$d_{f1}=m_n\left(\frac{z_1}{\cos\beta}-2h_{an}^*-2c_n^*\right)=2\times\left(\frac{18}{\cos17.647^\circ}-2\times1-2\times0.25\right)=32.778\ \text{mm}$$

$$d_{f2}=m_n\left(\frac{z_2}{\cos\beta}-2h_{an}^*-2c_n^*\right)=2\times\left(\frac{63}{\cos17.647^\circ}-2\times1-2\times0.25\right)=127.222\ \text{mm}$$

齿宽为

$$b=\psi_d d_1=0.65\times37.778=24.556\ \text{mm}$$

圆整取 $b_2=26$ mm，$b_1=32$ mm（为了便于安装，通常取小齿轮的齿宽比大齿轮大 5 ~ 10 mm）。

6）校核齿面接触强度

根据参考文献［1］式（9–52），满足齿面接触强度所需要的小齿轮分度圆直径为

$$d_1\geqslant A_d\sqrt[3]{\frac{KT_1(u+1)}{\psi_d\sigma_{HP}^2u}}=733\sqrt[3]{\frac{1.4\times32.361\times(3.5+1)}{0.65\times1150^2\times3.5}}=32.058\ \text{mm}$$

它小于设计结果 $d_1=37.778$ mm，故齿面接触强度足够。

7）齿轮圆周速度

$$v=\frac{\pi d_1n_1}{6\times10^4}=\frac{\pi37.778\times960}{60000}=1.899\ \text{m/s}$$

对照参考文献［1］表 9–12，满足斜齿圆柱齿轮传动 8 级精度要求的 $v\leqslant10$ m/s。

8）进行齿轮结构设计，确定技术要求，画出齿轮工作图（略）。

14.1.4 轴的设计计算

根据表 14 – 1 中数据，减速器输出轴的传递功率 $P_2=3.092$ kW，转速 $n_2=114.592$ r/min。

1）估算轴的最小直径。轴的材料选用 45 钢并经调质处理（210HBW），按照参考文献［1］表 13–2 选取 $C=112$，则

$$d\geqslant C\sqrt[3]{\frac{P_2}{n_2}}=112\times\sqrt[3]{\frac{3.092}{114.592}}=33.59\ \text{mm}$$

考虑到该轴外伸段上面开有键槽对轴的削弱，将轴径加大 3% ~ 5% 后，参照参考文献［1］中的表 14–3 弹性柱联轴器，取标准直径 $d=35$ mm（符合弹性柱销联轴器要求的轴径规范）。

根据电动机驱动和工作机械特性，按照参考文献［1］表 13–1 选取载荷系数 $K=1.4$，计算转矩为 $KT=K\times9550P/n=1.4\times9550\times3.092/114.592=360.759$ N · m，小于弹性柱销联轴器 HL3 的公称转矩 630 N · m，而且工作转速也小于弹性柱联轴器 HL3 的许用转速 5000 r/min，联轴器满足要求。

弹性柱联轴器 HL3 的 Y 型轴孔长度为 82 mm。因此，该轴外伸段直径 $d=36\ \text{mm}>35$ mm，长度 $L=82$ mm。

2）轴的结构设计。选用 30209 轴承（宽度 20.75 mm，支承偏距 18.6 mm，安装轴肩直

径 52 mm）。输出轴的结构设计简图如图 14-3 所示。

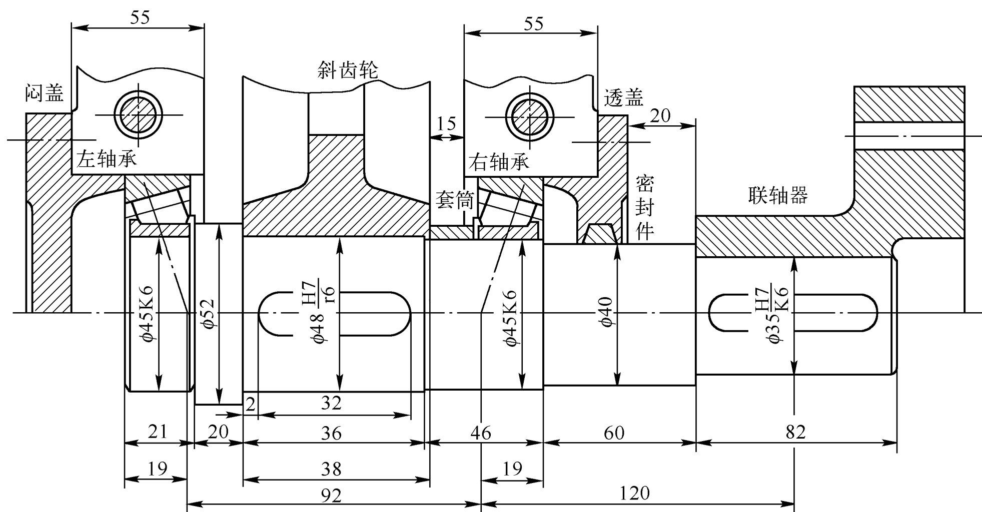


图 14-3　输出轴的结构设计简图

3）齿轮受力分析。

① 斜齿圆柱齿轮的圆周力

$$F_t = \frac{2T_1}{d_1} = \frac{2 \times 77.454 \times 1000}{37.778} = 4100\ \text{N}$$

② 径向力

$$F_r = \frac{F_t \tan\alpha_n}{\cos\beta} = \frac{4100 \times \tan 20^\circ}{\cos 17.647^\circ} = 1566\ \text{N}$$

③ 轴向力（沿轴线指向外伸段）

$$F_a = F_t \tan\beta = 4100 \times \tan 17.647^\circ = 1304\ \text{N}$$

4）作轴的计算简图，计算支座反力和内力弯矩。取轴承宽度中间为支承点 A 与 B。将齿轮作用力分解到水平面（圆周力 F_t 使轴在 H 面上产生弯曲变形）和垂直面（径向力 F_r 和轴向力 F_a 使轴在 V 面上产生弯曲变形）上。

① 求水平面支反力 R_{AH} 和 R_{BH}，画出水平弯矩图。由平衡条件

$$\sum M_B = R_{AH}(L_1 + L_2) - F_t L_2 = 0$$

解得

$$R_{AH} = \frac{F_t \times 46}{46 + 46} = \frac{4100 \times 46}{92} = 2050\ \text{N}$$

由平衡条件

$$\sum Y = R_{AH} + R_{BH} - F_t = 0$$

解得

$$R_{BH} = F_t - R_{AH} = 4100 - 2050 = 2050\ \text{N}$$

水平弯矩图 C 处弯矩（在集中力作用处，弯矩图发生转折）

$$M_{\mathrm{CH}}=R_{\mathrm{AH}}L_1=2050\times46=94300\ \mathrm{N\cdot mm}$$

② 求垂直面支反力 R_{AV} 和 R_{BV}，画出垂直弯矩图。由平衡条件

$$\sum M_{\mathrm{B}}=R_{\mathrm{AV}}(L_1+L_2)-F_{\mathrm{a}}\frac{d_2}{2}-F_{\mathrm{r}}L_2=0$$

解得

$$R_{\mathrm{AV}}=\frac{F_{\mathrm{r}}L_2-F_{\mathrm{a}}\frac{d_2}{2}}{L_1+L_2}=\frac{1566\times46-1304\times\frac{132.222}{2}}{46+46}=-154\ \mathrm{N\cdot mm}\text{(方向向下)}$$

由平衡条件

$$\sum Y=R_{\mathrm{AV}}+R_{\mathrm{BV}}-F_{\mathrm{r}}=0$$

解得
$$R_{\mathrm{BV}}=F_{\mathrm{r}}-R_{\mathrm{AV}}=1566-(-154)=1720\ \mathrm{N\cdot mm}$$

垂直弯矩图 C 处左侧弯矩（向下的外力在轴的截面上产生负的弯矩）

$$M'_{\mathrm{CV}}=R_{\mathrm{AV}}L_1=-154\times46=-7084\ \mathrm{N\cdot mm}$$

垂直弯矩图 C 处右侧弯矩

$$M''_{\mathrm{CV}}=R_{\mathrm{BV}}L_2=1720\times46=79120\ \mathrm{N\cdot mm}$$

在集中力偶作用处，弯矩图发生突变，其突变值

$$M''_{\mathrm{CV}}+M'_{\mathrm{CV}}=79120+|-7084|=86204\ \mathrm{N\cdot mm}$$

集中力偶

$$F_{\mathrm{a}}\frac{d_2}{2}=1304\times\frac{132.222}{2}=86209\ \mathrm{N\cdot mm}$$

考虑到计算中有舍入误差的影响，弯矩突变值等于集中力偶的大小，因此验证了垂直面的内力计算过程是正确的。

③ 计算合成弯矩，画出合成弯矩图。C 左侧处合成弯矩

$$M'_{\mathrm{C}}=\sqrt{M_{\mathrm{CH}}^2+M'^2_{\mathrm{CV}}}=\sqrt{94300^2+(-7084)}=94566\ \mathrm{N\cdot mm}$$

C 右侧处合成弯矩

$$M''_{\mathrm{C}}=\sqrt{M_{\mathrm{CH}}^2+M''^2_{\mathrm{CV}}}=\sqrt{94300^2+79120^2}=123095\ \mathrm{N\cdot mm}$$

5）在轴的 DC 段上的转矩是 $T_2=257685\ \mathrm{N\cdot mm}$，画出转矩图。

6）计算危险截面的当量弯矩。由合成弯矩图和转矩可见，C 处的内力最大，按照参考文献［1］式（13-3）计算该处的当量弯矩（对一般的转轴可视其转矩为脉动循环性质，取转矩校正系数 $\alpha=0.6$）

$$M_{\mathrm{e}}=\sqrt{M^2+(\alpha T_2)^2}=\sqrt{123095^2+(0.6\times257685)^2}=197628\ \mathrm{N\cdot mm}$$

输出轴的强度计算如图 14-4 所示。

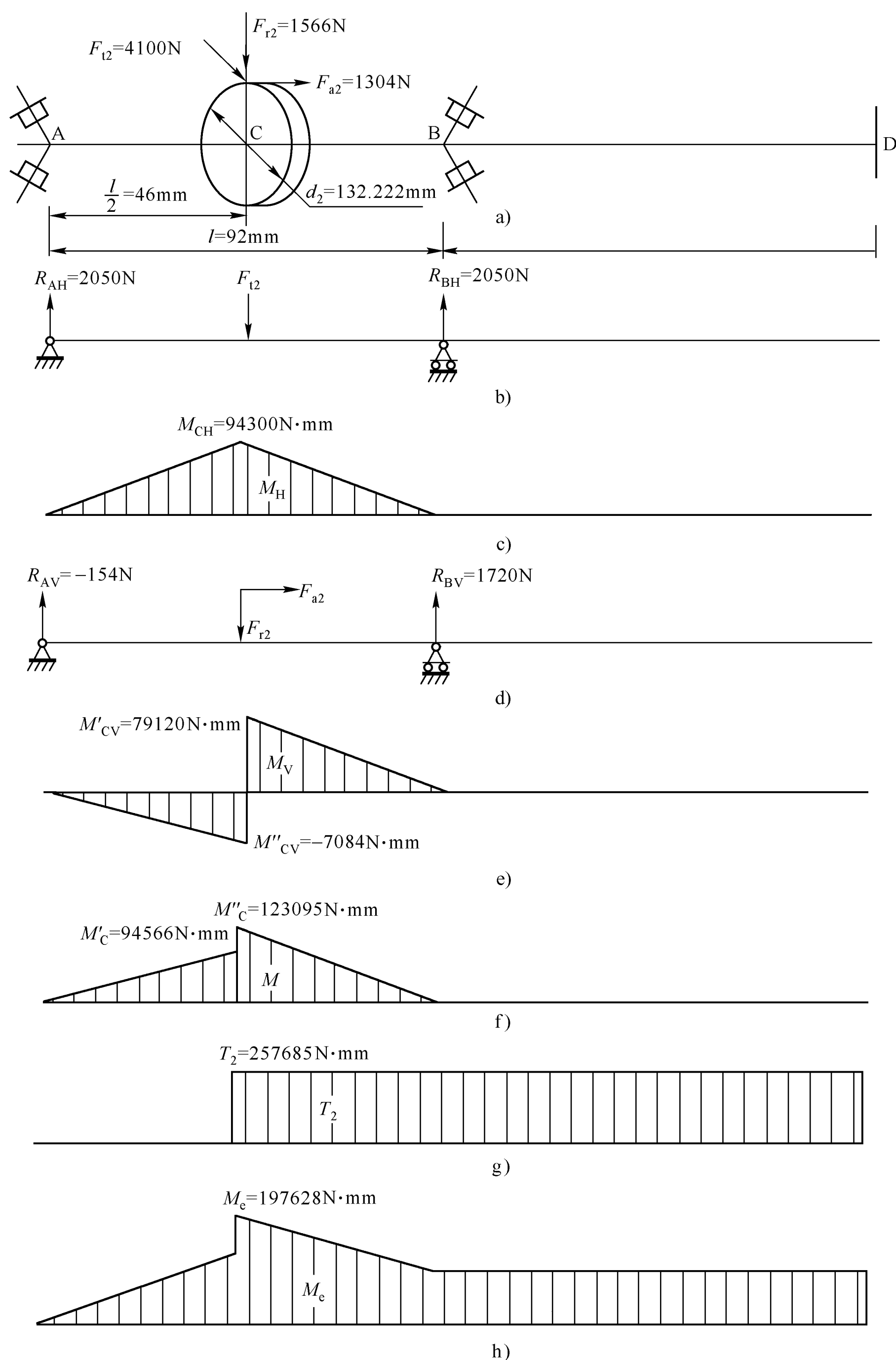


图 14-4　输出轴的强度计算

7）按照弯曲和扭转组合强度计算 C 处需要的轴径。45 钢调质后抗拉强度由参考文献［1］表 13-1 和表 13-4 得到对应的对称循环下材料的许用弯曲应力 $[\sigma_{-1}]_W = 60\ \text{MPa}$，按照参考文献［1］中的式（13-5）有

$$d=\sqrt[3]{\frac{M_e}{0.1[\sigma_{-1}]_W}}=\sqrt[3]{\frac{197628}{0.1\times 60}}=32.055\ \text{mm}$$

由于 C 处有一个键槽，故将直径增大 5%，即 C 处需要的轴径

$$d_e=d\times 1.05=32.055\times 1.05=33.66\ \text{mm}$$

小于该处实际直径 $d_C=48$ mm，故轴的弯扭组合强度足够。

14.1.5　滚动轴承的工作寿命计算

1. 圆锥滚子轴承（30209）工作寿命计算

（1）选择轴承类型，初选轴承型号　由于斜齿圆柱齿轮传递轴向力，一般选用角接触向心轴承和圆锥滚子轴承。本例根据输出轴的轴颈直径 $d=45$ mm，初选圆锥滚子轴承 30209，查参考文献[1]表 12-16：轴承的额定动载荷 $C_r=67800$ N、额定静载荷 $C_{0r}=83500$N、判断参数 $e=0.40$、轴向载荷系数 $Y=1.5$。为了计算方便，将轴承 A 编号为 1，轴承 B 编号为 2。

（2）计算轴承的径向载荷

$$F_{r1}=\sqrt{R_{AH}^2+R_{AV}^2}=\sqrt{2050^2+(-154)^2}=2056\ \text{N}$$

$$F_{r2}=\sqrt{R_{BH}^2+R_{BV}^2}=\sqrt{2050^2+1720^2}=2676\ \text{N}$$

（3）计算轴承的轴向载荷　内部轴向力计算

$$S_1=\frac{F_{r1}}{2Y}=\frac{2056}{2\times 1.5}=685\ \text{N}$$

$$S_2=\frac{F_{r2}}{2Y}=\frac{2676}{2\times 1.5}=892\ \text{N}$$

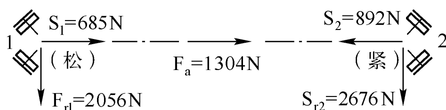


图 14-5　圆锥滚子轴承的轴向力分析

由于是正装结构，而且由轴系轴向力图（见图 14-5）有

$$F_a+S_1=1304+685=1989\ \text{N}>S_2=892\ \text{N}$$

所以，轴系总轴向力指向轴承 2 被“压紧”，轴承 1 被“放松”，则两轴承的轴向载荷为

$$F_{a2}=F_a+S_1=1989\ \text{N}$$

$$F_{a1}=S_1=685\ \text{N}$$

（4）计算轴承的当量动载荷

① 由于 $\frac{F_{a1}}{F_{r1}}=\frac{685}{2056}=0.333<e=0.40$，查参考文献[1]表 13-10 得 $X_1=1.00$，$Y_1=0.00$。

② 由于 $\frac{F_{a2}}{F_{r2}}=\frac{1989}{2676}=0.743>e=0.40$，查参考文献[1]表 13-10 得 $X_2=0.40$，$Y_2=1.50$。

因此
$$P_1=X_1F_{r1}+Y_1F_{a1}=1.00\times 2056+0.00\times 2676=2056\ \text{N}$$

$$P_2=X_2F_{r2}+Y_2F_{a2}=0.40\times 2676+1.50\times 1989=4054\ \text{N}$$

（5）计算轴承的工作寿命　由于两支承用相同的轴承，故按当量动载荷较大的轴承 2 计算。

滚子轴承的 $\varepsilon=10/3$，查参考文献[1]表 12-7 取温度系数 $f_T=1.0$，查参考文献[1]表 12-8 取冲击载荷系数 $f_P=1.5$，计算载荷较大轴承 2 的工作寿命

$$L_h=\frac{10^6}{60n}\left(\frac{f_TC_r}{f_PP}\right)^{\varepsilon}=\frac{10^6}{60\times 114.592}\left(\frac{1.0\times 67800}{1.5\times 4056}\right)^{\frac{10}{3}}=450343\ \text{h}$$

远大于 10 年工作时间（$16\times300\times10=48000$ h），可见选用 30209 轴承有足够工作寿命。

可以考虑重新选用 30106 轴承，以减少轴系结构尺寸，降低成本（计算略）。

2. 角接触球轴承（7009C）工作寿命计算

（1）选择轴承类型，初选轴承型号　由于斜齿圆柱齿轮传递轴向力，一般选用角接触向心轴承和圆锥滚子轴承（采用正装结构）。本例根据输出轴轴颈直径 $d=45$ mm，初选角接触球轴承 7009C，查参考文献[1]表 12-17：轴承的额定动载荷 $C_r=25800$ N、额定静载荷 $C_{0r}=20500$ N。轴承 A 编号 1（径向载荷 $F_{r1}=2056$ N），轴承 B 编号 2（径向载荷 $F_{r2}=2676$ N）。

（2）计算轴承的轴向载荷　内部轴向力计算

$$S_1=0.4F_{r1}=0.4\times2056=822\ \text{N}$$
$$S_2=0.4F_{r2}=0.4\times2676=1070\ \text{N}$$

由于是正装结构，而且由轴系轴向力图有

$$F_a+S_1=1304+822=2126\text{N}>S_2=1070\ \text{N}$$

所以，轴系总轴向力指向轴承 2 被“压紧”，轴承 1 被“放松”，则两轴承的轴向载荷为

$$F_{a2}=F_a+S_1=2126\ \text{N}$$
$$F_{a1}=S_1=822\ \text{N}$$

（3）确定判断参数

① 由于$\dfrac{F_{a1}}{C_{0r}}=\dfrac{822}{20500}=0.040$，查参考文献[1]表 13-10，$e_1=0.41$（线性插值）。

② 由于$\dfrac{F_{a2}}{C_{0r}}=\dfrac{2126}{20500}=0.104$，查参考文献[1]表 13-10，$e_2=0.47$（线性插值）。

（4）计算轴承的当量动载荷

① 由于$\dfrac{F_{a1}}{F_{r1}}=\dfrac{822}{2056}=0.40<e_1=0.41$，查参考文献[1]表 13-10 得 $X_1=1.00$，$Y_1=0$。

② 由于$\dfrac{F_{a2}}{F_{r2}}=\dfrac{2126}{2676}=0.79>e_2=0.47$，查参考文献[1]表 13-10 得 $X_2=0.44$，$Y_2=1.21$（线性插值）。

因此

$$P_1=X_1F_{r1}+Y_1F_{a1}=1.00\times2056+0.00\times822=2056\ \text{N}$$
$$P_2=X_2F_{r2}+Y_2F_{a2}=0.44\times2676+1.21\times2126=3750\ \text{N}$$

（5）计算轴承的工作寿命　由于两支承用相同的轴承，故按当量动载荷较大的轴承 2 计算。

球轴承的 $\varepsilon=3$，查参考文献[1]表 13-7 取温度系数 $f_T=1.0$，查参考文献[1]表 13-8 取冲击载荷系数 $f_P=1.5$，计算轴承工作寿命

$$L_h=\frac{10^6}{60n}\left(\frac{f_TC_r}{f_PP}\right)^{\varepsilon}=\frac{10^6}{60\times114.592}\left(\frac{1.0\times25800}{1.5\times3750}\right)^3=14034\ \text{h}<48000$$

可见选用 7009C 轴承的工作寿命不足，可以考虑重新选用承载能力较大的 7109C 轴承（计算略）。

3. 深沟球轴承（6209）工作寿命计算

（1）选择轴承类型，初选轴承型号　由于斜齿圆柱齿轮传递轴向力，一般选用角接触向心轴承和圆锥滚子轴承。本例载荷不大，根据轴颈直径 $d=45$ mm，初选深沟球轴承 6209，

查参考文献[1]表 12-15：轴承的额定动载荷 $C_r = 31500$ N、额定静载荷 $C_{0r} = 20500$ N。轴承 A 编号 1（径向载荷 $F_{r1} = 2056$ N），轴承 B 编号 2（径向载荷 $F_{r2} = 2676$ N）。

（2）确定判断参数　由于轴承 1 的径向载荷较大，且根据轴系结构分析，轴向外载荷 $F_a = 1305$ N 也作用在轴承 1，以它作为计算的依据。

由于 $F_a/C_{0r} = 1304/20500 = 0.064$，查参考文献[1]表 13-10，$e = 0.264$（线性插值）。

（3）计算轴承的当量动载荷　由于 $F_a/F_r = 1304/20500 = 0.487 > e_1 = 0.264$，查参考文献[1]表 13-10 得 $X = 0.56$，$Y = 1.64$（线性插值），因此

$$P = XF_R + YF_a = 0.56 \times 2676 + 1.64 \times 1304 = 3637 \text{ N}$$

（4）计算轴承的工作寿命

球轴承的 $\varepsilon = 3$，查参考文献[1]表 12-7 取温度系数 $f_T = 1.0$，查参考文献[1]表 12-8 取冲击载荷系数 $f_P = 1.5$，计算轴承工作寿命

$$L_h = \frac{10^6}{60n}\left(\frac{f_T C_r}{f_P P}\right)^\varepsilon = \frac{10^6}{60 \times 114.592}\left(\frac{1.0 \times 31500}{1.5 \times 3637}\right)^3 = 27998 \text{ h} < 48000$$

可见选用 6209C 轴承的工作寿命不足 10 年，可以考虑每 5 年更换一次轴承。

14.1.6　平键联接选用计算

输出轴传递的转矩 $T = 77454$ N · mm，对轴外伸段和轴头上的平键联接进行选用计算。

1. 轴外伸段上的平键联接

按照参考文献[1]表 15-1，根据轴径 $d = 35$ mm 选择公称尺寸 $b = 10$ mm，$h = 8$ mm 的 A 型平键，根据该段轴的长度 82 mm，选择键的长度为 70 mm。

按照参考文献[1]表 15-2，根据静联接和轻微冲击载荷，对于钢制弹性柱销联轴器，选择平键的许用应力 $[\sigma]_p = 110$ MPa，则它的挤压工作应力

$$\sigma_p = \frac{4T}{dhl} = \frac{4 \times 77454}{35 \times 8 \times (70 - 10)} = 18.4414 \text{ MPa} < [\sigma]_p$$

所以，该段轴上的平键联接满足强度条件。

2. 轴头上的平键联接

按照参考文献[1]表 15-1，根据轴径 $d = 48$ mm 选择公称尺寸 $b = 14$ mm，$h = 9$ mm 的 A 型平键，根据该段轴的长度 36 mm，选择键的长度为 32 mm。

按照参考文献[1]表 15-2，根据静联接和轻微冲击载荷，对于钢制斜齿圆柱齿轮，选择平键的许用应力 $[\sigma]_p = 110$ MPa，则它的挤压工作应力

$$\sigma_p = \frac{4T}{dhl} = \frac{4 \times 77454}{48 \times 9 \times (32 - 14)} = 39.8426 \text{ MPa} < [\sigma]_p$$

所以，该段轴上的平键联接满足强度条件。

14.1.7　M 文件和运算结果

传动装置的运动及动力装置的 M 文件如下所示。

```
% 1 - 传动装置的运动和动力参数计算(电动机 - V 带传动 - 齿轮传动 - 联轴器)
F = 2000;                                   % 运输带工作拉力(N)
V = 1.5;                                    % 运输带工作速度(m/s)
```

```
D = 250;                                     % 卷筒直径(mm)
disp'          ======已知条件 ======'
fprintf(        运输带工作拉力        F = %3.3f N\n' ,F)
fprintf(        运输带工作速度        V = %3.3f m/S\n' ,V)
fprintf(        工作机卷筒直径        D = %3.3f mm\n' ,D)
% 1、机械传动效率
eta1 = 0.97;                                 % V 带传动
eta2 = 0.97;                                 % 8 级精度的一般齿轮传动(油润滑)
eta3 = 0.98;                                 % 滚动轴承(滚子,油润滑)
eta4 = 0.99;                                 % 联轴器
etaz = eta1 * eta2 * eta3^2 * eta4;          % 传动装置总效率
% 2、工作机械所需的功率
Pw = F * V/1e3;
% 3、确定需要的电动机功率
Pd = Pw/etaz;
disp'          ******计算结果 ******'
fprintf(        传动装置总效率      etaz = %3.3f\n' ,etaz)
fprintf(      工作机械所需功率      Pw = %3.3f kW\n' ,Pw)
fprintf(        所需电动机功率      Pd = %3.3f kW\n' ,Pd)
% 4、确定电动机转速
disp'  根据需要电动机功率 Pd,选用同步转速 1000r/min 的电动机 Y132M1 -6(额定功率 4 kW')
nm = 960;                                % 满载转速(r/min)
% 5、总传动比及其分配
nw = 6e4 * V/(pi * D);                   % 卷筒转速(r/min)
i = nm/nw;                               % 总传动比
i2 = 3.5;                                % 选择齿轮传动比
i1 = i/i2;                               % V 带传动比
fprintf(            卷筒转速      nw = %3.3f r/min\n' ,nw)
fprintf(            总传动比      i = %3.3f\n' ,i)
fprintf(          V 带传动比      i1 = %3.3f\n' ,i1)
fprintf(          齿轮传动比      i2 = %3.3f\n' ,i2)
% 6、计算各轴运动和动力参数
% 各轴编号:电动机(小带轮)轴Ⅰ、小齿轮(输入)轴Ⅱ、大齿轮(输出)轴Ⅲ、滚筒轴Ⅳ
n1 = nm;n2 = n1/i1;n3 = n2/i2;n4 = n3;
fprintf(          电动机轴转速      n1 = %3.3f r/min\n' ,n1)
fprintf(      减速器输入轴转速      n2 = %3.3f r/min\n' ,n2)
fprintf(      减速器输出轴转速      n3 = %3.3f r/min\n' ,n3)
fprintf(            卷筒轴转速      n4 = %3.3f r/min\n' ,n4)
P1 = Pd;P2 = eta1 * P1;P3 = eta2 * eta3 * P2;P4 = eta3 * eta4 * P3;
fprintf(          电动机轴功率      P1 = %3.3f kW\n' ,P1)
fprintf(      减速器输入轴功率      P2 = %3.3f kW\n' ,P2)
fprintf(      减速器输出轴功率      P3 = %3.3f kW\n' ,P3)
fprintf(            卷筒轴功率      P4 = %3.3f kW\n' ,P4)
T1 = 9550 * P1/n1;T2 = 9550 * P2/n2;T3 = 9550 * P3/n3;T4 = 9550 * P4/n4;
fprintf(          电动机轴转矩      T1 = %3.3f N·m\n' ,T1)
```

```
fprintf('         减速器输入轴转矩     T2 = %3.3f N·m\n',T2)
fprintf('         减速器输出轴转矩     T3 = %3.3f N·m\n',T3)
fprintf('             卷筒轴转矩     T4 = %3.3f N·m\n',T4)
```

计算结果：

```
% 1-传动装置的运动和动力参数计算(电动机-V 带传动-齿轮传动-联轴器)
  运输带工作拉力      F = 2000.000 N
  运输带工作速度      V = 1.500 m/s
  工作机卷筒直径      D = 250.000 mm
    ****** 计算结果 ******
  传动装置总效率    etaz = 0.895
工作机械所需功率     Pw = 3.000 kW
  所需电动机功率     Pd = 3.353 kW
根据需要电动机功率 Pd,选用同步转速 1000r/min 的电动机 Y132M1-6(额定功率 4 kW)
        卷筒转速     nw = 114.592 r/min
        总传动比       i = 8.378
      V 带传动比      i1 = 2.394
      齿轮传动比      i2 = 3.500
    电动机轴转速      n1 = 960.000 r/min
减速器输入轴转速      n2 = 401.070 r/min
减速器输出轴转速      n3 = 114.592 r/min
      卷筒轴转速      n4 = 114.592 r/min
    电动机轴功率      P1 = 3.353 kW
减速器输入轴功率      P2 = 3.253 kW
减速器输出轴功率      P3 = 3.092 kW
      卷筒轴功率      P4 = 3.000 kW
    电动机轴转矩      T1 = 33.360 Nm
减速器输入轴转矩      T2 = 77.454 Nm
减速器输出轴转矩      T3 = 257.698 Nm
      卷筒轴转矩      T4 = 250.018 Nm
```

V 带传动设计的 M 文件如下所示。

```
% 2-V 带传动设计
P1 = 3.353;i = 2.394;n1 = 960;KA = 1.2;% 已知条件
disp('              ======已知条件 ======')
fprintf('              传递功率     P1 = %3.3f kW\n',P1)
fprintf('                传动比      i = %3.3f\n',i)
fprintf('            小带轮转速     n1 = %3.3f r/min\n',n1)
fprintf('              工况系数     KA = %3.3f  \n',KA)
disp('      ****** 计算结果 ******')
disp('   根据传递功率 P1 和小带轮转速 n1,选择 A 型带')
dd1 = 100;                          % 小带轮基准直径推荐值 dd1min = 100mm;
dd2 = dd1 * i;dd2 = 250;            % 选择大带轮基准直径系列值
fprintf('      小带轮基准直径     dd1 = %3.3f mm\n',dd1)
fprintf('      大带轮基准直径     dd2 = %3.3f mm\n',dd2)
v = pi * dd1 * n1/6e4;              % 带速范围 v = 5 ~ 25m/s
```

```
amin = 0.7 * (dd1 + dd2);amax = 2 * (dd1 + dd2);
a0 = 500;                              % 中心距范围 a0 = amin ~ amax
fprintf('        中心距最小值    amin = %3.3f mm\n',amin)
fprintf('        中心距最大值    amax = %3.3f mm\n',amax)
fprintf('          中心距初值      a0 = %3.3f mm\n',a0)
L0 = 2 * a0 + 0.5 * pi * dd1 * (i + 1) + 0.25 * dd1^2 * (i - 1)^2/a0;
Ld = 1600;                             % 带的基准长度 Ld(mm)
KL = 0.20639 * Ld^0.211806;            % 带的长度系数(查表 KL = 0.99)
fprintf('    带基准长度计算值      L0 = %3.3f mm\n',L0)
fprintf('    带基准长度系列值      Ld = %3.3f mm\n',Ld)
fprintf('          带长度系数      KL = %3.3f   \n',KL)
a1 = Ld/4 - pi * dd1 * (i + 1)/8;
a2 = dd1^2 * (i - 1)^2/8;
aj = a1 + sqrt(a1^2 - a2);             % 计算中心距 mm
a = round(aj);                         % 圆整中心距 a
alpha = 180 * (1 - dd1 * (i - 1)/a/pi);   % 要求小带轮包角 >= 120°
fprintf('              中心距       a = %3.3f mm\n',a)
fprintf('          小带轮包角   alpha = %3.3f °\n',alpha)
Kalf = alpha/(0.549636 * alpha + 80.395144); % 小带轮包角系数(查表 Kalf = 0.96)
fprintf('            包角系数    Kalf = %3.3f\n',Kalf)
P0 = 0.01738 * dd1 - 0.774138;         % 单根带额定功率(查表 P0 = 0.97)
DP0 = 0.001023 + 0.00012 * n1;       % 根据 A 型带和带速 >=2m 拟合功率增量(查表 DP0 =0.11)
zj = KA * P1/(P0 + DP0)/KL/Kalf;       % 计算带的根数
z = round(zj + 0.5);                   % 圆整带的根数
fprintf('      单根带额定功率      P0 = %3.3f kW\n',P0)
fprintf('          带功率增量     DP0 = %3.3f kW\n',DP0)
fprintf('       V 带计算根数       zj = %3.3f\n',zj)
fprintf('       V 带圆整根数        z = %3.3f\n',z)
q = 0.1;                                        % A 带每米长度质量(kg/m)
F0 = 500 * KA * P1 * (2.5/Kalf - 1)/v/z + q * v^2;  % 初拉力(N)
Q = 2 * z * F0 * sin(0.5 * alpha * pi/180);     % 压轴力(N)
fprintf('    A 带每米长度质量       q = %3.3f kg/m\n',q)
fprintf('              初拉力      F0 = %3.3f N\n',F0)
fprintf('              压轴力       Q = %3.3f N\n',Q)
```

计算结果：

```
======已知条件 ======
    传递功率     P1 = 3.353 kW
      传动比      i = 2.394
  小带轮转速     n1 = 960.000 r/min
    工况系数     KA = 1.200
******计算结果 ******
根据传递功率 P1 和小带轮转速 n1,选择 A 型带
  小带轮基准直径     dd1 = 100.000 mm
  大带轮基准直径     dd2 = 250.000 mm
    中心距最小值    amin = 245.000 mm
    中心距最大值    amax = 700.000 mm
```

```
      中心距初值        a0 = 500.000 mm
带基准长度计算值        L0 = 1542.844 mm
带基准长度系列值        Ld = 1600.000 mm
      带长度系数        KL = 0.985
          中心距         a = 529.000 mm
      小带轮包角     alpha = 164.902 °
        包角系数      Kalf = 0.964
  单根带额定功率        P0 = 0.964 kW
      带功率增量       DP0 = 0.116 kW
    V 带计算根数        zj = 3.923
    V 带圆整根数         z = 4.000
A 带每米长度质量         q = 0.100 kg/m
          初拉力        F0 = 161.913 N
          压轴力         Q = 1284.074 N

% 3 - 斜齿圆柱齿轮传动设计计算
%已知条件
f = 2000;                           %运输带工作拉力(N)
v = 1.5;                            %运输带工作速度(m/s)
d = 250;                            %滚筒直径(mm)
nu = 0.97;                          %斜齿圆柱齿轮传动效率
i = 3.5;                            %齿轮副传动比
hd = pi/180;                        %角度换算成弧度的系数
disp''
disp'          ==========已知条件 ==========';
fprintf('  输送带工作拉力    f = %3.0f N\n',f);
fprintf('  输送带工作速度    v = %3.2f m/s\n',v);
fprintf('          滚筒直径    d = %3.0f mm\n',d);
fprintf('      齿轮传动效率  nu = %3.2f\n',nu);
fprintf('      齿轮副传动比    i = %3.2f\n',i);

%采用硬齿面齿轮传动
p2 = f * v/1000;                    %大齿轮传递功率(kW)
n2 = 60 * v * 1e3/pi/d;             %大齿轮转速(r/min)
p1 = p2/nu;                         %小齿轮传递功率(kW)
n1 = i * n2;                        %小齿轮转速(r/min)
chm = 1500;                         %试验齿轮接触疲劳极限(MPa)
cfm = 460;                          % 试验齿轮弯曲疲劳极限(MPa)
chp = 0.9 * chm;                    % 试验齿轮许用接触应力(MPa)
cfp = 1.4 * cfm;                    % 试验齿轮许用弯曲应力(单向传动)
z1 = 18;                            %小齿轮齿数(选取)
z2 = round(i * z1);                 %大齿轮齿数
u = z2/z1;                          %齿数比
pd = 0.675;                         %齿宽系数
bat0 = 10;                          %螺旋角初值
t1 = 9550 * p1/n1;                  %小齿轮传递转矩(N·m)
zv1 = z1/(cos(bat0 * hd))^3;        %小齿轮当量齿数
```

```
zv2 = u * zv1;                    % 大齿轮当量齿数
ysf1 = 4.43;                      %  小齿轮齿形系数
ysf2 = 3.88;                      %  大齿轮齿形系数
ifysf1 >= ysf2
    ysf = ysf1;                   %  确定计算齿形系数
else
    ysf = ysf2;
end
k = 1.6;                          % 载荷系数
am = 12.0;                        % 齿根弯曲强度计算系数(螺旋角范围 15° ~25°)
mnj = am * (k * t1 * ysf/pd/z1^2/cfp)^(1/3);  %  按照齿根弯曲强度计算模数(mm)
ifmnj < = 2
    mn = 2;                       % 确定标准模数(mm)
else
    mn = round(mnj + 0.5)
end
aj = mn * z1 * (1 + u)/2/cos(bat0 * hd);
a = round(aj/5) * 5 + 5;          % 确定中心距(mm)
bat = acos(0.5 * mn * z1 * (1 + u)/a)/hd;% 确定螺旋角
disp''
disp'           ==========齿轮传动设计计算  ==========';
fprintf('          大齿轮传递功率    p2 = %3.3f kW\n',p2);
fprintf('              大齿轮转速    n2 = %3.3f r/min\n',n2);
fprintf('          小齿轮传递功率    p1 = %3.3f kW\n',p1);
fprintf('              小齿轮转速    n1 = %3.3f r/min\n',n1);
fprintf('    试验齿轮许用接触应力   chp = %3.3f MPa\n',chp);
fprintf('    试验齿轮许用弯曲应力   cfp = %3.3f MPa\n',cfp);
fprintf('              小齿轮齿数    z1 = %3.0f\n',z1);
fprintf('              大齿轮齿数    z2 = %3.0f\n',z2);
fprintf('                齿宽系数    pd = %3.3f\n',pd);
fprintf('                  齿数比     u = %3.3f\n',u);
fprintf('          小齿轮传递转矩    t1 = %3.3f Nm\n',t1);
fprintf('          小齿轮当量齿数   zv1 = %3.3f\n',zv1);
fprintf('          大齿轮当量齿数   zv2 = %3.3f\n',zv2);
fprintf('          小齿轮齿形系数  ysf1 = %3.3f\n',ysf1);
fprintf('          大齿轮齿形系数  ysf2 = %3.3f\n',ysf2);
fprintf('                齿轮模数    mn = %3.2f mm\n',mn);
fprintf('                  中心距     a = %3.2f mm\n',a);
fprintf('                  螺旋角   bat = %3.3f °\n',bat);
if bat > 15 & bat < = 25
    '     @@@螺旋角在 15° ~25°范围内,计算系数选择合适
else
    '     @@@螺旋角超出 15° ~25°范围,重新选择计算系数
end
d1 = mn * z1/cos(bat * hd);                % 计算分度圆直径(mm)
d2 = u * d1;
han = 1.0;                                 % 正常齿制
```

```
cn = 0.25;
da1 = d1 + 2 * han * mn;                    % 计算齿顶圆直径(mm)
da2 = d2 + 2 * han * mn;
df1 = d1 - 2 * han * mn - 2 * cn * mn;      % 计算齿根圆直径(mm)
df2 = d2 - 2 * han * mn - 2 * cn * mn;
b = pd * d1;
b2 = round(b/2) * 2;                        % 确定齿宽(mm)
b1 = b2 + 6;
ad = 733;                                   % 齿面接触强度计算系数(螺旋角范围 15° ~25°)
d1j = ad * (k * t1 * (u + 1)/pd/chp^2/u)^(1/3); % 按照齿面接触强度计算分度圆直径(mm)
if d1j < = d1
    '        @@@满足齿面接触强度要求
else
    '        @@@不满足齿面接触强度要求,需要修改设计参数
end
v = pi * d1 * n1/6e4;                       % 齿轮圆周速度(m/s)
fprintf('          小齿轮分度圆直径      d1 = %3.3f mm\n' ,d1);
fprintf('                齿顶圆直径     da1 = %3.3f mm\n' ,da1);
fprintf('                齿根圆直径     df1 = %3.3f mm\n' ,df1);
fprintf('                      齿宽      b1 = %3.0f mm\n' ,b1);
fprintf('          大齿轮分度圆直径      d2 = %3.3f mm\n' ,d2);
fprintf('                齿顶圆直径     da2 = %3.3f mm\n' ,da2);
fprintf('                齿根圆直径     df2 = %3.3f mm\n' ,df2);
fprintf('                      齿宽      b2 = %3.0f mm\n' ,b2);
```

计算结果:

```
        ==========已知条件 ==========
         运输带工作拉力     f = 2000 N
         运输带工作速度     v = 1.50 m/s
               滚筒直径     d = 250 mm
           齿轮传动效率    nu = 0.97
           齿轮副传动比     i = 3.50

          ==========齿轮传动设计计算 ==========
         大齿轮传递功率    p2 = 3.000 kW
             大齿轮转速    n2 = 114.592 r/min
         小齿轮传递功率    p1 = 3.093 kW
             小齿轮转速    n1 = 401.070 r/min
   试验齿轮许用接触应力   chp = 1350.000 MPa
   试验齿轮许用弯曲应力   cfp = 644.000 MPa
             小齿轮齿数    z1 = 18
             大齿轮齿数    z2 = 63
               齿宽系数    pd = 0.675
                 齿数比     u = 3.500
         小齿轮传递转矩    t1 = 73.643 Nm
         小齿轮当量齿数   zv1 = 18.846
         大齿轮当量齿数   zv2 = 65.961
```

```
        小齿轮齿形系数  ysf1 = 4.430
        大齿轮齿形系数  ysf2 = 3.880
              齿轮模数   mn = 2.00 mm
                中心距    a = 85.00 mm
                螺旋角  bat = 17.647 °

@@@螺旋角在 15°~25°范围内,计算系数选择合适

   @@@满足齿面接触强度要求

      小齿轮分度圆直径    d1 = 37.778 mm
            齿顶圆直径   da1 = 41.778 mm
            齿根圆直径   df1 = 32.778 mm
                  齿宽    b1 = 32 mm
      大齿轮分度圆直径    d2 = 132.222 mm
            齿顶圆直径   da2 = 136.222 mm
            齿根圆直径   df2 = 127.222 mm
                  齿宽    b2 = 26 mm

% 4-轴的设计计算(弯扭组合)
T1 = 77.454;T2 = 257.698;                 % 两个齿轮传递的转矩
p2 = 3.092;n2 = 114.592;                  % 大齿轮传递功率和转速
d1 = 37.778;beta = 17.647;hd = pi/180;    % 小齿轮分度圆直径和螺旋角
d2 = 132.222;c = 112;                     % 大齿轮分度圆直径、45 钢材料系数
d0 = c * (p2/n2)^(1/3) * 1.05;            % 按扭转估算轴径,并考虑键槽影响
d = round(d0/5) * 5;
alpha = 20;                               % 齿轮分度圆压力角
Ft = round(2000 * T1/d1);                 % 齿轮传递的圆周力(N)
Fr = round(Ft * tan(alpha * hd)/cos(beta * hd));    % 齿轮传递的径向力(N)
Fa = round(Ft * tan(beta * hd));          % 齿轮传递的轴向力(N)
L1 = 46;                                  % 齿宽中心线到 A 轴承支座反力作用点的距离(mm)
L2 = 46;                                  % 齿宽中心线到 B 轴承支座反力作用点的距离(mm)
Fa_h = round(Ft * L2/(L1 + L2));          % A 支座 H 面反力(N)
Fb_h = Ft - Fa_h;                         % B 支座 H 面反力(N)
Mc_h = Fa_h * L1;                         % H 面弯矩(N·mm)
Fa_v = round((Fr * L2 - Fa * d2/2)/(L1 + L2));      % A 支座 V 面反力(N)
Fb_v = Fr - Fa_v;                         % B 支座 V 面反力(N)
Mc_v1 = Fa_v * L1;                        % V 面弯矩 1(N·mm)
Mc_v2 = Fb_v * L2;                        % V 面弯矩 2(N·mm)
Mc12 = Mc_v1 + abs(Mc_v1);                % V 面弯矩突变值(N·mm)
Mcm = round(Fa * d2/2);                   % 在截面 C 的集中力偶矩(N·mm)
Mc1 = round(sqrt(Mc_h^2 + Mc_v1^2));      % 合成弯矩 1(N·mm)
Mc2 = round(sqrt(Mc_h^2 + Mc_v2^2));      % 合成弯矩 1(N·mm)
if Mc1 >= Mc2                             % 确定最大弯矩(N·mm)
    Mc = Mc1;
else
```

```
        Mc = Mc2;
    end
    T2 = round(9.55 * 1e6 * p2/n2);                  % 大齿轮传递转矩(N·mm)
    Me = round(sqrt(Mc^2 + (0.6 * T2)^2));           %  当量弯矩(N·mm)
    cp = 60;                                         % 对称循环许用弯曲应力(MPa)
    de = (Me/0.1/cp)^(1/3) * 1.05;                   % 按弯扭组合所需轴径,并考虑键槽影响
    dc = 48;                                         % 危险截面 C 的实际直径(mm)
    disp'            ==========轴弯扭组合强度计算  ==========' ;
    fprintf(                轴的最小直径        d = %3.3f mm\n' ,d);
    fprintf(            齿轮传递的圆周力        Ft = %3.3f N\n' ,Ft);
    fprintf(                      径向力        Fr = %3.3f N\n' ,Fr);
    fprintf(                      轴向力        Fa = %3.3f N\n' ,Fa);
    fprintf(          H 面 - A 支座反力       Fa_h = %3.3f N\n' ,Fa_h);
    fprintf(                  B 支座反力      Fb_h = %3.3f N\n' ,Fb_h);
    fprintf(                        弯矩      Mc_h = %3.3f N·mm\n' ,Mc_h);
    fprintf(          V 面 - A 支座反力       Fa_v = %3.3f N\n' ,Fa_v);
    fprintf(                  B 支座反力      Fb_v = %3.3f N\n' ,Fb_v);
    fprintf(                      弯矩 1     Mc_v1 = %3.3f N·mm\n' ,Mc_v1);
    fprintf(                      弯矩 2     Mc_v2 = %3.3f N·mm\n' ,Mc_v2);
    fprintf(                  弯矩突变值      Mc12 = %3.3f N·mm\n' ,Mc12);
    fprintf(                  集中力偶值       Mcm = %3.3f N·mm\n' ,Mcm);
    fprintf(                  合成弯矩 1       Mc1 = %3.3f N·mm\n' ,Mc1);
    fprintf(                  合成弯矩 2       Mc2 = %3.3f N·mm\n' ,Mc2);
    fprintf(              大齿轮传递转矩        T2 = %3.3f N·mm\n' ,T2);
    fprintf(        轴危险截面的当量弯矩        Me = %3.2f N·mm\n' ,Me);
    fprintf(      弯扭组合强度需要的轴径        de = %3.2f mm\n' ,de);
    fprintf(        轴危险截面的实际直径        dc = %3.2f mm\n' ,dc);if de < = dc
        '        @@@满足轴的弯扭组合强度要求
    else
        '        @@@不满足轴的弯扭组合强度要求,需要加大轴的直径
    end
```

计算结果：

```
        ==========轴弯扭组合强度计算  ==========
                轴的最小直径        d = 35.000 mm
            齿轮传递的圆周力        Ft = 4100.000 N
                      径向力        Fr = 1566.000 N
                      轴向力        Fa = 1304.000 N
          H 面 - A 支座反力       Fa_h = 2050.000 N
                  B 支座反力      Fb_h = 2050.000 N
                        弯矩      Mc_h = 94300.000 N·mm
          V 面 - A 支座反力       Fa_v =  - 154.000 N
                  B 支座反力      Fb_v =  - 1720.000 N
                      弯矩 1     Mc_v1 =  - 7084.000 N·mm
                      弯矩 2     Mc_v2 = 79120.000 N·mm
                  弯矩突变值      Mc12 = 86204.000 N·mm
```

集中力偶值　Mcm = 86209.000 N·mm
合成弯矩 1　Mc1 = 94566.000 N·mm
合成弯矩 2　Mc2 = 123095.000 N·mm
大齿轮传递转矩　T2 = 257685.000 N·m
轴危险截面的当量弯矩　Me = 197628.00 N·m
弯扭组合强度需要的轴径　de = 33.66 mm
轴危险截面的实际直径　dc = 48.00 mm

@@@满足轴的弯扭组合强度要求

```
% 5(1)-滚动轴承工作寿命计算(圆锥滚子轴承 30209,正装结构)
Fa_h = 2050;Fb_h = 2050;                          %两个轴承的 H 面径向载荷(N)
Fa_v = 1720;Fb_v = -154;                          %两个轴承的 V 面径向载荷(N)
Fa = 1304;n2 = 114.592;                           %斜齿轮轴向载荷和转速
cr = 67800;c0r = 83500;                           %额定动载荷和额定静载荷(N)
e = 0.40;y = 1.5;                                 %判断参数和轴向系数
fra = round(sqrt(Fa_h^2 + Fa_v^2));               % A 轴承径向载荷(N)
frb = round(sqrt(Fb_h^2 + Fb_v^2));               % B 轴承径向载荷(N)
sa = round(fra/2/y);                              % A 轴承内部轴向力(N)
sb = round(frb/2/y);                              % B 轴承内部轴向力(N)
if Fa + sa >= sb                                  %轴承 B 被压紧,轴承 A 被放松
    Fa_b = Fa + sa;                               %确定紧轴承 B 轴向载荷(N)
    Fa_a = sa;                                    %确定松轴承 A 轴向载荷(N)
else                                              %轴承 A 被压紧,轴承 B 被放松
    Fa_a = abs(Fa - sb);                          %确定紧轴承 A 轴向载荷(N)
    Fa_b = sb;                                    %确定松轴承 B 轴向载荷(N)
end
if Fa_a/fra >= e                                  %轴承 A 轴向载荷与径向载荷之比
    xa = 0.40;                                    %确定 A 轴承载荷折算系数 X
    ya = y;                                       %确定 A 轴承载荷折算系数 Y
else
    xa = 1;
    ya = 0;
end
pa = round(xa * fra + ya * Fa_a);                 %轴承 A 当量动载荷(N)
if Fa_b/frb >= e                                  %轴承 B 轴向载荷与径向载荷之比
    xb = 0.40;                                    %确定 B 轴承载荷折算系数 X
    yb = y;                                       %确定 B 轴承载荷折算系数 Y
else
    xb = 1;
    yb = 0;
end
pb = round(xb * frb + yb * Fa_b);                 %轴承 B 当量动载荷(N)
fp = 1.5;                                         %轴承载荷系数(减速器中等冲击)
lha = round(1e6/60/n2 * (cr/fp/pa)^(10/3));       % 计算轴承 A 工作寿命(h)
lhb = round(1e6/60/n2 * (cr/fp/pb)^(10/3));       % 计算轴承 B 工作寿命(h)
disp''
```

```
disp('          ==========  圆锥滚子轴承工作寿命计算   ==========');
fprintf('                30209 轴承额定动载荷      cr = %3.0f N\n',cr);
fprintf('                          额定静载荷     c0r = %3.0f N\n',c0r);
fprintf('                            判断参数       e = %3.3f\n',e);
fprintf('                            轴向系数       y = %3.3f\n',y);
fprintf('                      A 轴承径向载荷     fra = %3.0f N\n',fra);
fprintf('                      B 轴承径向载荷     frb = %3.0f N\n',frb);
fprintf('                    A 轴承内部轴向力      sa = %3.0f N\n',sa);
fprintf('                    B 轴承内部轴向力      sb = %3.0f N\n',sb);
fprintf('                      A 轴承轴向载荷    Fa_a = %3.0f N\n',Fa_a);
fprintf('                      B 轴承轴向载荷    Fa_b = %3.0f N\n',Fa_b);
fprintf('    [A 轴承] - 轴向与径向载荷之比    Fa_e = %3.3f\n',Fa_a/fra);
fprintf('                        径向载荷系数      xa = %3.2f\n',xa);
fprintf('                        轴向载荷系数      ya = %3.2f\n',ya);
fprintf('                          当量动载荷      pa = %3.0f N\n',pa);
fprintf('    [B 轴承] - 轴向与径向载荷之比    Fb_e = %3.3f\n',Fa_b/frb);
fprintf('                        径向载荷系数      xb = %3.2f\n',xb);
fprintf('                        轴向载荷系数      yb = %3.2f\n',yb);
fprintf('                          当量动载荷      pb = %3.0f N\n',pb);
fprintf('                     轴承 A 工作寿命     lha = %3.0f h\n',lha);
fprintf('                     轴承 B 工作寿命     lhb = %3.0f h\n',lhb);
```

计算结果：

```
==========圆锥滚子轴承工作寿命计算 ==========
  30209 轴承额定动载荷      cr = 67800 N
            额定静载荷     c0r = 83500 N
              判断参数       e = 0.400
              轴向系数       y = 1.500
        A 轴承径向载荷     fra = 2056 N
        B 轴承径向载荷     frb = 2676 N
      A 轴承内部轴向力      sa = 685 N
      B 轴承内部轴向力      sb = 892 N
        A 轴承轴向载荷    Fa_a = 685 N
        B 轴承轴向载荷    Fa_b = 1989 N
[A 轴承] - 轴向与径向载荷之比    Fa_e = 0.333
          径向载荷系数      xa = 1.00
          轴向载荷系数      ya = 0.00
            当量动载荷      pa = 2056 N
[B 轴承] - 轴向与径向载荷之比    Fb_e = 0.743
          径向载荷系数      xb = 0.40
          轴向载荷系数      yb = 1.50
            当量动载荷      pb = 4054 N
       轴承 A 工作寿命     lha = 4329245 h
       轴承 B 工作寿命     lhb = 450343 h
```

```
% 5(2) - 滚动轴承工作寿命计算(角接触球轴承 7009C,正装结构)
Fa_h = 2050;Fb_h = 2050;                    % 两个轴承的 H 面径向载荷(N)
```

```
Fa_v = -154;Fb_v = -1720;                    % 两个轴承的 V 面径向载荷(N)
Fa = 1304;n2 = 114.592;                      % 斜齿轮轴向载荷和转速
c7r = 25800;c70r = 20500;                    % 额定动载荷和额定静载荷(N)
fra = round(sqrt(Fa_h^2 + Fa_v^2));          % A 轴承径向载荷(N)
frb = round(sqrt(Fb_h^2 + Fb_v^2));          % B 轴承径向载荷(N)
s7a = round(0.4 * fra);                      % A 轴承内部轴向力(N)
s7b = round(0.4 * frb);                      % B 轴承内部轴向力(N)
if Fa + s7a >= s7b                           % 轴承 B 被压紧,轴承 A 被放松
    fa7b = Fa + s7a;                         % 确定紧轴承 B 轴向载荷(N)
    fa7a = s7a;                              % 确定松轴承 A 轴向载荷(N)
else                                         % 轴承 A 被压紧,轴承 B 被放松
    fa7a = abs(Fa - s7b);                    % 确定紧轴承 A 轴向载荷(N)
    fa7b = s7b;                              % 确定松轴承 B 轴向载荷(N)
end
xda = fa7a/c70r;                             % 轴承 A 相对轴向载荷
disp' 轴承 A 相对轴向载荷',xda
ea = input('确定轴承 A 判断参数 ea =')       % 确定轴承 A 判断参数(插值查表)
xdb = fa7b/c70r;                             % 轴承 B 相对轴向载荷
disp' 轴承 B 相对轴向载荷',xdb
eb = input('确定轴承 B 判断参数 eb =')       % 确定轴承 B 判断参数(插值查表)
if fa7a/fra > ea                             % 轴承 A 轴向载荷与径向载荷之比
    x7a = 0.44;                              % 确定 A 轴承载荷折算系数 X
    y7a = input('确定 A 轴承载荷折算系数 Y =');  % 插值查表
else
    x7a = 1;
    y7a = 0;
end
p7a = round(x7a * fra + y7a * fa7a);         % 轴承 A 当量动载荷(N)
if fa7b/frb > eb                             % 轴承 B 轴向载荷与径向载荷之比
    x7b = 0.44;                              % 确定 B 轴承载荷折算系数 X
    y7b = input('确定 B 轴承载荷折算系数 Y =');  % 插值查表
else
    x7b = 1;
    y7b = 0;
end
p7b = round(x7b * frb + y7b * fa7b);         % 轴承 B 当量动载荷(N)
fp = 1.5;                                    % 轴承载荷系数(减速器中等冲击)
lh7a = round(1e6/60/n2 * (c7r/fp/p7a)^3);    % 计算轴承 A 工作寿命(h)
lh7b = round(1e6/60/n2 * (c7r/fp/p7b)^3);    % 计算轴承 B 工作寿命(h)
disp''
disp'          ==========角接触球轴承工作寿命计算 ==========';
fprintf(' 7009C 轴承额定动载荷    c7r = %3.0f N\n',c7r);
fprintf('               额定静载荷    c70r = %3.0f N\n',c70r);
fprintf('           A 轴承径向载荷    fra = %3.0f N\n',fra);
fprintf('           B 轴承径向载荷    frb = %3.0f N\n',frb);
fprintf('         A 轴承内部轴向力    s7a = %3.0f N\n',s7a);
fprintf('         B 轴承内部轴向力    s7b = %3.0f N\n',s7b);
```

```
fprintf('    [A 轴承]-轴向载荷    fa7a = %3.0f N\n',fa7a);
fprintf('            相对轴向载荷    xda = %3.3f\n',xda);
fprintf('                判断参数     ea = %3.3f\n',ea);
fprintf('    轴向与径向载荷之比     fae = %3.3f\n',fa7a/fra);
fprintf('            径向载荷系数    x7a = %3.2f\n',x7a);
fprintf('            轴向载荷系数    y7a = %3.2f\n',y7a);
fprintf('              当量动载荷    p7a = %3.0f N\n',p7a);
fprintf('            轴承工作寿命   lh7a = %3.0f h\n',lh7a);
fprintf('    [B 轴承]-轴向载荷    fa7b = %3.0f N\n',fa7b);
fprintf('            相对轴向载荷    xdb = %3.3f\n',xdb);
fprintf('                判断参数     eb = %3.3f\n',eb);
fprintf('    轴向与径向载荷之比     fbe = %3.3f\n',fa7b/frb);
fprintf('            径向载荷系数    x7b = %3.2f\n',x7b);
fprintf('            轴向载荷系数    y7b = %3.2f\n',y7b);
fprintf('              当量动载荷    p7b = %3.0f N\n',p7b);
fprintf('            轴承工作寿命   lh7b = %3.0f h\n',lh7b);
```

计算结果：

```
轴承 A 相对轴向载荷：
xda =      0.0401
    确定轴承 A 判断参数 ea = 0.43 - 0.03/29 * 18
ea =      0.4114
    轴承 B 相对轴向载荷：
xdb =      0.1037
    确定轴承 B 判断参数 eb = 0.47 - 0.01/33 * 16
eb =      0.4652
    确定 B 轴承载荷折算系数 Y = 1.21

      ==========角接触球轴承工作寿命计算 ==========
       7009C 轴承额定动载荷    c7r = 25800 N
                 额定静载荷   c70r = 20500 N
             A 轴承径向载荷    fra = 2056 N
             B 轴承径向载荷    frb = 2676 N
           A 轴承内部轴向力    s7a = 822 N
           B 轴承内部轴向力    s7b = 1070 N
          [A 轴承]-轴向载荷   fa7a = 822 N
               相对轴向载荷    xda = 0.040
                   判断参数     ea = 0.411
         轴向与径向载荷之比    fae = 0.400
               径向载荷系数    x7a = 1.00
               轴向载荷系数    y7a = 0.00
                 当量动载荷    p7a = 2056 N
               轴承工作寿命   lh7a = 85155 h
          [B 轴承]-轴向载荷   fa7b = 2126 N
               相对轴向载荷    xdb = 0.104
                   判断参数     eb = 0.465
         轴向与径向载荷之比    fbe = 0.794
```

```
                径向载荷系数    x7b = 0.44
                轴向载荷系数    y7b = 1.21
                  当量动载荷    p7b = 3750 N
                轴承工作寿命   lh7b = 14034 h

% 5(3) - 滚动轴承工作寿命计算(深沟球轴承 6009)
c6r = 31500;c60r = 20500;                 % 额定动载荷和额定静载荷(N)
Fa_h = 2050;Fb_h = 2050;                  % 两个轴承的 H 面径向载荷(N)
Fa_v = -154;Fb_v = 1720;                  % 两个轴承的 V 面径向载荷(N)
Fa = 1304;n2 = 114.592;                   % 斜齿轮轴向载荷和转速
Fra = round(sqrt(Fa_h^2 + Fa_v^2));       % A 轴承径向载荷(N)
Frb = round(sqrt(Fb_h^2 + Fb_v^2));       % B 轴承径向载荷(N)
if Fra >= Frb
    '      @@@以轴承 A 作为计算依据
    fr6 = Fra;
else
    '      @@@以轴承 B 作为计算依据
    fr6 = Frb;
end
xd6 = Fa/c60r;                            % 轴承的相对轴向载荷
disp('    轴承的相对轴向载荷:',xd6
ea6 = input('确定轴承判断参数 ea6 = ')     % 确定 6 类轴承判断参数(插值查表)
if Fa/fr6 > ea6;                          % 轴承 6 类轴向载荷与径向载荷之比
    x6a = 0.56;                           % 确定 6 类轴承载荷折算系数 X
    y6a = input('确定轴承载荷折算系数 Y6a = ');      % 插值查表
else
    x6a = 1;
    y6a = 0;
end
p6a = round(x6a * fr6 + y6a * Fa);        % 6 类轴承的当量动载荷(N)
fp = 1.5;                                 % 轴承载荷系数(减速器中等冲击)
lh6a = round(1e6/60/n2 * (c6r/fp/p6a)^3);  % 计算 6 类轴承的工作寿命(h)
disp''
disp'         ==========  深沟球轴承寿命计算   ==========';
fprintf('    6009 轴承额定动载荷    c6r = %3.0f N\n',c6r);
fprintf('              额定静载荷   c60r = %3.0f N\n',c60r);
fprintf('          轴承 A 径向载荷   Fra = %3.3f N\n',Fra);
fprintf('          轴承 B 径向载荷   Frb = %3.3f N\n',Frb);
fprintf('            轴承轴向载荷     Fa = %3.3f N\n',Fa);
fprintf('                轴承转速     n2 = %3.3f r/min\n',n2);
fprintf('            相对轴向载荷    xd6 = %3.3f\n',xd6);
fprintf('                判断参数    ea6 = %3.3f\n',ea6);
fprintf('      轴向与径向载荷之比    Fae = %3.3f\n',Fa/fr6);
fprintf('            径向载荷系数    x6a = %3.2f\n',x6a);
fprintf('            轴向载荷系数    y6a = %3.2f\n',y6a);
fprintf('              当量动载荷    p6a = %3.0f N\n',p6a);
fprintf('            轴承工作寿命   lh6a = %3.0f h\n',lh6a);
```

计算结果：

```
        @@@以轴承 A 作为计算依据
    轴承的相对轴向载荷：
    xd6 =       0.0636
        确定轴承判断参数 ea6 = 0.27 - 0.03/30 * 6
    ea6 =       0.2640
        确定轴承载荷折算系数 Y6a = 1.6 + 0.2/30 * 6

          ==========深沟球轴承工作寿命计算 ==========
            6009 轴承额定动载荷     c6r = 31500 N
                    额定静载荷    c60r = 20500 N
                 轴承 A 径向载荷     Fra = 2056.000 N
                 轴承 B 径向载荷     Frb = 2676.000 N
                   轴承轴向载荷      Fa = 1304.000 N
                       轴承转速      n2 = 114.592 r/min
                   相对轴向载荷     xd6 = 0.064
                       判断参数     ea6 = 0.264
             轴向与径向载荷之比     Fae = 0.487
                   径向载荷系数     x6a = 0.56
                   轴向载荷系数     y6a = 1.64
                     当量动载荷     p6a = 3637 N
                   轴承工作寿命    lh6a = 27998 h
```

```
% 6 - 平键联接选用计算
% 平键联接的挤压强度校核
% (1)轴外伸段上的平键联接
d = 35;B1 = 82;T = 77454;sigma_p = 110;          % 已知条件
[b,h,t,t1] = pjlj(d);                             % 调用平键联接尺寸选用的函数文件
disp('   ########   轴外伸段上的平键联接尺寸   ########')
fprintf('              平键宽度       b = %3.2f mm\n',b);
fprintf('              平键高度       h = %3.2f mm\n',h);
fprintf('              轴槽深度       t = %3.2f mm\n',t);
fprintf('              毂槽深度      t1 = %3.2f mm\n',t1);
disp(' % 键的长度系列:20,22,25,28,32,36,40,45,50,56,63,70,80,90,100,110,125')
L = input(' 根据轮毂宽度 B1,选择键的系列长度 L = ');
LA = L - b;                                        % A 型圆头平键的计算长度
sigma = 4 * T/(d * b * LA);                        % 计算平键联接的挤压应力
fprintf('       平键联接的挤压应力 sigma = %3.4f MPa\n',sigma);
if sigma < = sigma_p
    disp('   @@   轴外伸段上平键联接满足挤压强度条件   @@')
else
    disp('   @@   轴外伸段上平键联接不满足挤压强度条件   @@')
end
```

计算结果：

```
    ######## 轴外伸段上的平键联接尺寸 ########
             平键宽度      b = 10.00 mm
             平键高度      h = 8.00 mm
```

```
          轴槽深度      t = 5.00 mm
          毂槽深度     t1 = 3.30 mm
% 键的长度系列:20,22,25,28,32,36,40,45,50,56,63,70,80,90,100,110,125
根据轮毂宽度 B1,选择键的系列长度 L = 70
    平键联接的挤压应力 sigma = 14.7531 MPa
  @@ 轴外伸段上平键联接满足挤压强度条件  @@

%(2)轴外伸段上的平键联接
d = 48;B2 = 36;T = 77454;sigma_p = 110; % 已知条件
[b,h,t,t1] = pjlj(d);                 % 调用平键联接尺寸选用的函数文件
disp('      ########  轴头上的平键联接尺寸  ########')
fprintf('       平键宽度      b = %3.2f mm\n',b);
fprintf('       平键高度      h = %3.2f mm\n',h);
fprintf('       轴槽深度      t = %3.2f mm\n',t);
fprintf('       毂槽深度     t1 = %3.2f mm\n',t1);
disp(' % 键的长度系列:20,22,25,28,32,36,40,45,50,56,63,70,80,90,100,110,125')
L = input(' 根据轮毂宽度 B1,选择键的系列长度 L = ');
LA = L - b;                           % A 型圆头平键的计算长度
sigma = 4 * T/(d * b * LA);           % 计算平键联接的挤压应力
fprintf('        平键联接的挤压应力 sigma = %3.4f MPa\n',sigma);
if sigma <= sigma_p
    disp('   @@   轴头上平键联接满足挤压强度条件   @@')
else
    disp('   @@   轴头上平键联接不满足挤压强度条件   @@')
end
```

计算结果:

```
    ######## 轴头上的平键联接尺寸 ########
          平键宽度      b = 14.00 mm
          平键高度      h = 9.00 mm
          轴槽深度      t = 5.50 mm
          毂槽深度     t1 = 3.80 mm
% 键的长度系列:20,22,25,28,32,36,40,45,50,56,63,70,80,90,100,110,125
根据轮毂宽度 B1,选择键的系列长度 L = 32
    平键联接的挤压应力 sigma = 25.6131 MPa
  @@ 轴头上平键联接满足挤压强度条件  @@
```

```
% 平键联接尺寸选用的函数文件
function [b,h,t,t1] = pjlj(d)
if d > 10 & d <= 12
    b = 4;h = 4;t = 2.5;t1 = 1.8;
elseif d > 12 & d <= 17
    b = 5;h = 5;t = 3.0;t1 = 2.3;
elseif d > 17 & d <= 22
    b = 6;h = 6;t = 3.5;t1 = 2.8;
elseif d > 22 & d <= 30
    b = 8;h = 7;t = 4.0;t1 = 3.3;
```

```
elseif d>30 & d<=38
    b=10;h=8;t=5.0;t1=3.3;
elseif d>38 & d<=44
    b=12;h=8;t=5.0;t1=3.3;
elseif d>44 & d<=50
    b=14;h=9;t=5.5;t1=3.8;
elseif d>50 & d<=58
    b=16;h=10;t=6.0;t1=4.3;
elseif d>58 & d<=65
    b=18;h=11;t=7.0;t1=4.4;
end
```

14.2　机床主轴优化设计

机床主轴是机床中的重要零件之一，一般是多支承的空心阶梯轴。为了便于对阶梯轴进行结构分析，常常将它简化为用当量直径表示的等截面轴。

图 14-6 所示的是经过简化处理的专用机床双支承主轴的力学模型。从要求机床主轴制造成本较低和加工精度较高的要求出发，需要考虑主轴的自重和外伸段挠度这两个重要因素。对于专用机床来说，并不追求过高的加工精度。因此，应该选取自重的质量最轻为设计目标，将主轴的刚度作为约束条件。

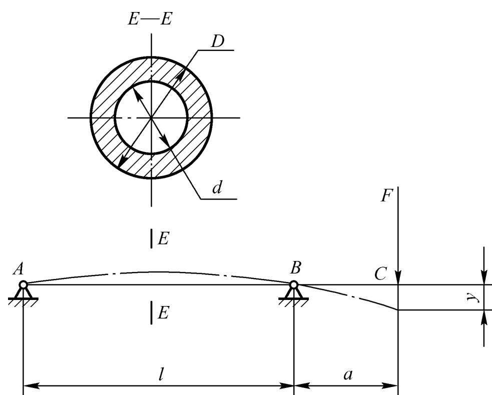


图 14-6　机床主轴力学模型

14.2.1　建立优化设计数学模型

1. 设计变量和目标函数

当主轴的材料选定之后，与主轴质量设计方案有关的设计变量包括主轴的外径 D、孔径 d、两支承跨度 l 和外伸段长度 a，如图 14-6 所示。由于机床主轴的孔径主要取决于待加工棒料的直径，不能作为设计变量处理。因此，设计变量为

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}l\\D\\a\end{bmatrix}$$

机床主轴质量最轻优化设计的目标函数为

$$f(\boldsymbol{X})=\frac{\pi}{4}\rho(x_1+x_3)(x_2^2-d^2) \tag{14-1}$$

式中，ρ 为材料的密度，$\rho=7.8\times10^{-3}\ \mathrm{g/mm^3}$（钢）。

2. 约束条件

1）机床的加工质量在很大程度上取决于主轴的刚度，主轴刚度是一个重要的性能指标。因此，要求主轴悬臂端挠度不超过给定的静变形 y_0。

根据材料力学可知，主轴悬臂端挠度

$$y=\frac{Fa^2(l+a)}{3EJ}=\frac{64Fa^2(l+a)}{3\pi E(D^4-d^4)}=\frac{64Ex_3^2(x_1+x_3)}{3\pi E(x_2^4-d^4)} \tag{14-2}$$

式中，$J=\pi/64(D^4-d^4)$ 是空心主轴的惯性矩，单位为 $\mathrm{mm^4}$；$E=2.1\times10^5$ MPa 是主轴的弹性模量（钢）；F 是作用主轴外伸端的力，单位为 N。

整理得到主轴刚度的约束条件

$$g_1(\boldsymbol{X})=\frac{64Fx_3^2(x_1+x_3)}{3\pi E(x_2^4-d^4)}-y_0\leqslant0$$

应当指出,对于主轴这种重要零件,除了刚度条件的性能要求之外,还应该考虑强度条件的性能要求,即保证主轴内的最大工作应力不得超过许用应力。但是,由于已经对机床主轴有较高的刚度要求,在满足刚度要求的情况下,其强度应该有相当的富裕。因此,不需要再提出主轴强度条件的约束条件。

2）设计变量的边界条件。3 个设计变量的边界约束条件为上下界的变化范围

$$\left.\begin{array}{l} l_{\min}\leqslant l\leqslant l_{\max} \\ D_{\min}\leqslant D\leqslant D_{\max} a_{\min}\leqslant a\leqslant a_{\max} \end{array}\right\}$$

14.2.2 计算实例和 M 文件

例 14-2 已知某机床主轴悬臂端受到的切削力 $F=15000$ N，主轴内径 $d=30$ mm，悬臂端许用挠度 $y_0=0.05$ mm。要求主轴两支承跨度 300 mm $\leqslant l\leqslant$ 650 mm，外径 60 mm $\leqslant D\leqslant$ 140 mm，悬臂端长度 90 mm $\leqslant a\leqslant$ 150 mm。试按照要求主轴体积最小进行优化设计。

1. 建立优化设计的数学模型

将已知数据代入式（14-1）和式（14-2）之中，整理得到

$$\left.\begin{array}{l} f(\boldsymbol{X})=0.25\pi\rho(x_1+x_3)(x_2^2-d^2) \\ \boldsymbol{X}=[x_1,x_2,x_3]^{\mathrm{T}}=[l,D,a]^{\mathrm{T}} \\ \text{s. t.}\ \ g_1(\boldsymbol{X})=\dfrac{64Fx_3^2(x_1+x_3)}{3\pi E(x_2^4-d^4)}-y_0\leqslant0 \\ g_2(\boldsymbol{X})=300-x_1\leqslant0 \\ g_3(\boldsymbol{X})=60-x_2\leqslant0 \\ g_4(\boldsymbol{X})=x_2-140\leqslant0 \\ g_5(\boldsymbol{X})=90-x_3\leqslant0 \end{array}\right\}$$

说明：在设计变量的边界约束条件中没有考虑两支承跨度 l 和外伸段长度 a 的上限值，

因为无论是从减少主轴体积的设计目标，还是从减少主轴外伸端挠度的约束条件来看，都是要求 l 和 a 往小处变化。为了简化数学模型，在约束条件中不对它们的上限值进行限制。

这是一个 3 维有 5 个不等式约束的非线性优化设计问题。

2. 编制优化设计的 M 文件

```
%机床主轴结构优化设计
% 1－约束非线性优化函数 fmincon 的调用参数赋值
%设计变量的初始值(x(1):主轴跨度 l、x(2):主轴外径 D、x(3):悬臂长度 a)
x0 = [500;100;120];                        %单位:mm
%设计变量的下界与上界
Lb = [300;60;90];
Ub = [650;140;150];
%调用多维约束优化函数
%没有线性不等式约束,参数 A,b 定义为空矩阵符号"[ ]"
%没有线性等式约束,参数 Aeq,beq 定义为空矩阵符号"[ ]"
[x_opt,f_opt,exitflag,output] = fmincon('jczzjg_f',x0,[ ],[ ],[ ],[ ],Lb,Ub,'jczzjg_g')
%检验螺栓联接优化设计结果的约束函数值
g = jczzjg_g(x_opt)

% 2－机床主轴质量的目标函数(jczzjq_f)
function f = jczzjg_f(x);
d = 30;                                    %主轴内径(mm)
rho = 7.8e-3;                              %钢材密度(g/mm^3)
f = pi * rho * (x(1) + x(3)) * (x(2)^2 - d^2)/4;

% 3－机床主轴悬臂端挠度的非线性约束函数(jczzjg_g)
function [g,Ceq] = jczzjg_g(x);
F = 1.5e4;                                 %主轴悬臂端载荷(N)
d = 30;                                    %主轴内径(mm)
y0 = 0.05;                                 %主轴悬臂端许用挠度(mm)
E = 2.1e5;                                 %钢材弹性模量(MPa)
J = pi * (x(2)^4 - d^4)/64;                %主轴惯性矩(mm^4)
%非线性不等式约束(the nonlinear inequality constraints)
g = F * x(3)^2 * (x(1) + x(3))/(3 * E * J) - y0;   %主轴悬臂端约束函数
%非线性等式约束(the nonlinear equality constraints)
Ceq = [ ];
```

计算结果：

```
Optimization terminated: first-order optimality measure less
than options.TolFun and maximum constraint violation is less
than options.TolCon.
Active inequalities (to within options.TolCon = 1e-006):
  lower    upper    ineqlin    ineqnonlin
    1                              1
    3
```

```
x_opt =
   300.0000
   74.8898
   90.0000
f_opt =
  1.1249e+004
exitflag =
     1
output =
         iterations: 10
          funcCount: 51
           stepsize: 1
          algorithm:' medium-scale: SQP,Quasi-Newton,line-search'
     firstorderopt: 7.5880e-007   % 一阶优化精度
       cgiterations: []
            message: [1x144 char]
g =
 -3.4694e-017
```

3. 优化结果分析

使用约束非线性优化函数 fmincon 求解，取可行域内的初始点 $\boldsymbol{X}^{(0)}=[500,100,120]^{\mathrm{T}}$，中等规模的拟牛顿 SQP 算法，经过 10 次迭代计算，调用函数文件 51 次，得到最优解

$$\boldsymbol{X}^*=[x_1^*,x_2^*,x_3^*]^{\mathrm{T}}=[300.00,74.8898,90.0000]^{\mathrm{T}}$$

$$f(\boldsymbol{X}^*)=11249g$$

经检验，最优点位于边界约束条件 $g_2(\boldsymbol{X})\geqslant 0$ 和 $g_5(\boldsymbol{X})\geqslant 0$ 的交集上。

14.3 主轴支承静不定结构的计算

为提高主轴组件的刚度，其前支承通常采用一对同型号的角接触轴承，而后支承采用游动式支承，如图 14-7 所示。例如，拖拉机中央传动系统中的主动锥齿轮轴和一些专用机床的主轴等。这种主轴的前支承是一种静不定结构，由于主轴本身的刚度相对较大，在计算时可以不考虑它的变形，仅考虑前支承上一对轴承的变形。

14.3.1 主轴支承静不定结构分析

由于主轴工作时一般都承受有轴向力 F_a 的作用，因此，前支承的径向反力 F_r 的作用位置不在这对轴承的轴向对称平面上（即图 14-7 中的 $b_1\neq 0$），而是随着轴向力 F_a 的方向和大小的变化而变化。F_a 越大，径向反力 F_r 的作用位置离某一轴承的支承位置越近。经理论分析，该对轴承径向反力 F_r 的相对作用位置（b_1/b）与轴承相对载荷（$F_a\cot\alpha/F_r$，α 是轴承的公称角接触）的关系曲线如图 14-8 所示。

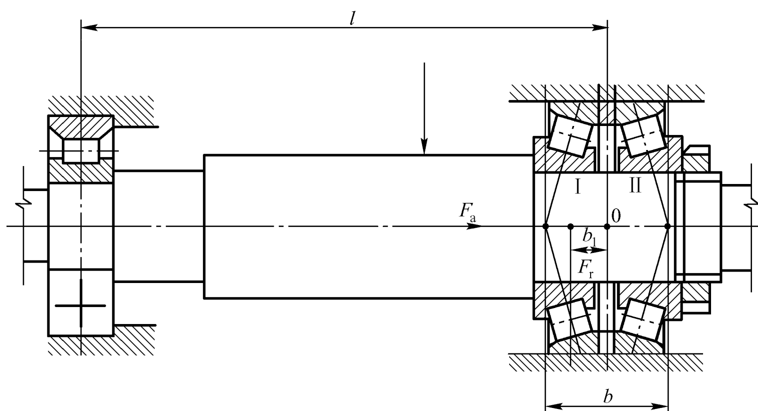


图 14-7　主轴支承的静不定结构

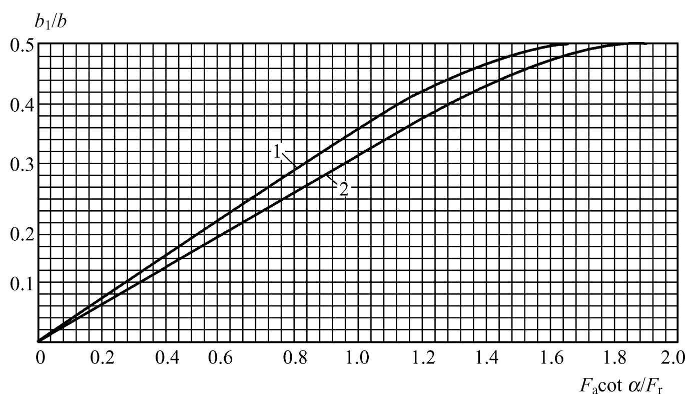


图 14-8　角接触轴承的载荷与作用位置的关系曲线

1—角接触球轴承　2—圆锥滚子轴承

当计算主轴前支承的径向反力时，通常都是根据图 14-8 所示的轴承径向反力作用位置 - 载荷关系曲线采用试算的方法来进行。为了避免采用多次试算的麻烦，可以通过建立轴承径向反力相对作用位置与轴承相对载荷的关系曲线分段逼近的回归方程和主轴力矩平衡方程，联立求解出主轴前支承的径向反力 F_r 及其作用位置。

14.3.2　轴承径向反力位置 - 载荷关系曲线的分段拟合

从图 14-8 可见，当 $0 \leqslant b_1/b \leqslant h$（$h$ 表示图中两条线图的直线与曲线部分连接点对应的比值 b_1/b。对角接触球轴承，$h_1 = 0.32$；对圆锥滚子轴承 $h_2 = 0.34$）时，轴承径向反力位置 - 载荷关系曲线可以用直线来逼近

$$\frac{b_1}{b} = \lambda\,\frac{F_a \cot\alpha}{F_r} \tag{14-3}$$

式中，α 是轴承的公称接触角；λ 为常数，按照表 14-2 确定。

当 $h < b_1/b \leqslant 0.5$ 时，先将两条轴承径向反力作用位置 - 载荷关系曲线离散成数表 14-3 和表 14-4。

表 14-2　式（14-3）中有关参数的确定

轴 承 类 型	λ	$\cot\alpha$
角接触球轴承	$\lambda_1 = 0.3636$	$1.25/e$（e 为轴承的载荷转换参数）
圆锥滚子轴承	$\lambda_2 = 0.3148$	$2.5/Y$（Y 为轴承的轴向载荷系数）

表 14-3　角接触球轴承的作用位置－载荷关系曲线数表

$F_a\cot\alpha/F_r$	0.88	0.96	1.04	1.12	120	128	136	1.44	152	1.60	1.68
b_1/b	0.320	0.344	0.370	0.395	0.420	0.435	0.460	0.470	0.482	0.490	0.500

表 14-4　圆锥滚子轴承的作用位置－载荷关系曲线数表

$F_a\cot\alpha/F_r$	1.08	1.16	1.24	1.32	1.40	1.48	1.56	1.64	1.72	1.80	1.88
b_1/b	0.340	0.362	0.388	0.410	0.430	0.446	0.462	0.475	0.486	0.496	0.500

根据该区域曲线形态，采用一元非线性回归分析的方法将它们拟合为对数曲线方程

$$\frac{b_1}{b} = m + n\lg\frac{F_a\cot\alpha}{F_r} \tag{14-4}$$

式中，m，n 为回归系数，按照表 14-5 确定。

表 14-5　式（14-4）中回归系数的确定

轴 承 类 型	m	n
角接触球轴承	$m_1 = 0.3608$	$n_1 = 0.6622$
圆锥滚子轴承	$m_2 = 0.3234$	$n_2 = 0.6872$

经过检验，回归方程的相关指数 $R^2 = 0.99$，剩余标准误差 $\sigma \approx 0.006$。可见回归方程拟合精度高，效果好。

14.3.3　建立主轴力矩平衡方程

以某专用机床的主轴为例，主轴工作时轴头受到齿轮传动力 Q（其三个分力是：圆周力 Q_t、径向力 Q_r 和轴向力 Q_a）的作用，轴伸出端受到切削力 P（其三个分力是：主切削力 P_z、径向力 P_y 和轴向力 P_x）的作用，如图 14-9 所示（d 为齿轮分度圆直径，D 为工件切削直径）。

根据主轴力矩平衡条件 $\sum M_A(F) = 0$，在水平面 XOY 上有

$$P_y(l+a) - P_x\frac{D}{2} - Q_r(l-c)\cos(\pi-\varphi) + F_{ry}(l+b_1) - Q_t(l-c)\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right) - Q_a\frac{d}{2}\cos(\pi-\varphi) = 0$$

在垂直面 ZOY 上有

$$P_z(l+a) - Q_r(l-c)\sin(\pi-\varphi) + F_{rz}(l+b_1) + Q_t(l-c)\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right) - Q_a\frac{d}{2}\sin(\pi-\varphi) = 0$$

上面两式中，除了 F_{ry}、F_{rz} 和 b_1 是未知数外，其余都是已知数。因此，可以将它们写成如下简化形式

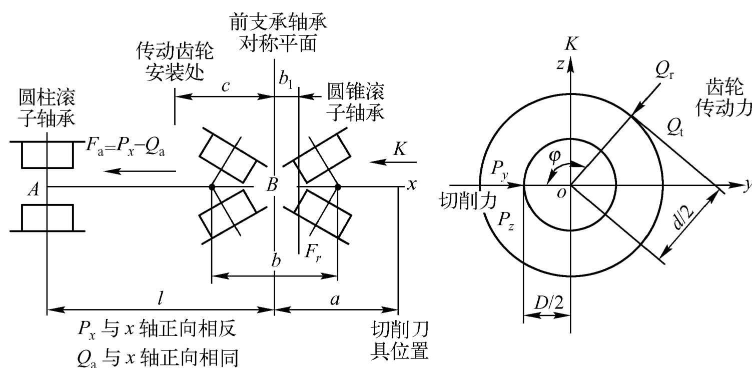


图 14-9　专用机床主轴受力分析

$$\left.\begin{aligned} F_{ry} &= \frac{u}{l+b_1} \\ F_{rz} &= \frac{v}{l+b_1} \end{aligned}\right\}$$

式中，u，v 是与主轴的载荷和结构尺寸等已知量有关的力矩参数，它们由下面两式决定

$$\left.\begin{aligned} u &= -P_y(l+a)+P_x\frac{D}{2}-(l-c)(Q_r\cos\varphi-Q_t\sin\varphi)-Q_a\frac{d}{2}\cos\varphi \\ v &= -P_z(l+a)+(l-c)(Q_r\sin\varphi+Q_t\cos\varphi)+Q_a\frac{d}{2}\sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad (14\text{-}5)$$

因此，主轴前支承的径向反力为

$$F_r=\sqrt{F_{ry}^2+F_{rz}^2}=\frac{\sqrt{u^2+v^2}}{l+b_1}=\frac{w}{l+b_1} \quad (14\text{-}6)$$

式中，$w=\sqrt{u^2+v^2}$ 为综合力矩参数。

14.3.4　计算主轴前支承的径向反力

先假设相对位置参数 $b_1/b\leq h$，将式（14-4）代入式（14-1）得相对作用位置

$$\frac{b_1}{b}=\frac{\lambda F_a l\cot\alpha}{w-\lambda F_a b\cot\alpha} \quad (14\text{-}7)$$

式中，主轴的轴向载荷 $F_a=P_x-Q_a$。

如果按照式（14-7）求出的 $b_1/b\leq h$，则根据式（14-3）计算出主轴前支承的径向反力 F_r。

如果按照式（14-7）求出的 $b_1/b>h$，则联立式（14-7）与（14-4），经整理得

$$\lg F_r+\frac{w}{nbF_r}-\left[\frac{l}{nb}+\frac{m}{n}+\lg(F_a\cot\alpha)\right]=0$$

令

$$\left.\begin{aligned} \mu &= \frac{w}{nb} \\ \rho &= \frac{l}{nb}+\frac{m}{n}+\lg(F_a\cot\alpha) \end{aligned}\right\} \quad (14\text{-}8)$$

式（14-8）可以简化为

$$\lg F_r + \frac{\mu}{F_r} - \rho = 0 \tag{14-9}$$

这是一个超越方程，由于对它求导容易，可以采用牛顿迭代法（该数值算法恒收敛，而且收敛速度很快）求解。令 $f(F_r) = \lg F_r + \frac{\mu}{F_r} - \rho$，它的导函数为 $f'(F_r) = \lg \frac{e}{F_r} + \frac{\mu}{F_r^2}$，代入牛顿迭代公式得到

$$F_r^{K+1} = F_r^{(K)} - \frac{f(F_r^{(K)})}{f'(F_r^{(K)})} = F_r^{(K)} - \frac{\lg F_r^{(K)} + \frac{\mu}{F_r^{(K)}} - \rho}{\frac{\lg e}{F_r^{(K)}} - \frac{\mu}{(F_R^{(K)})^2}} \tag{14-10}$$

在开始迭代计算（$K=0$）时，取 $F_r^{(K)}$ 的初值 $F_r^{(0)} = w/l + nb$。

当 $|f(F_r^{(K+1)})/f'(F_r^{(K+1)})| \leqslant \varepsilon$ 时，即可终止迭代过程，获得满足一定计算精度 ε 要求的径向反力 $F_r = F_r^{(K+1)}$。

14.3.5 计算流程图

主轴支承静不定结构计算的流程图如图 14-10 所示。

14.3.6 计算实例和 M 文件

例 14-3 已知某轴承环卡盘多刀车床主轴采用上述支承结构（图 14-3），前支承上安装一对圆锥滚子轴承（$Y=1.5$）。主轴组件的结构尺寸为：$l=525$ mm、$a=203$ mm、$b=130$ mm、$c=194$ mm。轴头处安装斜齿轮分度圆直径 $d=271.31$ mm，车床经济切削直径 $D=180$ mm。齿轮传动力 $Q_t=4839$ N、$Q_r=1820$ N、$Q_a=1294$ N，载荷方位角 $\varphi=128°$。切削力 $P_z=6978$ N、$P_y=2971$ N、$P_x=2791$ N。试求主轴前支承的径向反力 F_r。

（1）计算主轴轴向力

$$F_a = P_x - Q_a = 2791 - 1294 = 1497\ \text{N} \quad (\text{方向向左})$$

因此，前支承的径向反力 F_r 的作用位置偏向于前支承对称平面的右边（图 14-9）。

（2）由式（14-5）求出力矩参数（略去具体计算过程）

$$u = -393536\ \text{N}\cdot\text{mm}$$

$$v = -5453056\ \text{N}\cdot\text{mm}$$

$$w = \sqrt{u^2+v^2} = 5453199\ \text{N}\cdot\text{mm}$$

（3）由式（14-7）求出相对位置系数

$$\frac{b_1}{b} = 0.17 < h_2 = 0.34 \quad (\text{圆锥滚子轴承})$$

因此，根据式（14-6）求出主轴前支承的径向反力 $F_r=10384$ N，作用位置 $b_1=22.12$ mm。

同理，分别根据水平面 XOY 中 Y 方向上和垂直面 XOZ 中 Z 方向上力系的平衡条件，计算出主轴后支承的径向反力 $F_{rA}=2644$ N。

讨论：如果由于工作条件改变，切削轴向力变成 $P_x=4400$ N，其他数据不变。则主轴轴向力变成 $F_a=3106$ N（方向向左）。P_x 值的改变不会引起 v 值的变化。

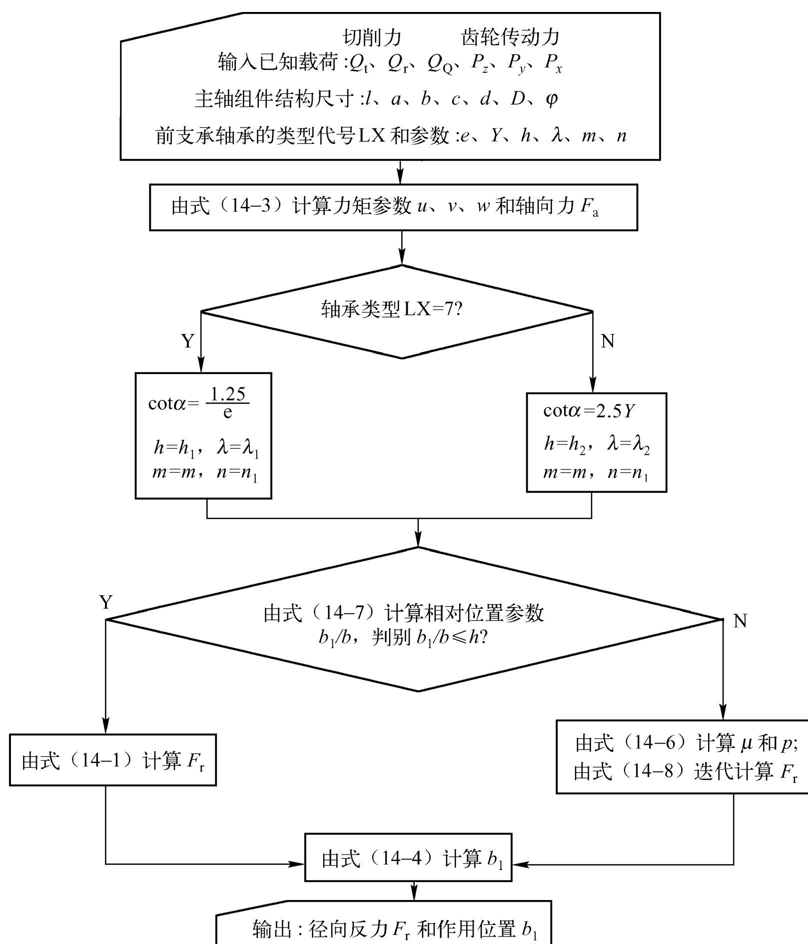


图 14-10　主轴静不定结构计算流程图

$$u=105274\ \mathrm{N\cdot mm}$$

$$w=\sqrt{u^2+v^2}=5454072\ \mathrm{N\cdot mm}$$

$$\frac{b_1}{b}=0.3532>h_2=0.34$$

由式（14-8）求出 $\mu=61051$，$\rho=15.7101$。

（4）M 文件和运算结果　选择 MATLAB 中函数 fsolve，求解非线性超越方程式（14-9）。使用时，取迭代初值

$$F_r^{(0)}=\frac{w}{l+nb}=\frac{5454072}{525+0.6872\times130}=8878\ \mathrm{N}$$

在 zzjbd. m 函数文件中定义方程式（14-9）的函数表达式，并且使用函数 global 将主 M 文件中的输出变量 μ 和 ρ 定义为全局变量，以便函数表达式中使用。

```
% 主轴支承静不定结构的计算(调用 zzjbd. m)
disp''
disp'            ******** 主轴支承静不定结构的计算 ********'
```

```
disp''
ZCLX = input('滚动轴承类型:角接触球轴承 - "Q";圆锥滚子轴承 - "Z" = ');
disp''
if ZCLX == 'Q'
    disp('========角接触球轴承 ========')
    lmd = 0.3636;
    Qe = input('载荷转换参数        e = ');
    ctgalf = 1.25/Qe;
    m = 0.3608;
    n = 0.6622;
    h = 0.32;
elseif ZCLX == 'Z'
    disp('========圆锥滚子轴承 ========')
    lmd = 0.3148;
    Zy = input('轴向载荷系数        Y = ');
    ctgalf = 2.5 * Zy;
    m = 0.3234;
    n = 0.6872;
    h = 0.34;
end
fprintf('        相对位置系数      lmd = %3.4f\n',lmd)
fprintf('          接触角余切   ctgalf = %3.4f\n',ctgalf)
fprintf('        曲线拟合常数        m = %3.4f\n',m)
fprintf('        曲线拟合常数        n = %3.4f\n',n)
disp''
%主轴结构尺寸
l = 525;a = 203;b = 130;c = 194;d = 271.31;D = 180;
disp('========主轴的结构尺寸 ========')
fprintf('            支承跨度       l = %3.2f mm\n',l)
fprintf('            悬臂长度       a = %3.2f mm\n',a)
fprintf('          前支承宽度       b = %3.2f mm\n',b)
fprintf('            齿轮位置       c = %3.2f mm\n',c)
fprintf('        齿轮分度圆直径     d = %3.2f mm\n',d)
fprintf('          机床切削直径     D = %3.2f mm\n',D)
disp''
%齿轮传动力
Qt = 4839;Qr = 1820;Qa = 1294;fai = 128;
disp('========齿轮传动力 ========')
fprintf('              圆周力      Qt = %3.2f N\n',Qt)
fprintf('              径向力      Qr = %3.2f N\n',Qr)
fprintf('              轴向力      Qa = %3.2f N\n',Qa)
fprintf('          载荷方位角     fai = %3.2f 度\n',fai)
disp''
%机床切削力
Pz = 6978;Py = 2791;Px = 4400;
```

```
disp('                  ========机床切削力 =======')
fprintf('                 主切削力          Pz = %3.2f N\n',Pz)
fprintf('                   径向力          Py = %3.2f N\n',Py)
fprintf('                   轴向力          Px = %3.2f N\n',Px)
disp(' ')
%计算力矩参数
hd = pi/180;
u = -Py*(l+a)+0.5*Px*D-(l-c)*(Qr*cos(fai*hd)-Qt*sin(fai*hd))-0.5*Qa*d*cos
(fai*hd);
v = -Pz*(l+a)+(l-c)*(Qr*sin(fai*hd)+Qt*cos(fai*hd))+0.5*Qa*d*sin(fai*hd);
w = sqrt(u^2+v^2);
disp('                  =======力矩参数 =======')
fprintf('              XOY 面参数          u = %3.0f N·mm\n',u)
fprintf('              ZOY 面参数          v = %3.0f N·mm\n',v)
fprintf('            综合力矩参数          w = %3.0f N·mm\n',w)
Fa = Px-Qa;
b1b = lmd*Fa*l*ctgalf/(w-lmd*Fa*ctgalf);
if b1b<=h
    Fr = lmd*Fa*ctgalf/b1b;
elseif b1b>h
    mu = w/(n*b);
    lo = l/(n*b)+m/n+log(Fa*ctgalf);
    x0 = w/(l+n*b);                         %前支承径向载荷 Fr 初值
    Fr = fsolve(@zzjbd,x0);                 % 利用函数 fsolve 解非线性方程
end
b1 = b1b*b;                                 %前支承径向载荷作用位置
%计算后支承径向载荷
Fry = u/(l+b1);                             %前支承 XOY 面-径向载荷
Frz = v/(l+b1);                             %          XOZ 面-径向载荷
Fray = -Qr*cos(fai*hd)+Qt*sin(fai*hd)-Fry-Py;   % 后支承 XOY 面-径向载荷
Fraz = Qr*sin(fai*hd)+Qt*cos(fai*hd)-Frz-Pz;    %          XOZ 面-径向载荷
Fra = sqrt(Fray^2+Fraz^2);                  % 后支承径向载荷
disp(' ')
disp('              ========主轴载荷和作用位置 =======')
fprintf('            主轴轴向载荷          Fa = %3.0f N\n',Fa)
fprintf('            相对位置参数         b1b = %3.4f\n',b1b)
fprintf('         前支承 B-径向载荷       FrB = %3.0f N\n',Fr)
fprintf('  前支承径向载荷作用位置          b1 = %3.2f mm\n',b1)
fprintf('         后支承 A-径向载荷       FrA = %3.0f N\n',Fra)

%主轴支承静不定结构超越非线性方程
function f = zzjbd(x)
global mu lo                                %定义全局变量
f = log(x)-mu/x-lo;
```

计算结果：

```
        ******** 主轴支承静不定结构的计算 -1  ********

滚动轴承类型:角接触球轴承 -"Q";圆锥滚子轴承 -"Z" = 

  Z

      ========圆锥滚子轴承  ========
                  轴向载荷系数          Y =1.5
                  相对位置系数        lmd =0.3148
                    接触角余切     ctgalf =3.7500
                  曲线拟合常数          m =0.3234
                  曲线拟合常数          n =0.6872

      ========主轴的结构尺寸 ========
                      支承跨度          l =525.00 mm
                      悬臂长度          a =203.00 mm
                    前支承宽度          b =130.00 mm
                      齿轮位置          c =194.00 mm
                齿轮分度圆直径          d =271.31 mm
                  机床切削直径          D =180.00 mm

       ========齿轮传动力  ========
                        圆周力         Qt =4839.00 N
                        径向力         Qr =1820.00 N
                        轴向力         Qa =1294.00 N
                    载荷方位角        fai =128.00 度

       ========机床切削力  ========
                      主切削力         Pz =6978.00 N
                        径向力         Py =2791.00 N
                        轴向力         Px =4400.00 N

       ========力矩参数  ========
                    XOY 面参数          u =105274 N·mm
                    ZOY 面参数          v = -5453056 N·mm
                  综合力矩参数          w =5454072 N·mm

      ========主轴载荷和作用位置  ========
                  主轴轴向载荷         Fa =3106 N
                  相对位置参数        b1b =0.3532
             前支承 B-径向载荷        FrB =8878 N
        前支承径向载荷作用位置         b1 =45.91 mm
             后支承 A-径向载荷        FrA =2212 N

        ******** 主轴支承静不定结构的计算 -2  ********

滚动轴承类型:角接触球轴承 -"Q";圆锥滚子轴承 -"Z" = 

  Q
```

========角接触球轴承 ========
载荷转换参数　e = 0.68
相对位置系数　lmd = 0.3636
接触角余切　ctgalf = 1.8382
曲线拟合常数　m = 0.3608
曲线拟合常数　n = 0.6622

========主轴的结构尺寸 ========
支承跨度　l = 525.00 mm
悬臂长度　a = 203.00 mm
前支承宽度　b = 130.00 mm
齿轮位置　c = 194.00 mm
齿轮分度圆直径　d = 271.31 mm
机床切削直径　D = 180.00 mm

========齿轮传动力 ========
圆周力　Qt = 4839.00 N
径向力　Qr = 1820.00 N
轴向力　Qa = 1294.00 N
载荷方位角　fai = 128.00 度

========机床切削力 ========
主切削力　Pz = 6978.00 N
径向力　Py = 2791.00 N
轴向力　Px = 4400.00 N

========力矩参数 ========
XOY 面参数　u = 105274 N · mm
ZOY 面参数　v = －5453056 N · mm
综合力矩参数　w = 5454072 N · mm

========主轴载荷和作用位置 ========
主轴轴向载荷　Fa = 3106 N
相对位置参数　b1b = 0.1999
前支承 B－径向载荷　FrB = 10385 N
前支承径向载荷作用位置　b1 = 25.99 mm
后支承 A－径向载荷　FrA = 2387 N

14.4　转轴的可靠性分析与设计

传统设计使用了相当大的安全系数，掩盖了可靠性与经济性的矛盾。可靠性试验数据是可靠性设计的基础，但是产品的可靠性是由设计来决定的，由制造和管理来保证的。可靠性设计需要足够的呈现正态分布的设计数据，需要一系列的试验和管理制度。

机械零件（系统）的失效是指在运转过程中达不到人们对它的要求。机械零件（系统）可靠度实质上是它们在给定的运行条件下抵抗失效的能力，反映了应力与强度相互作用的效

果（应力－强度干涉模型）。应力与强度都是随机变量，并且呈正态分布，或是指数分布、二项分布、泊松分布和威布尔分布等。应力是指引起机械零件（系统）失效的一切因素，不仅是构件单位面积的内力，还包括温度、湿度等各种环境因素。强度是指阻止机械零件（系统）失效的一切因素，不仅是材料单位面积能够承受的作用力，还包括加工精度、表面粗糙度等各种因素。

机械零件（系统）可靠性计算的步骤：先用代数法综合应力 s 或强度 δ（以均值 μ 和标准离差 σ 两个数字特征参数描述它们的分布性态）；再用联结方程决定可靠度 R 或机械零件结构参数。其中涉及正态随机变量的代数和、代数差、乘积、商、数学期望和方差的计算。

14.4.1 机械零件的可靠度计算

例 14-4 某发动机零件的应力和强度都服从正态分布，应力的均值 $\mu_s=3500$ MPa 和标准偏差 $\sigma_s=400$ MPa；强度的均值 $\mu_\delta=8200$ MPa 和标准偏差 $\sigma_\delta=800$ MPa。求该零件的可靠度 R。

中心安全系数

$$\eta=\frac{\mu_\delta}{\mu_s}=2.34$$

根据联结方程计算标准正态变量（联结系数）

$$z=-\frac{\mu_\delta=\mu_s}{\sqrt{\sigma_\delta^2+\sigma_s^2}}=-\frac{8200-3500}{\sqrt{800^2+400^2}}=-5.25 \qquad (14-11)$$

从标准正态积分表查出对应的可靠度是 $R=0.9999999$。

讨论：如果零件的热处理质量较差，或工作环境温度变化引起强度波动，其标准偏差变成 $\sigma_\delta=1500$ MPa，在中心安全系数没有改变的情况下，标准正态变量（联结系数）为

$$z=-\frac{\mu_\delta=\mu_s}{\sqrt{\sigma_\delta^2+\sigma_s^2}}-\frac{8200-3500}{\sqrt{1500^2+400^2}}=-3.03$$

从标准正态积分表查出对应的可靠度是 $R=0.99877$。

可见，机械零件（系统）工作时许多随机因素都会导致可靠度的下降。从联结方程看出，提高产品可靠度的途径是：

1）提高强度的均值 μ_δ（如果增大构件的尺寸和质量是可以接受的情况）。

2）降低应力的均值 μ_s（在保证零件功能的前提下，可以降低应力等级，或增大构件的承载面积）。

3）降低应力的分散程度标准偏差 σ_s（对产品的使用规范和工作条件加以限制）。

4）降低强度的分散程度标准偏差 σ_δ（对零件的材料选择和热处理、加工过程等加以限制）。

14.4.2 转轴的可靠性设计

例 14-5 某圆锥齿轮简支轴危险截面上的弯矩 $M=10455$ N·m，转矩 $T=7903$ N·m，应力集中源有键槽、圆角和过盈配合。要求转轴运转 10^7 次后可靠度 $R\geqslant 0.999$，试设计该轴。

1. 确定危险截面上的应力分布

1）最大正应力幅 s_a 的均值（弯曲应力是对称循环，其平均应力为零）

$$\mu_{s_a}=\frac{\mu_M}{\mu_W}=\frac{32}{\pi}\times\frac{M}{\mu_d^3}=\frac{K_{\mu_{sa}}}{\mu_d^3} \tag{14-12}$$

式中，$K_{\mu_{sa}}=\dfrac{32M}{\pi}$是正应力幅均值系数；$\mu_d$ 是轴危险截面直径 d 的均值。

最大正应力幅 s_a 的标准偏差

$$\sigma_{s_a}=v_s\mu_{s_a}=\frac{v_sK_{\mu_{sa}}}{\mu_d^3}=\frac{K_{\sigma_{sa}}}{\mu_d^3} \tag{14-13}$$

式中，v_s 是应力的变异系数，根据经验取 $v_s=0.04\sim0.08$，一般为安全起见，取较大值；$K_{\sigma_{sa}}=v_sK_{\mu_{sa}}$是正应力幅标准偏差系数。

2）最大平均切应力 s_m 的均值（扭转切应力是稳定应力，按照第四强度理论）

$$\mu_{s_m}=\sqrt{3}\tau=\sqrt{3}\frac{\mu_T}{\mu_{W_T}}=\frac{16\sqrt{3}}{\pi}\times\frac{T}{\mu_d^3}=\frac{K_{\mu_{sm}}}{\mu_d^3} \tag{14-14}$$

式中，$K_{\mu_{sm}}=16\sqrt{3}T/\pi$ 是切应力均值系数。

平均切应力 s_m 的标准偏差

$$\sigma_{s_m}=v_s\mu_{s_m}=\frac{v_sK_{\mu_m}}{\mu_d^3}=\frac{K_{\sigma_{sm}}}{\mu_d^3} \tag{14-15}$$

式中，$K_{\sigma_{sm}}=v_sK_{\mu_{sm}}$是平均切应力标准偏差系数。

3）应力比均值

$$\mu_r=\frac{\mu_{s_a}}{\mu_{s_m}}=\frac{K_{\mu_{sa}}}{K_{\mu_{sm}}} \tag{14-16}$$

4）弯曲和扭转复合疲劳应力 s_f 的均值

$$\mu_{s_f}=\mu_{s_a}\sqrt{1+\frac{1}{\mu_r^2}}=\frac{K_{\mu_{sm}}}{\mu_d^3}\sqrt{1+\frac{1}{\mu_r^2}}=\frac{K_{\mu_{sm}}K_{\mu_r}}{\mu_d^3}=\frac{K_{\mu_{sf}}}{\mu_d^3} \tag{14-17}$$

式中，$K_{\mu_r}=\sqrt{1+1/\mu_r^2}$是应力比均值系数；$K_{\mu_{sf}}=K_{\mu_{sm}}K_{\mu_r}$是复合疲劳应力均值系数。

复合疲劳应力 s_f 的标准偏差

$$\sigma_{s_f}=\sigma_{s_a}\sqrt{1+\frac{1}{\mu_r^2}}=\frac{K_{\mu_{sa}}}{\mu_d^3}\sqrt{1+\frac{1}{\mu_r^2}}=\frac{K_{\mu_{sa}}K_{\mu_r}}{\mu_d^3}=\frac{K_{\mu_{sf}}}{\mu_d^3} \tag{14-18}$$

式中，$K_{\mu_{sf}}=K_{\mu_{sa}}K_{\mu_r}$是复合疲劳应力标准偏差系数。

2. 确定转轴的强度分布

转轴材料 30CrMnTi，硬度 >270HBW，强度极限 $\sigma_b=950$ MPa，持久极限 $\sigma_{-1}=\dfrac{\sigma'_{-1}\beta\varepsilon}{k_f}$，其中：

1）试件弯曲持久极限 $\sigma'_{-1}=0.43\sigma_b=0.43\times950=408.5$ MPa。

2）表面质量系数，当加工表面粗糙度 $R_a=0.4$ 和强度极限 $\sigma_b=950$ MPa 时 $\beta=0.85$。

3）尺寸系数，当合金钢 $d>100$ mm，$\varepsilon_\sigma=0.62$，$\varepsilon_r=0.70$，则 $\varepsilon=(\varepsilon_\sigma+\varepsilon_r)/2=0.66/2=0.33$。

4）疲劳应力集中系数，$k_\sigma=1.71$，$k_\tau=2.68$，敏感系数 $q=0.7437$，则

$$k_f=1+(k_\sigma k_\tau-1)q=1+(1.71\times2.68-1)\times0.7437=3.665$$

因此，转轴的持久极限

$$\sigma_{-1}=\frac{\sigma'_{-1}\beta\varepsilon}{k_{\mathrm{f}}}=\frac{408.5\times0.85\times0.66}{3.665}=62.537\ \mathrm{MPa}$$

在弯曲和扭转复合疲劳应力下，零件的强度均值按照应力线与最佳拟合线均值的交点求得。强度均值近似为

$$\mu_{\delta}=\sqrt{\frac{\sigma_{-1}^{2}\sigma_{\mathrm{b}}^{2}(1+\mu_{\mathrm{r}}^{2})}{\sigma_{\mathrm{b}}^{2}\mu_{\mathrm{r}}^{2}+\sigma_{-1}^{2}}}=\sqrt{\frac{62.537^{2}\times950^{2}\times(1+1.528^{2})}{950^{2}\times1.528^{2}+62.537^{2}}}=74.647\ \mathrm{MPa} \quad (14\text{-}19)$$

呈现正态分布的古德曼线图中，复合疲劳应力下零件强度的标准偏差

$$\sigma_{\delta}=v_{\delta}\mu_{\delta}=(0.04\sim0.08)\mu_{\delta}=0.08\times74.647=5.974\ \mathrm{MPa} \quad (14\text{-}20)$$

式中，v_{δ} 是强度的变异系数，根据经验取 $v_{\delta}=0.04\sim0.08$，一般为安全起见，取较大值。

3. 确定转轴直径

根据需要的可靠度 R，使用 MATLAB 正态累积分布反函数 norminv 计算出对应的正态分布变量（联结系数）z 值。将有关数据代入联结方程，经过整理得到六次多项式方程

$$A\mu_{d}^{6}+B\mu_{d}^{3}+C=0 \quad (14\text{-}21)$$

其中，各项系数为

$$\left.\begin{aligned}A&=z^{2}\sigma_{\delta}^{2}-\mu_{\delta}^{2}\\B&=2\mu_{\delta}K_{\mu_{sf}}\\C&=z^{2}K_{\sigma_{sf}}^{2}-K_{\mu_{sf}}^{2}\end{aligned}\right\} \quad (14\text{-}22)$$

调用 MATLAB 函数 roots 求解多项式的根，得到计算结果见表 14-6。

表 14-6　不同可靠度时的计算结果

可靠度 R		0.999	0.990	0.900
联结系数 z		-3.090232	-2.326348	-1.281552
6 次方项系数 A		-5235.6851	-5383.3559	-5517.8887
3 次方项系数 B		19010005205.6842	19010005205.6842	19010005205.6842
常数项 C		-15210864216593358.0	-15639881942708670.0	-16030730447514882.0
转轴危险截面直径 d/mm	1	-67.32	-65.29	-62.70
	2	-67.32	-65.29	-62.70
	3	-52.99	-54.64	-56.90
	4	-52.99	-54.64	-56.90
	5	134.63	130.58	125.39
	6	105.98	109.28	113.79

由于六次多项式方程（14-21）是一个齐次方程，所以表 14-6 中所列的根有两对是相同的负根，它们不符合实际，应该舍去。在其余两个正根中选择较小的作为方程的解。

计算过程使用的中间系数名称，及其计算公式、影响参数和功用见表 14-7。

由于转轴危险截面采用花键联接，其小径是 106 mm $>\mu_{d}=105.98$ mm，所以该转轴危险截面尺寸满足可靠度 $R=0.999$ 的要求。

表 14-7　可靠性计算中的有关系数

序号	系数名称	计算公式	影响参数	功　用
1	弯曲应力幅均值系数	$K_{\mu_{sa}}=\frac{32M}{\pi}$	弯矩 M	弯曲应力幅计算系数
2	弯曲应力幅标准偏差系数	$K_{\sigma_{sa}}=v_s K_{\mu_{sa}}$	变异系数 v_s，$K_{\mu_{sa}}$	
3	扭转平均应力均值系数	$K_{\mu_{sa}}=\frac{16\sqrt{3}T}{\pi}$	转矩 T	扭转平均应力计算系数
4	扭转平均应力标准偏差系数	$K_{\sigma_{sm}}=v_s K_{\mu_{sm}}$	变异系数 v_s，$K_{\mu_{sm}}$	
5	应力比均值系数	$K_{\mu_r}=\sqrt{\mu+{}_{r}^{-2}}$	应力比均值 μ_r	复合疲劳平均应力计算系数
6	复合疲劳平均应力均值系数	$K_{\mu_{sf}}=K_{\mu_{sm}}K_{\mu_r}$	$K_{\mu_{sm}}$，K_{μ_r}	
7	复合平均应力标准偏差系数	$K_{\mu_{sf}}=K_{\sigma_{sm}}K_{\mu_r}$	$K_{\sigma_{sm}}$，K_{μ_r}	
8	联接系数	$R=\frac{2}{2\pi}\int_z^{\infty}e^{-\frac{z2}{2}dz}$	可靠度 R	结构尺寸均值计算系数
9	6 次方项系数	$A=z^2\sigma_\delta^2-\mu_\delta^2$	z，强度的偏差 σ_δ 和均值 μ_δ	
10	3 次方项系数	$B=2\mu_\delta K_{\mu sf}$	μ_δ，复合应力均值系数 $K_{\mu_{sf}}$	
11	常数项	$C=z^2K_{\sigma_{sf}}^2-K_{\mu_{sf}}^2$	z，复合应力偏差系数 $K_{\sigma_{sf}}$ 和 $K_{\mu_{sf}}$	

由此可见，在转轴的可靠性设计中，强度分布的均值 μ_δ 最为重要，对联接方程中的可靠性指数 z 值有决定性的影响，从而对可靠度 $R(t)$ 值有决定性的影响。而且，若各种因素致强度分布的标准偏差 σ_δ 加大，造成机械零件（系统）的可靠度降低，则要求的转轴危险截面直径增大。

综上所述，机械可靠性设计和 MATLAB 实现的主要步骤是：

1）计算转轴危险截面上复合疲劳应力分布的平均应力系数和标准偏差系数。

2）计算转轴危险截面上强度分布的强度均值和强度标准偏差。

3）使用联接方程计算危险截面轴径，其中主要内容是：根据可靠度 R 用正态累积分布反函数 norminv(1 − R) 确定联接系数 z；根据联接系数 z 用正态累积分布函数 normcdf(z) 确定失效概率 F；用正态分布概率密度函数 normpdf(z) 确定失效频度 f；根据多项式各次项系数向量 $\boldsymbol{P}$ 用求解多项式根的函数 roots($\boldsymbol{P}$) 计算转轴直径 d。

14.4.3　M 文件和运算结果

转轴可靠性设计的 M 文件如下。

```
%转轴的可靠性设计与分析
disp('          ******转轴的可靠性设计 *******')
M = input('          输入转轴危险截面上的弯矩(N·mm)      M = ');
T = input('          输入转轴危险截面上的转矩(N·mm)      T = ');
Kmsa = 32 * M/pi;
```

```
fprintf (1',          对称循环弯曲应力幅系数             Kmsa = %3.3f\n'  ,Kmsa)
Kcsa =0.08 * Kmsa;
fprintf (1',          弯曲应力幅标准离差系数             Kcsa = %3.3f\n'  ,Kcsa)
Kmsm =16 * sqrt(3) * T/pi;
fprintf(          稳定扭转平均应力系数               Kmsm = %3.3f\n'  ,Kmsm)
Kcsm =0.08 * Kmsm;
fprintf(          扭转平均应力标准离差系数           Kcsm = %3.3f\n'  ,Kcsm)
rb = Kmsa/Kmsm;
fprintf(          应力幅与平均应力的比值               rb = %3.3f\n'  ,rb)
Kmrb = sqrt(1 +1/rb^2);
fprintf(          应力比均值系数                     Kmrb = %3.3f\n'  ,Kmrb)
Kmsf = Kmsa * sqrt(1 +1/rb^2);
fprintf(          复合疲劳平均应力系数               Kmsf = %3.3f\n'  ,Kmsf)
Kcsf = Kcsa * sqrt(1 +1/rb^2);
fprintf(          复合疲劳平均应力标准离差系数       Kcsf = %3.3f\n'  ,Kcsf)
Cb = input(           输入转轴材料的弯曲强度极限(MPa)     Cb =' );
Csjdc =0.43 * Cb;   % 袖珍机械设计师手册(第 2 版),P17,表 1 -18,结构钢
fprintf(          试件的对称循环弯曲疲劳极限(MPa)      Csjbc = %3.3f\n'  ,Csjdc)
B = input(           输入转轴的表面质量系数                  B =' );
Ec = input(           输入转轴的弯曲绝对尺寸系数             Ec =' );
Et = input(           输入转轴的扭转绝对尺寸系数             Et =' );
E = (Ec + Et)/2;
fprintf(          转轴的弯曲绝对尺寸系数                 E = %3.3f\n'  ,E)
Kc = input(           输入转轴的弯曲疲劳应力集中系数         Kc =' );
Kt = input(           输入转轴的扭转疲劳应力集中系数         Kt =' );
Q = input(           输入转轴的敏感系数                      Q =' );
Kf =1 + Q * (Kc * Kt -1);
fprintf(          转轴的复合疲劳应力集中系数            Kf = %3.3f\n'  ,Kf)
Cdc = Csjdc * B * E/Kf;
fprintf(          转轴的对称循环弯曲疲劳极限(MPa)        Cdc = %3.3f\n'  ,Cdc)
% 复合疲劳应力下强度的均值 Sj,按照应力线与最佳拟合均值线的交点求出
Sj = sqrt(Cdc^2 * Cb^2 * (1 + rb^2)/(Cb^2 * rb^2 + Cdc^2));
fprintf(          转轴强度的均值(MPa)                    Sj = %3.3f\n'  ,Sj)
Cs =0.08 * Sj;
fprintf(          转轴强度的标准离差(MPa)                Cs = %3.6f\n'  ,Cs)
R = input( 输入可靠度        R =' );
% 根据失效概率 F 求联结系数 z 时,用累积分布反函数    z = norminv(F,mu,sigma)
% 根据联接系数 z 求失效概率 F 时,用累积分布函数      F = normcdf(z,mu,sigma)
% 根据联接系数 z 求失效频数 f 时,用概率密度函数      f = normpdf(z,mu,sigma)
% 正态分布 N(mu,sigma),x = z 时,mu =0,sigma =1,为标准正态分布,mu 和 sigma 可以省略
z = norminv(1 - R);
F = normcdf(z);
fprintf(          与可靠度 R 对应的失效概率                F = %3.6f\n'  ,F)
fprintf(          联结系数(可靠性系数,安全指数)            z = %3.6f\n'  ,z)
f = normpdf(z);
```

```
fprintf('       与联结系数 z 对应的失效频数              f = %3.6f\n',f)
a6 = z^2 * Cs^2 - Sj^2;
fprintf('       联结方程多项式中 6 次方项的系数         a6 = %3.4f\n',a6)
a3 = 2 * Sj * Kmsf;
fprintf('       联结方程多项式中 3 次方项的系数         a3 = %3.4f\n',a3)
a0 = z^2 * Kcsf^2 - Kmsf^2;
fprintf('       联结方程多项式中的常数项                a0 = %3.4f\n',a0)
p = [a6 0 0 a3 0 0 a0];
% 求解多项式的根
d = roots(p);
disp('      转轴危险截面直径(联结方程多项式的根)')
fprintf('                d1 = %3.3f mm\n',d(1))
fprintf('                d2 = %3.3f mm\n',d(2))
fprintf('                d3 = %3.3f mm\n',d(3))
fprintf('                d4 = %3.3f mm\n',d(4))
fprintf('                d5 = %3.3f mm\n',d(5))
fprintf('                d6 = %3.3f mm\n',d(6))
disp('     ******转轴可靠性设计的有关参数分析 *******')
RR = [0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 0.99 0.999 0.9999];
zz = norminv(1 - RR);
aa6 = zz.^2 * Cs^2 - Sj^2;
aa3 = 2 * Sj * Kmsf;
aa0 = zz.^2 * Kcsf^2 - Kmsf^2;
p1 = [aa6(1) 0 0 aa3 0 0 aa0(1)];
dr1 = roots(p1);
fprintf('    可靠度 R = 0.5000 时的联结系数      z1 = %3.6f\n',zz(1))
fprintf('                     转轴直径     dr1 = %3.3f mm\n',dr1(6))
p2 = [aa6(2) 0 0 aa3 0 0 aa0(2)];
dr2 = roots(p2);
fprintf('    可靠度 R = 0.6000 时的联结系数      z2 = %3.6f\n',zz(2))
fprintf('                     转轴直径     dr2 = %3.3f mm\n',dr2(6))
p3 = [aa6(3) 0 0 aa3 0 0 aa0(3)];
dr3 = roots(p3);
fprintf('    可靠度 R = 0.7000 时的联结系数      z3 = %3.6f\n',zz(3))
fprintf('                     转轴直径     dr3 = %3.3f mm\n',dr3(6))
p4 = [aa6(4) 0 0 aa3 0 0 aa0(4)];
dr4 = roots(p4);
fprintf('    可靠度 R = 0.8000 时的联结系数      z4 = %3.6f\n',zz(4))
fprintf('                     转轴直径     dr4 = %3.3f mm\n',dr4(6))
p5 = [aa6(5) 0 0 aa3 0 0 aa0(5)];
dr5 = roots(p5);
fprintf('    可靠度 R = 0.9000 时的联结系数      z5 = %3.6f\n',zz(5))
fprintf('                     转轴直径     dr5 = %3.3f mm\n',dr5(6))
p6 = [aa6(6) 0 0 aa3 0 0 aa0(6)];
dr6 = roots(p6);
```

```
fprintf('          可靠度 R = 0.9900 时的联结系数          z6 = %3.6f\n' ,zz(6))
fprintf('                                转轴直径          dr6 = %3.3f mm\n' ,dr6(6))
p7 = [aa6(7) 0 0 aa3 0 0 aa0(7)];
dr7 = roots(p7);
fprintf('          可靠度 R = 0.9990 时的联结系数          z7 = %3.6f\n' ,zz(7))
fprintf('                                转轴直径          dr7 = %3.3f mm\n' ,dr7(6))
p8 = [aa6(8) 0 0 aa3 0 0 aa0(8)];
dr8 = roots(p8);
fprintf('          可靠度 R = 0.9999 时的联结系数          z8 = %3.6f\n' ,zz(8))
fprintf('                                转轴直径          dr8 = %3.3f mm\n' ,dr8(6))
```

计算结果：

```
     ******转轴的可靠性设计 *******
   输入转轴危险截面上的弯矩(N·mm)                  M = 10455e3
   输入转轴危险截面上的转矩(N·mm)                  T = 7903e3
对称循环弯曲应力幅系数                          Kmsa = 106493755.522
弯曲应力幅标准离差系数                          Kcsa = 8519500.442
稳定扭转平均应力系数                            Kmsm = 69714436.168
扭转平均应力标准离差系数                        Kcsm = 5577154.893
应力幅与平均应力的比值                             rb = 1.528
应力比均值系数                                  Kmrb = 1.195
复合疲劳平均应力系数                            Kmsf = 127283237.606
复合疲劳平均应力标准离差系数                    Kcsf = 10182659.008
   输入转轴材料的弯曲强度极限(MPa)                 Cb = 950
试件的对称循环弯曲疲劳极限(MPa)                Csjbc = 408.500
   输入转轴的表面质量系数                           B = 0.85
   输入转轴的弯曲绝对尺寸系数                      Ec = 0.62
   输入转轴的扭转绝对尺寸系数                      Et = 0.70
转轴的弯曲绝对尺寸系数                              E = 0.660
   输入转轴的弯曲疲劳应力集中系数                  Kc = 1.71
   输入转轴的扭转疲劳应力集中系数                  Kt = 2.68
   输入转轴的敏感系数                               Q = 0.7437
转轴的复合疲劳应力集中系数                         Kf = 3.665
转轴的对称循环弯曲疲劳极限(MPa)                   Cdc = 62.537
转轴强度的均值(MPa)                                Sj = 74.676
转轴强度的标准离差(MPa)                            Cs = 5.974080
   输入可靠度                                       R = 0.999
与可靠度 R 对应的失效概率                           F = 0.001000
联结系数(可靠性系数,安全指数)                       z = -3.090232
与联结系数 z 对应的失效频数                         f = 0.003367
联结方程多项式中 6 次方项的系数                    a6 = -5235.6851
联结方程多项式中 3 次方项的系数                    a3 = 19010005205.6842
联结方程多项式中的常数项                           a0 = -15210864216593356.0000
```

```
转轴危险截面直径(联结方程多项式的根)
                d1 = -67.316 mm
                d2 = -67.316 mm
                d3 = -52.992 mm
                d4 = -52.992 mm
                d5 = 134.633 mm
                d6 = 105.984 mm

      ******转轴可靠性设计的有关参数分析 *******
可靠度 R = 0.5000 时的联结系数        z1 = 0.000000
                      转轴直径        dr1 = 119.453 mm
可靠度 R = 0.6000 时的联结系数        z2 = -0.253347
                      转轴直径        dr2 = 118.317 mm
可靠度 R = 0.7000 时的联结系数        z3 = -0.524401
                      转轴直径        dr3 = 117.112 mm
可靠度 R = 0.8000 时的联结系数        z4 = -0.841621
                      转轴直径        dr4 = 115.714 mm
可靠度 R = 0.9000 时的联结系数        z5 = -1.281552
                      转轴直径        dr5 = 113.793 mm
可靠度 R = 0.9900 时的联结系数        z6 = -2.326348
                      转轴直径        dr6 = 109.278 mm
可靠度 R = 0.9990 时的联结系数        z7 = -3.090232
                      转轴直径        dr7 = 105.984 mm
可靠度 R = 0.9999 时的联结系数        z8 = -3.719016
                      转轴直径        dr8 = 103.253 mm
```

```
%绘制联结系数 z 与可靠度 R 的关系线图
figure(1);
plot(zz,RR)
title('\bf 联结系数 z 与可靠度 R 的关系线图\rm R = \int e^{-z^{2}/2}dz')
xlabel('联结系数 z')
ylabel('可靠度 R')
grid;
%绘制轴的直径 d 与可靠度 R 的关系线图
dz = [dr1(6) dr2(6) dr3(6) dr4(6) dr5(6) dr6(6) dr7(6) dr8(6)];
figure(2);
plot(dz,RR)
title('\bf 轴的直径 d 与可靠度 R 的关系线图\it')
xlabel('轴的直径 d/mm')
ylabel('可靠度 R')
grid;
```

输出图 14-11 所示是联接系数 z 与可靠度 R 的关系线图，图 14-12 所示是轴的直径 d 与

可靠度 R 的关系线图。

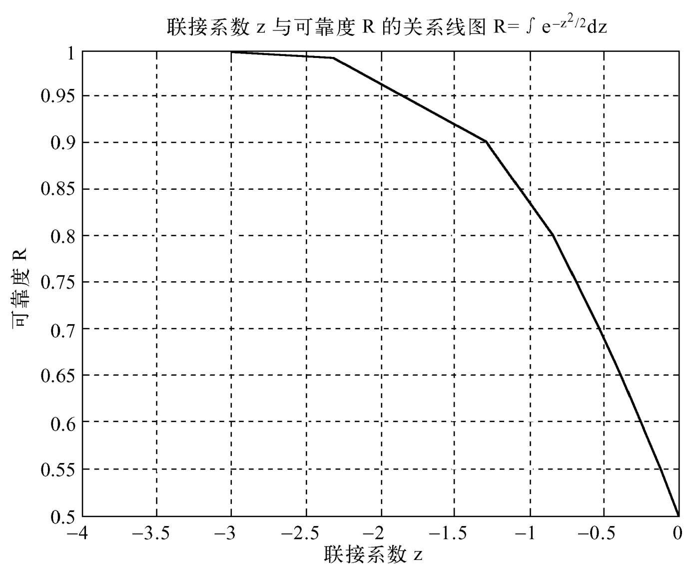


图 14-11 联接系数与可靠度的关系线图

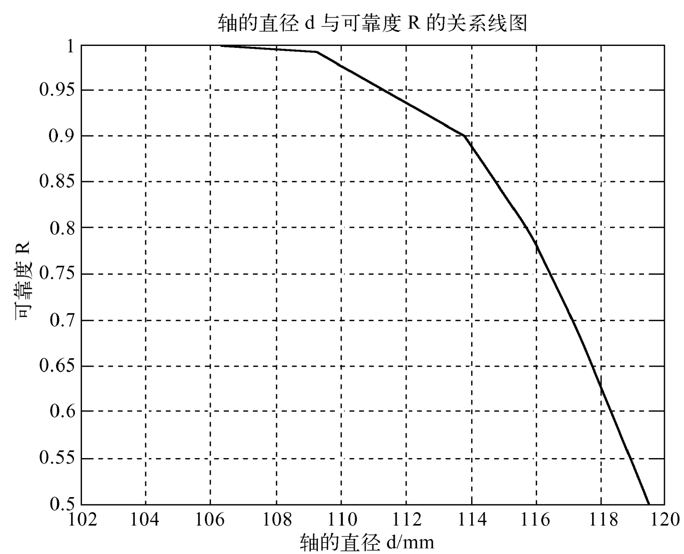


图 14-12 轴径与可靠度的关系线图



第 15 章　机械联接设计计算

为了便于机器的运行、制造、安装、运输、维修以及提高劳动生产率等，广泛地使用了各种联接。机械联接（mechanical joint）有两大类：一类是机器工作时，被联接的零（部）件间可以有相对运动，称为机械动联接，如构件之间各种运动副联接和弹簧的弹性联接等；另一类则是在机器工作时，被联接的零（部）件间不允许产生相对运动，称为机械静联接，如常用的机械紧固件主要有螺栓、螺钉和铆钉等。一架现代飞机使用上百万个各类紧固件，其中仅钻孔和铆接过程的劳动量就占部件制造工时的 20%。

15.1　螺栓联接选用计算

螺纹联接是一种广泛使用的可拆卸的固定连接，具有结构简单、联接可靠、装拆方便等优点。

对单个螺栓联接而言，其受力的形式不外乎是受轴向力或受横向力。在轴向力（包括预紧力）的作用下，螺栓杆和螺纹部分可能发生塑性变形或断裂；而在横向力的作用下，当采用配合螺栓（铰制孔用螺栓）时，螺栓杆和孔壁间可能发生压溃或螺栓杆被剪断等。根据统计分析，在静载荷下螺栓联接是很少发生破坏的，只有在严重过载时螺栓联接才会发生破坏。就破坏性质而言，约 90% 的螺栓属于疲劳破坏。而且疲劳断裂常发生在螺纹根部，即剖面面积较小并且有缺口应力集中的部位。对于受拉螺栓，其主要破坏形式是螺栓杆螺纹部分发生断裂，因而其设计准则是保证螺栓的静力（或疲劳）拉伸强度；对于受剪螺栓，其主要破坏形式是螺栓杆和孔壁间压溃或螺栓杆被剪断，其设计准则是保证联接的挤压强度和螺栓的抗剪强度，其中联接的挤压强度对联接的可靠性起决定性作用。

螺栓联接的强度计算，主要是根据联接的类型、联接的装配情况（预紧或不预紧）、载荷状态等条件，确定螺栓的受力大小和性质。然后按相应的强度条件计算危险剖面的直径（螺纹小径）或校核其强度。螺栓的其他部分（螺纹牙、螺栓头、光杆）和螺母、垫圈的结构尺寸，是根据等强度条件及使用经验确定的，通常不需要进行强度计算，可按螺栓螺纹的公称直径从标准中选定。

15.1.1　受轴向静载荷的螺栓联接计算

压力容器与盖的螺栓联接是比较典型的承受预紧力和工作拉力的紧螺栓联接，螺栓除了

受到压力容器内介质工作压力产生的工作拉力而产生的拉应力 σ 作用以外，还受到螺栓联接需要预紧时螺纹之间摩擦力矩产生的扭转剪切应力 τ 的作用，使螺栓处于拉伸和扭转的复合应力状态下。按照塑性材料的第四强度理论分析，对于公称直径 M10 ~ M68 常用范围内的钢制螺栓，螺纹中扭转剪切应力 τ 大约等于拉应力 σ 的 30%，也就是它对组合强度的影响，表现在数值上将轴向预紧拉应力增大 30%，即危险剖面上的当量应力为

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{\sigma^2 + 3(0.5\sigma)^2} \approx 1.3\sigma$$

因此，受预紧力和工作拉力的紧螺栓联接的螺栓直径计算公式是

$$d_1 \geqslant \sqrt{\frac{1.3Q}{\pi[\sigma]/4}} = \sqrt{\frac{5.2Q}{\pi[\sigma]}} \tag{15-1}$$

式中，Q 是单个螺栓承受的总拉力，它包括工作拉力 F 和残余预紧力 Q_0'，即 $Q = F + Q_0'$；$[\sigma] = \sigma_{smin}/S$ 是螺栓的许用应力，单位为 MPa。螺栓的屈服极限 σ_{smin} 根据螺栓的材料和性能等级参照参考文献[1]表 15-11 选取。

安全系数 S 的选取方法：对于较重要的螺栓联接，按装配时控制预紧力计算，参照参考文献[1]表 16-12 选取；如果按装配时不要求严格控制预紧力计算，则根据参考文献[1]表 15-12，安全系数与螺栓直径有关。先假定螺栓直径，估选安全系数 S，再采用试算法计算螺栓直径。

15.1.2 受轴向变载荷的螺栓联接计算

如果考虑到压力容器内部的压力是变化的，则除了按照螺栓承受的总拉力 Q 进行计算外，还必须计算螺栓的应力幅 σ_a，使其不超过许用应力幅 σ_{aP}，即 $\sigma_a \leqslant \sigma_{aP}$。

（1）计算螺栓的应力幅 σ_a

$$\sigma_a = \frac{F_a}{A} = \frac{(Q - Q_0)/2}{A} = \frac{K_C F_2}{2(\pi d_1^2/4)} = \frac{2K_C F_2}{\pi d_1^2} \tag{15-2}$$

式中，F_2 是螺栓的最大工作拉力；Q_0 是螺栓联接的预紧力；$K_C = \dfrac{K_L}{K_L + K_F}$ 表示相对刚度系数（其中，K_L 是联接件刚度，K_F 是被联接件刚度），根据垫片材料查参考文献[1]表 15-8；d_1 是螺栓小径。

（2）计算许用应力幅 σ_{aP}

$$\sigma_{aP} = \frac{\varepsilon K_t K_u \sigma_{-1t}}{K_\sigma S_a} \tag{15-3}$$

式中，各参数意义及其确定方法见表 15-1。

表 15-1　螺栓许用应力幅计算公式 $\sigma_{aP} = \dfrac{\varepsilon K_t K_u \sigma_{-1t}}{K_\sigma S_a}$

尺寸因数 ε	螺栓直径 d/mm	<12	16	20	24	30	36	42	48	56	64
	ε	1	0.87	0.80	0.74	0.65	0.64	0.60	0.57	0.54	0.53
螺纹制造工艺因数 K_t	切制螺纹 $K_t = 1$，搓制螺纹 $K_t = 1.25$										
受力不均匀因数 K_u	受压螺母 $K_u = 1$，受拉螺母 $K_u = 1.5 \sim 1.6$										

（续）

尺寸因数 ε	螺栓直径 d/mm	<12	16	20	24	30	36	42	48	56	64
	ε	1	0.87	0.80	0.74	0.65	0.64	0.60	0.57	0.54	0.53
试件的疲劳极限 σ_{-1t}/MP	10 钢：120～150		Q235A：120～160		35 钢：170～220		45 钢：190～250		40Cr：240～340		
缺口应力集中因数 K_σ	螺栓材料 σ_B/MPa	400		600		800		1000			
	K_σ	3		3.9		4.8		5.2			
安全因数 S_a	安装螺栓情况	控制预紧力				不控制预紧力					
	S_a	1.5～2.5				2.5～5					

（3）计算实例和 M 文件

例 15-1　一钢制液压缸，内部油压变化范围是 $p=0\sim1$ MPa，液压缸内径 $D=500$ mm，液压缸与盖联接螺栓数目 $z=12$，采用铜皮石棉垫片，剩余预紧力是螺栓工作载荷的 1.6 倍。螺栓材料选用 45 钢，螺纹采用搓制加工，试确定液压缸与盖联接螺栓的公称直径 d。

1）按照静载荷强度条件计算螺栓直径

① 计算单个螺栓的最大轴向工作载荷

$$F=\frac{p\pi D^2/4}{z}=\frac{1.0\times\pi\times500^2}{12\times4}=16362.4617\text{ N}$$

② 计算单个螺栓承受的总拉力。按要求确定剩余预紧力

$$Q_0'=1.6F=1.6\times16362.4617=26179.9388\text{ N}$$

因此，单个螺栓承受的总拉力

$$Q=F+Q_0'=16362.4617+26179.9388=42542.4005\text{ N}$$

③ 计算螺栓直径：螺栓材料选用 45 钢，参照参考文献[1]表 15-11，性能等级 4.6，抗拉强度 $\sigma_{bmin}=600$ MPa，屈服强度 $\sigma_{smin}=400$ MPa。对于较重要的螺栓联接，按装配时控制预紧力计算，参照参考文献[1]表 15-12 取安全系数 $S=2$。因此，螺栓的许用应力

$$[\sigma]=\frac{\sigma_{smin}}{S}=\frac{600}{2}=300\text{ MPa}$$

根据参考文献[1]表 15-10，按照受预紧力和工作拉力的紧螺栓联接，计算螺栓直径

$$d_1\geqslant\sqrt{\frac{5.2Q}{\pi[\sigma]}}=\sqrt{\frac{5.2\times42542.4005}{\pi\times300}}=15.3206\text{ mm}$$

按照参考文献[1]表 15-3，选取螺栓的公称直径 $d=18$ mm（其螺距 $P=2$ mm，小径 $d_1=15.835$ mm 大于计算值 15.3206 mm）。

2）按照变载荷强度条件校核螺栓应力幅

① 计算螺栓的应力幅。根据螺栓联接采用铜皮石棉垫片，查参考文献［1］表 16-7，选取相对刚度系数 $K_C=0.8$。则

$$\sigma_a=\frac{2K_CF_2}{\pi d_1^2}=\frac{2\times0.8\times16362.4617}{\pi\times15.835^2}=33.2340\text{ MPa}$$

② 计算许用应力幅。按照表 15-1：根据螺栓直径 $d=18$ mm，采用 3 次样条插值方法，得到螺栓的尺寸因数 $\varepsilon=0.8309$；根据螺纹采用搓制加工，选取螺纹制造工艺因数 $K_t=$

1.25；根据受压螺母，选取螺纹受力不均匀因数 $K_u=1$；根据螺栓材料 45 钢，选取试件疲劳极限 $\sigma_{-1t}=230$ MPa；根据螺栓材料的强度极限 $\sigma_B=600$ MPa，选取螺纹的应力集中因数 $K_\sigma=3.9$；根据控制预紧力，选取螺栓的安全因数 $S_a=1.8$。因此

$$\sigma_{aP}=\frac{\varepsilon K_t K_u \sigma_{-1t}}{K_\sigma S_a}=\frac{0.8309\times1.25\times1\times230}{3.9\times1.8}=34.0294\ \text{MPa}$$

由于 $\sigma_a \leqslant \sigma_{aP}$，螺栓联接满足变载荷强度条件。

15.1.3 M 文件和运算结果

液压缸螺栓联接的 M 文件如下。

```
% 液压缸螺栓联接选用计算
% M 文件中的表 15-11 和表 15-12 见参考文献[1]
% 已知条件:最大油压(最小油压为 0)、液压缸内径、螺栓数目、剩余预紧力系数
pm = 1;D = 500;z = 12;Cy = 1.6;
% 1 - 按照静载荷强度条件计算螺栓直径
Fm = pi * D^2 * pm/4;
fprintf('     液压缸最大压力     Fm = %3.4f N\n' ,Fm);
F1 = 0;F2 = Fm/z;
fprintf('     螺栓最小工作载荷     F1 = %3.4f N\n' ,F1);
fprintf('     螺栓最大工作载荷     F2 = %3.4f N\n' ,F2);
Qp = Cy * F2;Q = F2 + Qp;
fprintf('     螺栓剩余预紧力     Qp = %3.4f N\n' ,Qp);
fprintf('     螺栓总轴向载荷      Q = %3.4f N\n' ,Q);
sigma_s = input('  表 15-11:选择螺栓材料的屈服极限(MPa) sigma_s = ');
sigma_b = input('  表 15-11:选择螺栓材料的强度极限(MPa) sigma_b = ');
S = input('  表 15-12:选择控制预紧力时的安全系数 S = ');
sigma_p = sigma_s/S;
fprintf('     螺栓的许用应力   sigma_p = %3.4f MPa\n' ,sigma_p);
dj = sqrt(5.2 * Q/(pi * sigma_p));
disp('  按照静载荷强度条件计算螺栓小径(mm): '),dj
d = input('  选择螺栓公称直径(mm):   d = ');
d1 = input('        对应螺栓小径(mm): d1 = ');
P = input('        对应螺栓螺距(mm):    P = ');
```

计算结果：

```
  液压缸最大压力      Fm = 196349.5408 N
  螺栓最小工作载荷     F1 = 0.0000 N
  螺栓最大工作载荷     F2 = 16362.4617 N
  螺栓剩余预紧力      Qp = 26179.9388 N
  螺栓总轴向载荷       Q = 42542.4005 N
表 15-11:选择螺栓材料的屈服极限(MPa) sigma_s = 600
表 15-11:选择螺栓材料的强度极限(MPa) sigma_b = 400
表 15-12:选择控制预紧力时的安全系数 S = 2
  螺栓的许用应力   sigma_p = 300.0000 MPa
```

```
  按照静载荷强度条件计算螺栓小径(mm):
dj =
  15.3206
  选择螺栓公称直径(mm):d = 18
      对应螺栓小径(mm):d1 = 15.835
      对应螺栓螺距(mm):P = 2

% 2-按照变载荷计算螺栓应力幅
Kc = input('螺栓联接相对刚度系数    Kc = ');
Q0 = Q - Kc * F2;
fprintf('螺栓的预紧力                Q0 = %3.4f N\n',Q0);
Fa = (Q - Q0)/2;
fprintf('螺栓轴向载荷变化幅          Fa = %3.4f MPa\n',Fa);
sigma_a = Fa/(pi * d1^2/4);
fprintf('螺栓的应力变化幅      sigma_a = %3.4f MPa\n',sigma_a);
xd = [12 16 20 24 30 36 42 48 56 64];                              % 螺栓直径列表数据
ye = [1 0.87 0.80 0.74 0.65 0.64 0.60 0.57 0.54 0.53];             % 尺寸因数列表数据
epsilon = interp1(xd,ye,d,'spline');                               % 3 次样条插值
fprintf('螺栓的尺寸因数      epsilon = %3.4f\n',epsilon);
Kt = input('表 15-1:选择螺纹制造工艺因数          Kt = ');
Ku = input('表 15-1:选择螺纹受力不均匀因数        Ku = ');
sigma_t = input('表 15-1:选择螺栓试件疲劳极限  sigma_t = ');
Ks = input('表 15-1:选择螺纹的应力集中因数        Ks = ');
Sa = input('表 15-1:选择螺栓的安全因数            Sa = ');
sigma_ap = epsilon * Kt * Ku * sigma_t/(Ks * Sa);
fprintf('螺栓的许用应力幅    sigma_ap = %3.4f MPa\n',sigma_ap);
if sigma_a <= sigma_ap
    disp('@ 螺栓满足变载荷强度条件')
else
    disp('@ 螺栓不满足变载荷强度条件')
end

计算结果:  螺栓联接相对刚度系数    Kc = 0.8
    螺栓的预紧力                Q0 = 29452.4311 N
    螺栓轴向载荷变化幅          Fa = 6544.9847 MPa
    螺栓的应力变化幅      sigma_a = 33.2340 MPa
    螺栓的尺寸因数      epsilon = 0.8309
  表 15-1:选择螺纹制造工艺因数          Kt = 1.25
  表 15-1:选择螺纹受力不均匀因数        Ku = 1
  表 15-1:选择螺栓试件疲劳极限  sigma_t = 230
  表 15-1:选择螺纹的应力集中因数        Ks = 3.9
  表 15-1:选择螺栓的安全因数            Sa = 1.8
    螺栓的许用应力幅    sigma_ap = 34.0294 MPa
  @ 螺栓满足变载荷强度条件
```

15.2 螺栓组联接的优化设计

螺栓作为一种机械静联接件，广泛地应用在各种机械设备、仪器仪表和日常生活器具中。螺栓组联接的设计计算，主要根据被联接机械设备的载荷大小、功能要求和结构特点，确定螺栓组的个数和布置方式。螺栓组联接的优化设计，可以在保证机械设备的可靠性和提高工作寿命的前提下，达到降低成本的目的。

15.2.1 螺栓单价与直径的关系

螺栓组的成本 C_n 取决于螺栓个数 n 和单价 C

$$C_n = nC \tag{15-4}$$

当螺栓的材料、长度和制造工艺等因素相同时，螺栓的单价 C 是其直径 d 的线性函数，可以表示为

$$C = k_1 d - k_2 \tag{15-5}$$

式中，k_1 和 k_2 是与螺栓的材料和长度等因素有关的系数。选择常用的材料为35钢、长度50 mm的六角头半精制螺栓，其单价 C 与直径 d 的线性函数关系如图15-1所示。

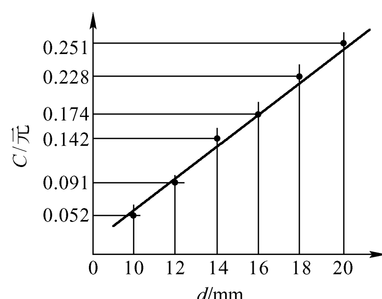


图15-1 螺栓单价与直径的关系

将图15-1中所示的线性函数拟合为一维线性方程，则常数 $k_1 = 0.0205$，$k_2 = 0.1518$。

15.2.2 计算实例与数学模型

例15-2 某压力容器内部气体压强 $p = 1.5$ MPa，容器内径 $D_1 = 250$ mm，螺栓组中心圆直径 $D_2 = 346$ mm，要求剩余预紧力是工作载荷的1.8倍（即 $Q_0' = 1.8Q$），螺栓间距 $t \leqslant 120$ mm，安装时控制预紧力，用衬垫密封，如图15-2所示。试设计成本最低的螺栓组联接方案。

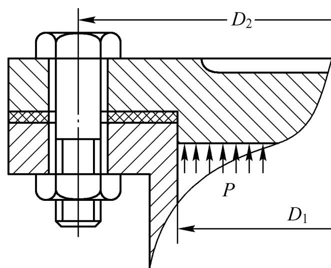


图15-2 压力容器的螺栓组联接

解：建立优化设计的数学模型

1. 设计变量

由于螺栓组的成本取决于螺栓直径 d 和个数 n，因此取设计变量

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ n \end{bmatrix}$$

2. 目标函数

根据式（15-4）和式（15-5），建立螺栓组成本的目标函数

$$f(\boldsymbol{X}) = x_2(k_1 x_1 - k_2)$$

3. 约束条件

螺栓组联接的约束条件要综合考虑容器的密封性、螺栓强度和扳手空间等要求。

1）为了保证螺栓之间的密封压力均匀，防止局部漏气，应使螺栓间距 $t \leqslant 120$ mm，即

$$t=\frac{\pi D_2}{n}\leqslant 120 \tag{15-6}$$

因此，得到约束条件

$$g_1(\boldsymbol{X})=\frac{\pi D_2}{x_2}-120\leqslant 0$$

2）为了保证螺栓联接的装配工艺性，螺栓之间的间隔不能小于 $5d$，即

$$\frac{\pi D_2}{n}\geqslant 5d \tag{15-7}$$

因此，得到约束条件

$$g_2(\boldsymbol{X})=5x_1-\frac{\pi D_2}{x_2}\leqslant 0$$

3）压力容器联接螺栓组的强度条件是

$$\frac{1.3(Q+Q_0')}{\pi d_1^2/4}\leqslant[\sigma]=\frac{\sigma_s}{S} \tag{15-8}$$

式中，系数 1.3 是考虑紧螺栓联接时处于拉伸和扭转复合应力状态，对于公称直径 $d=10\sim68$ mm 的钢制螺栓，按照塑性材料的第四强度理论分析，螺纹拧紧时产生的扭转切应力，表现在数值上将轴向拉应力增大 30%；对于材料为 35 钢的半精制螺栓许用应力 $[\sigma]=\sigma_s/S$，其中屈服极限 $\sigma_s=300$ MPa，安装时控制预紧力时取安全系数 $S=1.4$；d_1 是螺栓小径，粗牙螺栓小径与公称直径 d 的关系是 $d_1=0.85d$；单个螺栓的工作载荷 $Q=p\pi D_1^2/4n$；Q_0' 是剩余预紧力，即 $Q_0'=1.8Q$。

因此，螺栓联接的强度的约束条件

$$g_3(\boldsymbol{X})=\frac{1.3pD_1^2(1+1.8)}{x_2(0.85x_1)^2}-\frac{\sigma_s}{S}\leqslant 0$$

综上所述，这是一个有 3 个不等式约束的二维非线性优化问题。

15.2.3　M 文件和计算结果

采用 MATLAB 求解约束极小值的优化工具箱函数 fmincon 求解。在主程序中输入有关数据：初始点 $\boldsymbol{X}^{(0)}=[14,12]^{\mathrm{T}}$ 和设计变量的边界条件，编制关于目标函数表达式的函数文件和 3 个非线性不等式约束（性能约束）函数表达式的函数文件。

调用优化工具箱函数 fmincon 进行迭代计算，通过选取几个不同的初始点，都得到

$$\boldsymbol{X}^*=\begin{bmatrix}x_1^*\\x_2^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d^*\\n^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11.7371\\16.0000\end{bmatrix}$$

$$f(\boldsymbol{X}^*)=1.4210$$

经检验，极小点 $\boldsymbol{X}^*$ 在螺栓联接强度约束面上，即 $g_2(\boldsymbol{X}^*)=0$。

对优化结果进行圆整，取离散最优解：螺栓直径 $d=12$ mm，螺栓个数 $n=16$。经过检验可知，离散最优解在可行域内。

```
%螺栓组联接成本优化设计
%设计变量:x(1) -螺栓直径 d,x(2) -螺栓个数 n
```

```
x0 = [14;12];
% 调用多维约束优化的目标函数和非线性约束函数
A = [ ];b = [ ];            % 线性不等式约束中设计变量的系数矩阵和常数项列阵
Aeq = [ ];beq = [ ];        % 等式约束参数 Aeq,beq
% 设计变量的下限与上限矩阵 Lb 和 Ub
Lb = [10,4];
Ub = [30,16]
options = optimset('largescale','off');                % 关闭大规模方式
[x,fval,exitflag,output] = fmincon(@lslj_f,x0,A,b,Aeq,beq,Lb,Ub,@lslj_y,options);
if exitflag = = 1
    disp('      @@@@@   优化求解成功   @@@@@')
else
    disp('      @@@@@   优化求解不成功   @@@@@')
end
D2 = 346;t = pi * D2/x(2);                          % 计算螺栓间距
disp('    返回优化算法的数据结构:',output
disp('         ********  螺栓组联接成本优化设计结果   ********')
fprintf('                   螺栓直径   d = %3.4f mm\n',x(1))
fprintf('                   螺栓个数   n = %3.4f\n',x(2))
fprintf('                  螺栓组成本  C = %3.4f 元\n',fval)
fprintf('                 螺栓安装间距   t = %3.4f mm\n',t)

% 调用多维约束优化非线性约束函数(lslj_y)计算最优点 x * 的性能约束函数值
g = lslj_y(x);
disp('         ========      最优点的性能约束函数值       ========')
fprintf('           密封要求螺栓间距  g1 = %3.4f\n',g(1))
fprintf('           安装要求螺栓间距  g2 = %3.4f\n',g(2))
fprintf('           螺栓联接强度条件  g3 = %3.4f\n',g(3))

% 螺栓联接最小成本的目标函数
function f = lslj_f(x);
k1 = 0.0205;k2 = 0.1518;                          % 螺栓单价系数
f = x(2) * (k1 * x(1) - k2);

% 螺栓联接优化设计的非线性不等式性能约束函数
function [g,ceq] = lslj_y(x);
p = 1.5;D1 = 250;D2 = 346;                  % 容器压强、容器内径、螺栓组分布直径
sigma_s = 300;S = 1.4;Q_p = 1.8;            % 35 钢螺栓屈服极限、安全系数、剩余预紧力系数
g(1) = pi * D2/x(2) - 120;                  % 密封要求螺栓间距
g(2) = 5 * x(1) - pi * D2/x(2);             % 安装要求螺栓间距
d1 = 0.85 * x(1);                           % 粗牙螺栓内径与公称直径关系
Q = p * pi * D1^2/4/x(2);                   % 单个螺栓承受的压强载荷
g(3) = 1.3 * (Q_p * Q + Q)/(pi * d1^2/4) - sigma_s/S;     % 紧螺栓联接强度条件
% 非线性等式约束(the nonlinear equality constraints)
ceq = [ ];
```

计算结果：

```
        @@@@@　优化求解成功　@@@@@
    返回优化算法的数据结构：
    output =
            iterations：7
             funcCount：24
              stepsize：1
             algorithm：'medium - scale：SQP,Quasi - Newton,line - search'
         firstorderopt：3.8218e - 007
          cgiterations：[ ]
               message：[1x144 char]

      ********螺栓组联接成本优化设计结果 ********
                                   螺栓直径　d = 11.7371 mm
                                   螺栓个数　n = 16.0000
                                 螺栓组成本　C = 1.4210 元
                               螺栓安装间距　t = 67.9369 mm
     ========最优点的性能约束函数值 ========
                           密封要求螺栓间距　g1 = -52.0631
                           安装要求螺栓间距　g2 = -9.2514
                           螺栓联接强度条件　g3 = 0.0000
```

从 M 文件运算返回优化算法的数据结构信息可知，采用中等规模的拟牛顿搜索算法，1 维搜索精度是 3.8218×10^{-7}，经过 7 次迭代搜索，调用目标函数 24 次，从而获得最优解。

15.3　圆柱螺旋弹簧的设计计算

弹簧是机械和电子行业中广泛使用的一种弹性元件，它在受载时能产生较大的弹性变形，把机械功或动能转化为变形能，而卸载后弹簧的变形消失并回复原状，又将变形能转化为机械功或动能。在一般机械中，最常用的是圆柱螺旋弹簧。

15.3.1　圆柱螺旋弹簧设计计算原理

圆柱螺旋弹簧设计计算的主要任务是：确定满足使用要求所需的弹簧丝直径和弹簧圈数。

1）根据弹簧的强度条件确定弹簧丝直径

$$d \geqslant \sqrt{\frac{8K_Q F_2 C}{\pi[\tau]}}\quad(\mathrm{mm})$$

式中，F_2 是作用于弹簧上的最大轴向载荷，单位为 N；$C=\dfrac{D_2}{d}$称为弹簧指数（或称为旋绕比），是弹簧中径 D_2 与弹簧丝直接 d 的比值，常用值为5～8；K_Q 为曲度系数，它考虑了簧丝升角 α、曲率以及扭矩 T 对弹簧丝应力的影响，曲度系数 $K_Q=\dfrac{4C-1}{4C-4}+\dfrac{0.615}{C}$；$[\tau]$ 为许

用切应力，单位为 MPa，可根据弹簧材料和载荷状况由参考文献[1]表 16-2 和表 16-3 查取。

2）根据弹簧的刚度条件确定弹簧工作圈数

$$n = \frac{Gd\lambda_2}{8F_2C^3}$$

式中，G 是弹簧材料的切变模量，钢为 8×10^4 MPa，青铜为 4×10^4 MPa；λ_2 是弹簧在最大轴向载荷 F_2 作用下的变形量，单位为 mm。

3）对于圈数较多的压缩弹簧，当高径比 $b = H_0/D_2$ 较大，而载荷又达到一定值时，弹簧就会发生侧向弯曲而丧失稳定性，应按下式进行稳定性验算

$$F_C = C_B K H_0 > F_2$$

式中，F_C 是稳定临界载荷，单位为 N；H_0 是弹簧的自由高度，单位为 mm；$K = F/\lambda$ 是弹簧刚度，单位为 N/mm；C_B 是不稳定系数，压缩弹簧不稳定系数与高径比的关系曲线如图 15-3 所示。其中：曲线 1 表示两端固定支承，曲线 2 表示一端固定、一端自由转动支承，曲线 3 表示两端自由转动支承。

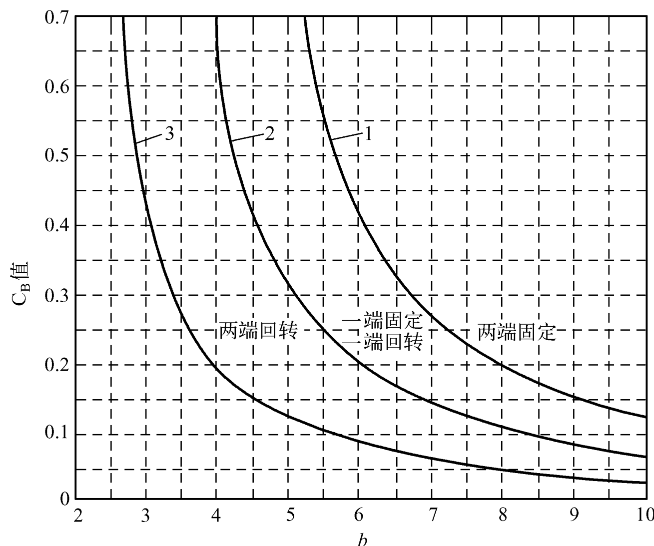


图 15-3　压缩弹簧不稳定系数与高径比的关系曲线

15.3.2　计算实例和 M 文件

例 15-3　试设计一圆柱螺旋压缩弹簧。已知安装初负荷 $F_1 = 500$ N，最大工作负荷 $F_2 = 1200$ N，工作行程 $h = 60$ mm。弹簧套装在 M42 的螺栓杆上，要求弹簧内径 $D_1 < 50$ mm。弹簧端部并紧磨平，两端自由支承。在空气中工作，负荷变化的循环次数在10^4 次以下。

解：

1）选择弹簧丝材料，确定许用切应力：选用 C 级碳素弹簧钢丝，材料的切变模量 $G = 7.85\times10^4$ MPa。因为碳素弹簧钢丝材料的抗拉强度与其直径 d 有关，故应用试算法。

先按照经验类比方法，试取弹簧丝直径 $d' = 6$ mm。由参考文献[1]表 16-5，按照 C 级碳素弹簧钢丝查得弹簧材料的抗拉强度 $\sigma_b = 1420$ MPa。弹簧冷卷制造，按参考文献[1]表 16-3 确

定静负荷压缩弹簧许用切应力

$$[\tau]=0.45\sigma_b=0.45\times1420=639\text{ MPa}$$

2）选择弹簧指数 C：根据参考文献[1]表 16-6 有

$$D_1=D_2-d=(C-1)d\leqslant50\text{ mm}$$

所以

$$C\leqslant\frac{50}{d}+1$$

计算弹簧指数

$$C'=\frac{50}{d'}+1=\frac{50}{6}+1=9.33$$

由参考文献[1]表 16-7，取 $C=9$，根据参考文献[1]式（16-3）计算曲度系数 K

$$K'=\frac{4C-1}{4C-4}+\frac{0.615}{C}=\frac{4\times9-1}{4\times9-4}+\frac{0.615}{9}=1.16$$

3）用试算法求弹簧丝直径 d：根据参考文献[1]式（16-4）

$$d'_t\geqslant\sqrt{\frac{8K'F_2C}{\pi[\tau]}}=\sqrt{\frac{8\times1.16\times1200\times9}{\pi\times639}}=7.072\text{ mm}>d'=6\text{ mm}$$

不安全。

再试取 $d''=7$ mm，由参考文献[1]表 16-5 查得 $\sigma_b=1370$ MPa，再由参考文献[1]表 16-3 确定弹簧许用切应力 $[\tau]=0.45\sigma_b=0.45\times1370=616.5$ MPa。计算弹簧指数

$$C''=\frac{50}{d'}+1=\frac{50}{7}+1=8.14$$

由参考文献[1]表 16-7，取 $C=8$，由参考文献[1]式（16-3）计算曲度系数

$$K''=\frac{4C-1}{4C-4}+\frac{0.615}{C}=\frac{4\times8-1}{4\times8-4}+\frac{0.615}{8}=1.18$$

则

$$d''_t\geqslant\sqrt{\frac{8K''_QF_2C}{\pi[\tau]}}=\sqrt{\frac{8\times1.18\times1200\times8}{\pi\times616.5}}=6.852\text{ mm}<d''=7\text{ mm}$$

安全。故取弹簧丝直径 $d=7$ mm，弹簧指数 $C=8$。因此

弹簧外径　$D=(C+1)d=(8+1)\times7=63$ mm

弹簧中径　$D_2=Cd=8\times7=56$ mm

弹簧内径　$D_1=(C-1)d=(8-1)\times7=49$ mm

可见，42 mm $<D_1<$ 50 mm，弹簧符合安装结构要求。

4）求弹簧的有效圈数 n：根据参考文献[1]式（16-6）计算弹簧刚度

$$F'=\frac{F}{f}=\frac{F_2-F_1}{h}=\frac{1200-500}{60}=11.67\text{ N/mm}$$

弹簧的有效圈数 n 可由参考文献[1]式（16-7）算得

$$n=\frac{Gd}{8C^3F'}=\frac{7.85\times10^4\times7}{8\times8^3\times11.67}=11.5$$

取弹簧圈数 $n=12$，两端的支承圈 $n_2=2$，则弹簧的总圈数为

$$n_1=n+n_2=12+2=14$$

5）确定弹簧的实际刚度 F'_{SJ}并计算其变形量 f_1 和 f_2。弹簧的有效圈数 n 圆整后，需要根据参考文献[1]式（16-6）计算弹簧的实际刚度 F'_{SJ}，其值为

$$F'_{SJ}=\frac{Gd}{8C^3n}=\frac{7.85\times10^4\times7}{8\times8^3\times12}=11.18\ \text{N/mm}$$

弹簧的变形量为

$$f_1=\frac{F_1}{F'_{SJ}}=\frac{500}{11.18}=44.72\ \text{mm}$$

$$f_2=\frac{F_2}{F'_{SJ}}=\frac{1200}{11.18}=107.34\ \text{mm}$$

6）弹簧结构设计：选定两端支座，并由参考文献[1]表16-4计算出全部尺寸（略）。

7）弹簧稳定性计算：由于弹簧套装在螺杆上，不会产生工作失稳情况。

8）绘制弹簧工作图（略）。

编制M文件如下：

```
% 圆柱螺旋压缩弹簧设计计算
% M文件中的表16-3和表16-5见参考文献[1]
% 已知条件:最小和最大弹簧载荷、工作行程、剪变模量、许用应力、最小内径
F1 =500;F2 =1200;h =60;G =7.85e4;sigma =1420;D1_min =50;
% 1 -按照强度条件确定弹簧丝直径
% 由于弹簧丝材料强度与它的直径相关,需要采用试算法
ds =input('试选弹簧丝直径(mm) ds =');
sigma_b =input('按照表16-3,选择弹簧丝强度极限(MPa) sigma_b =');
tau_p =0.45 * sigma_b;
fprintf('许用切应力 tau_p =%3.4f MPa\n',tau_p);
Cj =D1_min/ds +1;
fprintf('计算弹簧指数 Cj =%3.4f\n',Cj);
C =input('按照表16-5,选择弹簧指数 C =');
Kq =(4 * C -1)/(4 * C -4) +0.615/C;
fprintf('计算曲度系数 Kq =%3.4f\n',Kq);
dj =sqrt(8 * Kq * F2 * C/(pi * tau_p));
fprintf('计算簧丝直径 dj =%3.4f mm\n',dj);
if dj >ds
    disp('不安全,需要重选弹簧丝直径')
else
    disp('安全')
    d =ds;  % 确定弹簧丝直径
end
```

第1次试算：

```
  试选弹簧丝直径(mm) ds =6
  按照表16-3,选择弹簧丝强度极限(MPa) sigma_b =1420
许用切应力 tau_p =639.0000 MPa
计算弹簧指数 Cj =9.3333
  按照表16-5,选择弹簧指数 C =9
计算曲度系数 Kq =1.1621
计算簧丝直径 dj =7.0721 mm
  不安全,需要重选弹簧丝直径
```

第 2 次试算：

```
    试选弹簧丝直径(mm) ds = 7
    按照表 16-3,选择弹簧丝强度极限(MPa) sigma_b = 1370
  许用切应力 tau_p = 616.5000 MPa
  计算弹簧指数 Cj = 8.1429
    按照表 16-5,选择弹簧指数 C = 8
  计算曲度系数 Kq = 1.1840
  计算簧丝直径 dx = 6.8520 mm
    安全
```

```
% 2 - 按照刚度条件确定弹簧工作圈数
Kj = (F2 - F1)/h;
fprintf('    计算弹簧刚度 Kj = %3.4f N/mm\n',Kj);
nj = G * d/(8 * C^3 * Kj);
fprintf('    计算弹簧圈数 nj = %3.4f\n',nj);
n = input('      选取弹簧工作圈数 n = ');
n2 = input('      选取弹簧支承圈数 n2 = ');
n1 = n + n2;
fprintf('    弹簧总圈数 n1 = %3.4f\n',n1);
% 计算弹簧的刚度和变形量
Kp = G * d/(8 * C^3 * n);
f1 = F1/Kp;f2 = F2/Kp;
fprintf('    弹簧实际刚度 Kp = %3.4f N/mm\n',Kp);
fprintf('    弹簧最小变形量 f1 = %3.4f mm\n',f1);
fprintf('    弹簧最大变形量 f2 = %3.4f mm\n',f2);
```

计算结果：

```
  计算弹簧刚度 Kj = 11.6667 N/mm
  计算弹簧圈数 nj = 11.4990
    选取弹簧工作圈数 n = 12
    选取弹簧支承圈数 n2 = 2
  弹簧总圈数 n1 = 14.0000
  弹簧实际刚度 Kp = 11.1796 N/mm
  弹簧最小变形量 f1 = 44.7243 mm
  弹簧最大变形量 f2 = 107.3383 mm
```

```
% 3 - 弹簧稳定性校核
D2 = C * d;
fprintf('    弹簧中径    D2 = %3.4f mm\n',D2);
delta = input('      选取相邻两圈弹簧丝间隙系数 delta = ');
t = (1 + delta) * d + f2/n;                          % 圆柱螺旋压缩弹簧
fprintf('    弹簧节距    t = %3.4f mm\n',t);
Y = input('      选取弹簧端部结构类型 Y = ');          % 弹簧端部结构类型:1 或是 2
if Y == 1
    H0 = n * t + (n2 - 0.5) * d;
```

```
elseif Y = =2
    H0 = n * t + (n2 +1) * d;
end
fprintf('弹簧自由高度    H0 = %3.4f mm\n',H0);
b = H0/D2;
fprintf('弹簧高径比      b = %3.4f\n',b);
% 采用 3 次样条插值确定圆柱螺旋弹簧不稳定系数 Cb
DBZC = input('选取弹簧端部支承类型 DBZC =');% 弹簧端部支承类型:1、2、3
switch DBZC
    case 1                                   % 1 -弹簧两端固定支承
        bx = [5.3 5.4 5.5 5.75 6 6.5 7 7.5 8 8.5 9 10];
Cby = [0.80 0.65 0.60 0.45 0.40 0.325 0.265 0.225 0.19 0.165 0.145 0.125];
    case 2                                   % 2 -弹簧一端固定、一端自由支承
        bx = [3.7 3.85 4 4.5 5 5.5 6 6.5 7 8 9 10];
        Cby = [0.80 0.60 0.50 0.31 0.24 0.20 0.17 0.15 0.13 0.105 0.08 0.075];
    case 3                                   % 3 -弹簧两端自由支承
        bx = [2.6 2.8 3 3.5 4 4.5 5 5.5 6 7 8 9 10];
        Cby = [0.8 0.5 0.4 0.27 0.21 0.15 0.12 0.09 0.075 0.05 0.04 0.03 0.025];
end
Cb = interp1(bx,Cby,b,'spline');             % 3 次样条插值
fprintf('弹簧不稳定系数      Cb = %3.4f\n',Cb);

% 绘制圆柱螺旋弹簧不稳定系数 Cb 线图
plot(bx,Cby,'ro',bx,Cby);grid on;
xlabel('\bf\it b');ylabel('\bf\it Cb');title('\bf 弹簧不稳定系数线图');
switch DBZC
    case 1
        gtext('\bf 1 -弹簧两端固定支承')
    case 2
        gtext('\bf 2 -弹簧一端固定、一端自由支承')
    case 3
        gtext('\bf 3 -弹簧两端自由支承')
end
Fc = Cb * Kp * H0;
fprintf('弹簧稳定临界载荷    Fc = %3.4f N\n',Fc);
if Fc < F2
    disp('弹簧工作不稳定,需要改变参数或是加装导向装置')
else
    disp('弹簧工作稳定')
end
```

计算结果:

```
弹簧中径    D2 =56.0000 mm
  选取相邻两圈弹簧丝间隙系数 delta =0.15
弹簧节距    t =16.9949 mm
  选取弹簧端部结构类型 Y =1
```

弹簧自由高度　H0 = 214.4383 mm
弹簧高径比　　b = 3.8293
　选取弹簧端部支承类型 DBZC = 3
弹簧不稳定系数　　Cb = 0.2278
弹簧稳定临界载荷　Fc = 546.0792 N
　弹簧工作不稳定，需要改变参数或是加装导向装置

图 15-4 所示为弹簧支承结构对应的不稳定系数线图。

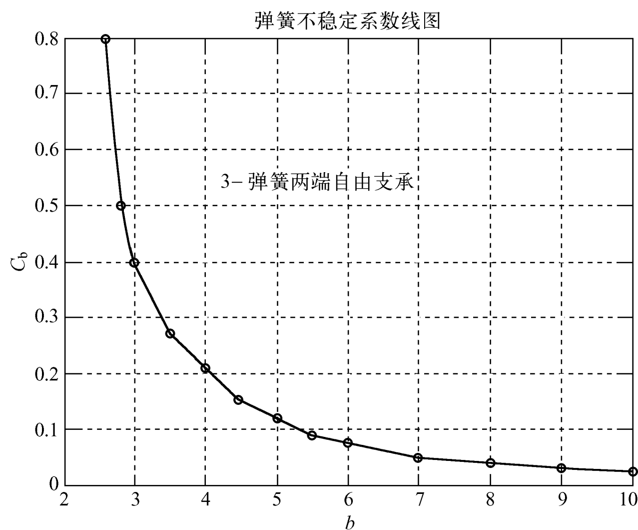


图 15-4　弹簧支承结构对应的不稳定系数线图



第16章　优化设计分析和曲线拟合

优化设计（optimal design）是指以数学中的最优化理论为基础，以计算机为手段，根据设计所追求的性能目标，建立目标函数，在满足给定的各种约束条件下，从多种方案中选择最佳方案的设计方法。

曲线拟合（curve fitting）是指选择适当的曲线类型或是多项式来拟合观测数据，并用拟合的曲线方程或多项式分析两变量间的关系。

16.1　优化设计模型的几何描述

求 n 个设计变量目标函数的最小化问题，可以想象为在 $n+1$ 维的坐标系内找出一个超曲面的最小值问题。由于在平面图内只能表示出 $n\leqslant 2$ 维欧氏空间的优化问题，可以借助MATLAB出色的数据可视化功能，对二维优化问题作几何描述，深入理解它的形态和基本要素。

16.1.1　设计空间的几何描述方法

二维优化问题的目标函数 $f(x_1,x_2)$ 和约束函数 $g_u(x_1,x_2)$，$(u=1,2,\cdots,m)$ 的几何形态是在三维空间中的曲面，该三维空间的三个坐标轴分别是 x_1，x_2 和 f（或 g）。采用 MATLAB 进行相应的几何描述，使用的主要功能命令和步骤是：

1）运用“linspace”和“meshgrid”命令配合，按照线性均匀间隔矢量生成数据的网络矩阵。

2）建立优化设计数学模型中的目标函数和约束函数表达式。

3）运用“surfc”命令，在三维坐标中绘制函数曲面。

4）运用“contour3”命令，在三维坐标中绘制三维等值线。

5）运用“contour”和“clabel”命令配合，在二维平面中绘制二维等值线并且标注高程。

在编制图形处理程序时应当注意以下3点：第一，函数表达式中设计变量数组线性离散后的每个元素的乘、除运算或幂运算应当加入点符号，以满足 MATLAB 中对数组运算的要求；第二，由于优化设计数学模型中一般含有多个约束函数，为了能够在同一个图形窗口中同时显示它们的曲面，采用了“hold on”命令，为同一个图形窗口中保持已经存在的图形；第三，为了避免通常在 MATLAB 图形窗口中因二维坐标轴的比例不同而造成显示的图形失真情形，采用了“axis equal”命令使二维坐标轴的定标因子相等。

16.1.2　应用实例M文件和描述图形

例16-1　二维非线性约束优化设计问题

$$\left.\begin{aligned}&\min f(\boldsymbol{X}) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 + 4\,(\boldsymbol{X} \in D \subset R^2)\\&\text{s. t. } g_1(\boldsymbol{X}) = x_1 - x_2 + 2 \geqslant 0\\&g_2(\boldsymbol{X}) = -x_1^2 + x_2 - 1 \geqslant 0\\&g_3(\boldsymbol{X}) = x_1 \geqslant 0\end{aligned}\right\}$$

该问题的目标函数 $f(\boldsymbol{X})$ 的等值线是以（2，0）为圆心的同心圆族。如图 16-1 和图 16-3 所示，约束函数 $g_1(\boldsymbol{X})$ 的等值线是与二维设计平面上 X_1 轴正向成45°角的斜线族；约束函数 $g_2(\boldsymbol{X})$ 的等值线是以二维设计平面上 X_2 轴为对称轴、开口向上的抛物线族；约束函数 $g_3(\boldsymbol{X})$ 的等值线是与二维设计平面上 X_2 轴平行的直线族。显然，图中约束函数 $g_1(\boldsymbol{X})=0$ 和 $g_3(\boldsymbol{X})=0$ 时的两条直线，与 $g_2(\boldsymbol{X})=0$ 时的一条抛物线所围成的封闭区域，就是二维设计平面中的可行域 $D \subset R^2$。

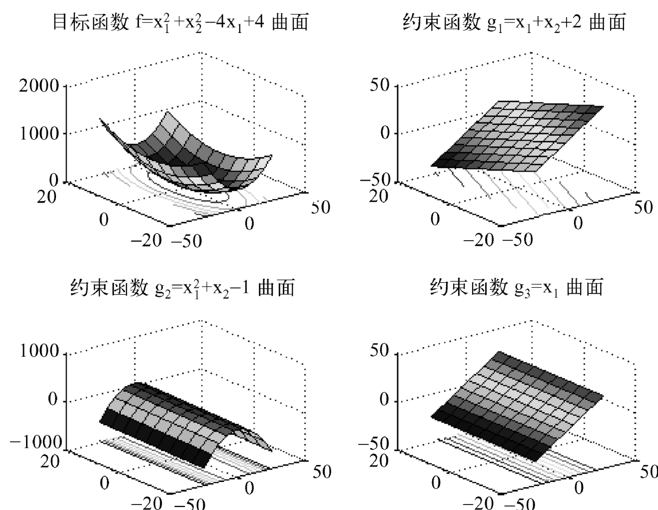


图 16-1　二维约束优化问题的目标函数和约束函数曲面（例 16-1）

图 16-2 所示是单独绘制的目标函数和约束函数各个曲面图，可见约束曲面 $g_1(\boldsymbol{X})$、$g_2(\boldsymbol{X})$ 和 $g_3(\boldsymbol{X})$ 与二维设计平面 X_1OX_2 一般并不是正交状态。

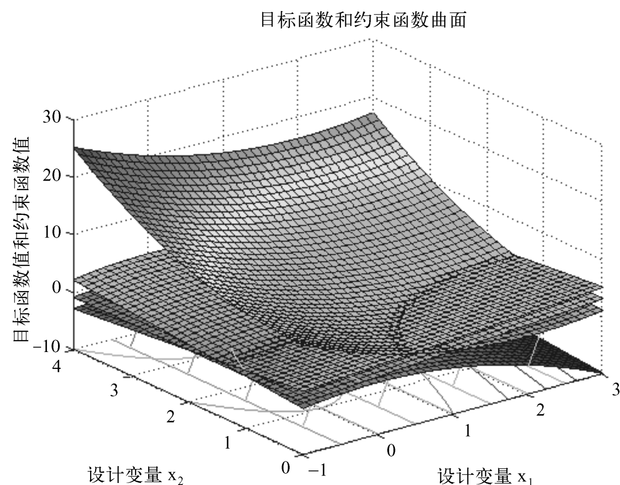


图 16-2　二维约束优化问题的目标函数和约束函数曲面组合（例 16-1）

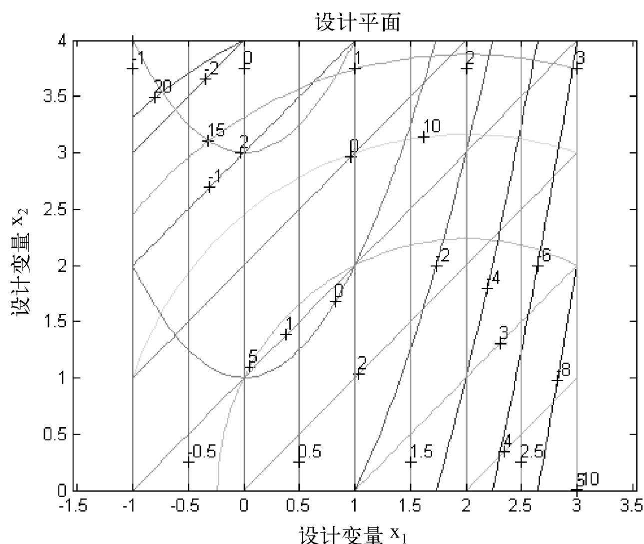


图 16-3　二维约束优化问题的设计平面（例 16-1）

例 16-2　二维非线性约束优化问题（如图 16-4 所示）

$$\left.\begin{array}{l}\min f(\boldsymbol{X})=x_1+x_2^2\ (\boldsymbol{X}\in D\subset R^2)\\ \text{s. t. } g_1(\boldsymbol{X})=9-x_1^2-x_2^2\geqslant 0\\ g_2(\boldsymbol{X})=1-x_1-x_2\geqslant 0\\ g_3(\boldsymbol{X})=x_1\geqslant 0\end{array}\right\}$$

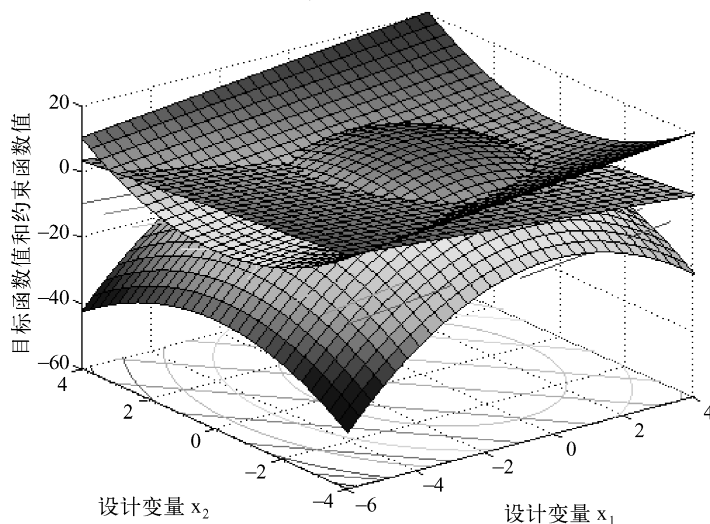


图 16-4　二维约束优化问题的目标函数和约束函数曲面组合（例 16-2）

如图 16-5 所示，目标函数 $f(\boldsymbol{X})$ 等值线是以 x_1 轴为对称轴的抛物线族。约束函数 $g_1(\boldsymbol{X})=0$ 的线图是以（0，0）为圆心、半径为 3 的圆，约束函数 $g_2(\boldsymbol{X})=0$ 的线图是通过点（0，1）和点（1，0）的直线。约束极小点是 $\boldsymbol{X}^*=[-3,0]^{\mathrm{T}}$。

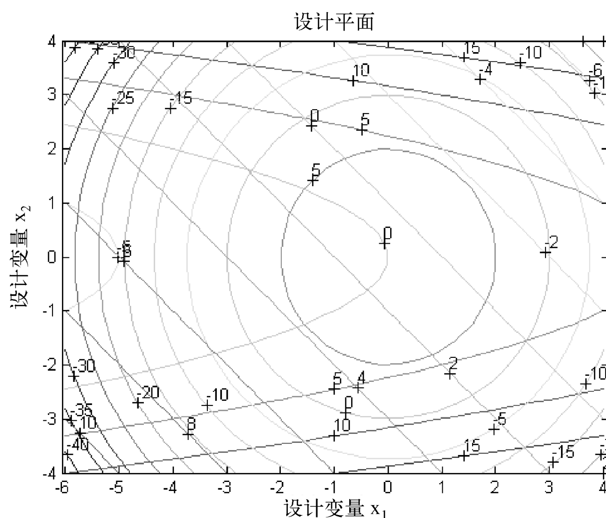


图 16-5 二维约束优化问题的设计平面（例 16-2）

例 16-3 二维非线性无约束优化设计问题

$$\min f(\boldsymbol{X}) = x_1^4 - 2x_1^2 x_2 + x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 + 5$$

目标函数 $f(\boldsymbol{X})$ 曲面、二维等值线和三维等值线如图 16-6、图 16-7 和图 16-8 所示。

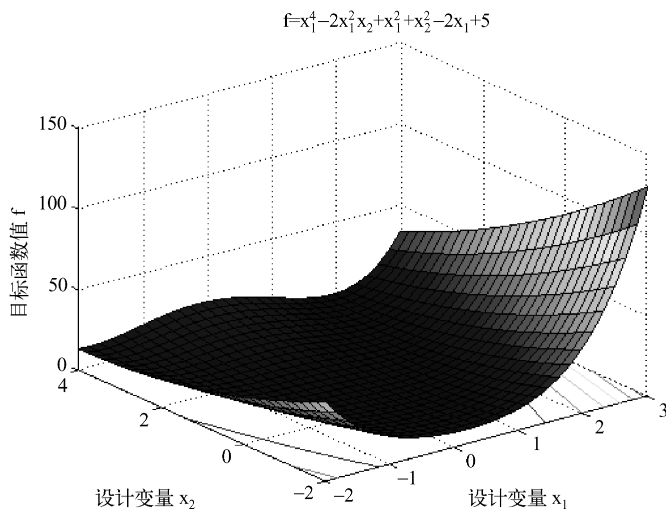


图 16-6 二维优化问题的目标函数（例 16-3）

例 16-4 二维非线性无约束优化设计问题

$$\min f(\boldsymbol{X}) = x_1^4 - 2x_1^2 x_2 + x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1 x_2 - 4.5x_1 - 4x_2 + 4$$

目标函数 $f(\boldsymbol{X})$ 曲面、二维等值线和三维等值线如图 16-9、图 16-10 和图 16-11 所示。

图 16-1 ~ 16-3，以及图 16-4 和 16-5，分别对二维约束优化问题例 16-1 和例 16-2 进行了几何描述；图 16-6 ~ 16-8，以及图 16-9 ~ 16-11，分别对两个二维无约束优化问题进行了几何描述。

从 MATLAB 绘制 $f(\boldsymbol{X})$ 等值线的形状及其分布规律可见，当 $f(\boldsymbol{X})$ 是一个二维高次非线性

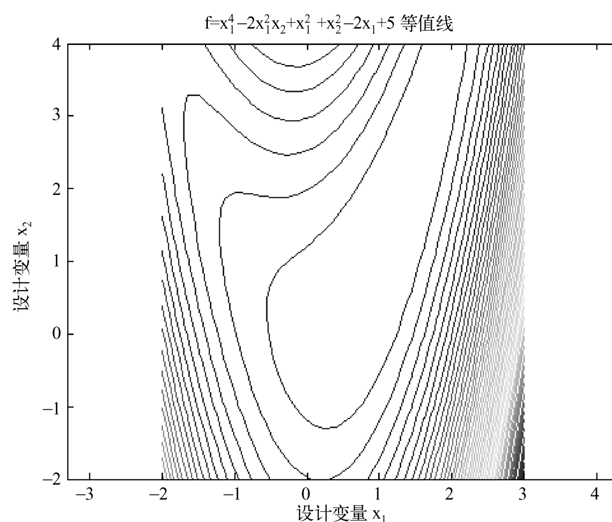


图 16-7　二维优化问题目标函数的二维等值线（例 16-3）

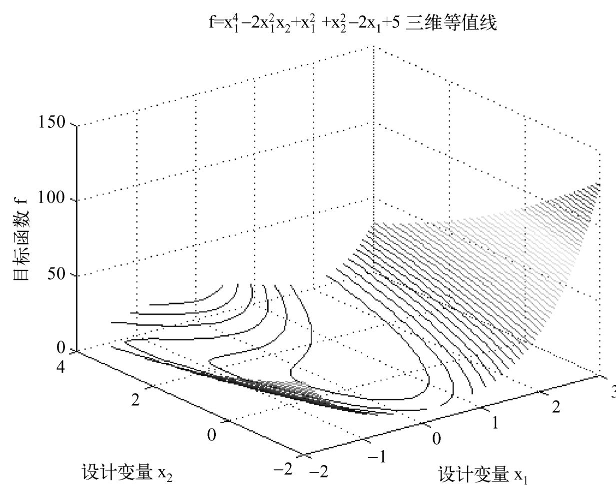


图 16-8　二维优化问题目标函数的三维等值线（例 16-3）

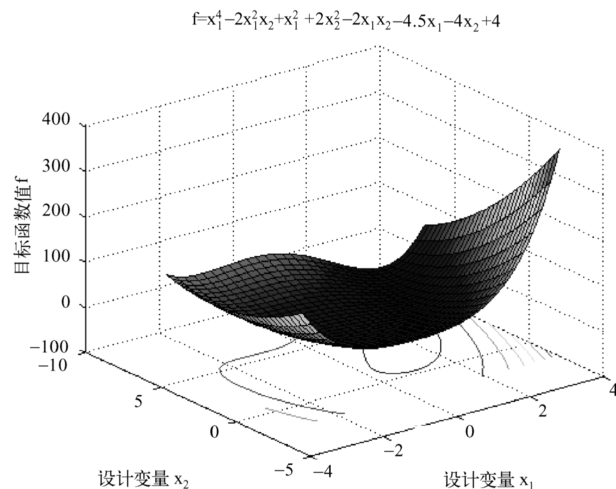


图 16-9　二维优化问题的目标函数（例 16-4）

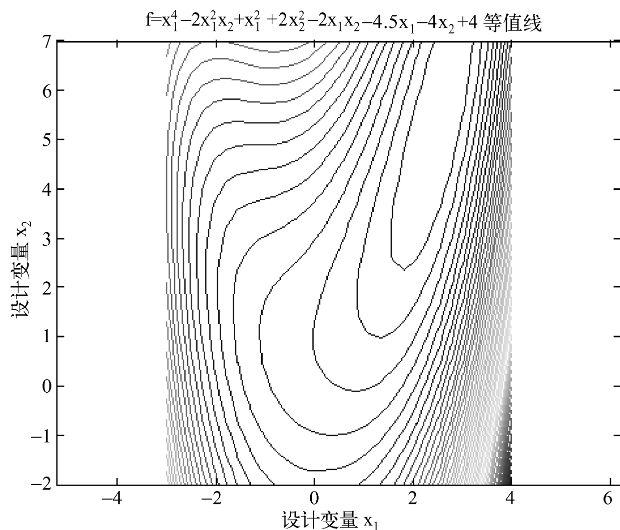


图 16-10 二维优化问题目标函数的二维等值线（例 16-4）

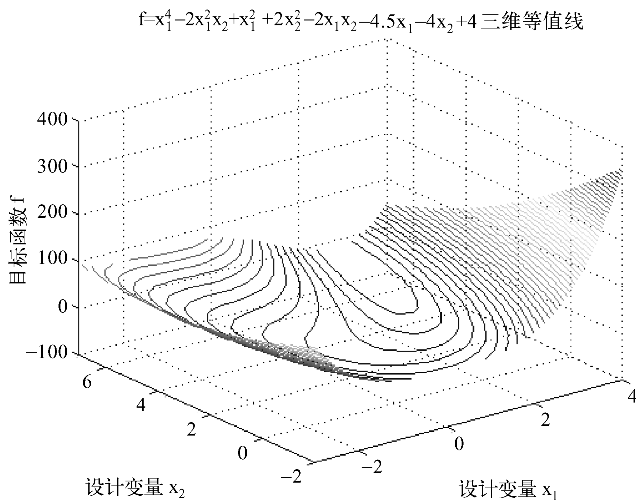


图 16-11 二维优化问题目标函数的三维等值线（例 16-4）

函数时，其等值线的形态比较复杂，而且可能存在多个极值点。在等值线较稠密的部位，$f(\boldsymbol{X})$ 值变化越迅速。对于求 $f(\boldsymbol{X})$ 极小化问题来说，越靠近极值点的等值线所代表的 $f(\boldsymbol{X})$ 值越小；在极值点附近的等值线呈现椭圆形状，其中心就是极值点 $\boldsymbol{X}^*$。

如图 16-6 ~ 图 16-11 所示，由于目标函数 $f(\boldsymbol{X})$ 在极值点 $\boldsymbol{X}^*$ 附近的形态比较平缓，造成该区域的等值线分布较稀疏，极值点 $\boldsymbol{X}^*$ 的位置不是十分明显。

应当指出，在 MATLAB 图形处理中的颜色映像本质上是一个数值矩阵。当在曲面图或等高线图中加入表现颜色的输入参数矩阵时，就可以利用色彩表现或加强目标函数的某些特征，如函数的梯度和方向导数等，直观地了解目标函数在不同方向的变化规律和最快上升或下降方向等特性。

编制二维优化问题几何描述的 M 文件如下：

```
% 1 - 二维约束优化问题函数子窗口几何描述(例 16-1 分图)
%按(初值,终值,间隔数)等间隔矢量产生二维网格矩阵
xx1 = linspace( -25,25,10);
xx2 = linspace( -20,20,10);
[x1,x2] = meshgrid(xx1,xx2);
%目标函数
f = x1.^2 + x2.^2 - 4 * x1 + 4;
subplot(2,2,1);                              %选择 2 行 2 列的第 1 个子窗口
surfc(x1,x2,f);
title( \bf 目标函数 f = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 + 4 曲面 )
%约束函数 g1
g1 = x1 - x2 + 2;
subplot(2,2,2);                              %选择 2 行 2 列的第 2 个子窗口
surfc(x1,x2,g1);
title( \bf 约束函数 g_1 = x_1 - x_2 + 2 曲面 )
%约束函数 g2
g2 = - x1.^2 + x2 - 1;
subplot(2,2,3);                              %选择 2 行 2 列的第 3 个子窗口
surfc(x1,x2,g2);
title( \bf 约束函数 g_2 = - x_1^2 + x_2 - 1 曲面 )
%约束函数 g3
g3 = x1;
subplot(2,2,4);                              %选择 2 行 2 列的第 4 个子窗口
surfc(x1,x2,g3);
title( \bf 约束函数 g_3 = x_1 曲面 )

% 2 - 二维约束优化几何描述(例 16-1 组合)
%按等间隔矢量产生二维网格矩阵
xx1 = linspace( -1,3,40);
xx2 = linspace(0,4,40);
[x1,x2] = meshgrid(xx1,xx2);
%数学模型
f = x1.^2 + x2.^2 - 4 * x1 + 4;              %目标函数 f
g1 = x1 - x2 + 2;                            %约束函数 g1
g2 = - x1.^2 + x2 - 1;                       %约束函数 g2
g3 = x1;                                     %约束函数 g3
%设计空间
figure(1);
surfc(x1,x2,f);
title( \bf 目标函数和约束函数曲面 );
xlabel( 设计变量\bf x_1' );
ylabel( 设计变量\bf x_2' );
zlabel( 目标函数值和约束函数值 );
hold on;                                     %保持图形
surfc(x1,x2,g1);
surfc(x1,x2,g2);
```

```
surfc(x1,x2,g3);
%设计平面
figure(2);
h = contour(x1,x2,f);
clabel(h);
axis equal                                  % 两坐标轴的定标因子相等
title('\bf 设计平面');
xlabel('设计变量\bf x_1');
ylabel('设计变量\bf x_2');
hold on;
h = contour(x1,x2,g1);
clabel(h);
h = contour(x1,x2,g2);
clabel(h);
h = contour(x1,x2,g3);
clabel(h);
```

例 16-1 的 M 文件运行结果如图 16-1、图 16-2 和图 16-3 所示。

```
% 3 - 二维优化几何描述(例 16-2、例 16-3、例 16-4)
%按等间隔矢量产生二维网格矩阵
sx1 = linspace( -6,4,30);
sx2 = linspace( -4,4,30);
[x1,x2] = meshgrid(sx1,sx2);
% 1 - 约束优化问题数学模型(例 16-2)
f = x1 + x2.^2;                             %目标函数 f
g1 = -x1.^2 - x2.^2 +9;                     %约束函数 g1
g2 = -x1 - x2 +1;                           %约束函数 g2
%设计空间
figure(1);
surfc(x1,x2,f);
title('\bf 目标函数和约束函数曲面');
xlabel('设计变量\bf x_1');
ylabel('设计变量\bf x_2');
zlabel('目标函数值和约束函数值');
hold on;                                    %保持图形
surfc(x1,x2,g1);
surfc(x1,x2,g2);
%设计平面
figure(2);
h = contour(x1,x2,f);
clabel(h);
axis equal;                                 % 两坐标轴的定标因子相等
title('\bf 设计平面');
xlabel('设计变量\bf x_1');
ylabel('设计变量\bf x_2');
hold on;
```

```
h = contour(x1,x2,g1);
clabel(h);
h = contour(x1,x2,g2);
clabel(h);
%
%按等间隔矢量产生二维网格矩阵
sy1 = linspace(-2,3,30);
sy2 = linspace(-2,4,30);
[y1,y2] = meshgrid(sy1,sy2);
% 2-无约束优化问题目标函数(例 16-3)
f01 = y1.^4-2*y2.*y1.^2+y1.^2+y2.^2-2*y1+5;
figure(3);
surfc(y1,y2,f01);
title('\bf f=x_1^4-2x_1^2x_2+x_1^2+x_2^2-2x_1+5');
xlabel('设计变量\bf x_1');
ylabel('设计变量\bf x_2');
zlabel('目标函数值\bf f');
figure(4);
h = contour(y1,y2,f01,50);
axis equal;
title('\bf f=x_1^4-2x_1^2x_2+x_1^2+x_2^2-2x_1+5 等值线');
xlabel('设计变量\bf x_1');
ylabel('设计变量\bf x_2');
figure(5);
h = contour3(y1,y2,f01,50);
title('\bf f=x_1^4-2x_1^2x_2+x_1^2+x_2^2-2x_1+5 三维等值线');
xlabel('设计变量\bf x_1');
ylabel('设计变量\bf x_2');
zlabel('目标函数\bf f');
%
%按等间隔矢量产生二维网格矩阵
sz1 = linspace(-3,4,30);
sz2 = linspace(-2,7,30);
[z1,z2] = meshgrid(sz1,sz2);
% 3-无约束优化问题目标函数(例 16-4)
f02 = z1.^4-2*z2.*z1.^2+z1.^2+2*z2.^2-2*z1.*z2-4.5*z1-4*z2+4;
figure(6);
surfc(z1,z2,f02);
title('\bf f=x_1^4-2x_1^2x_2+x_1^2+2x_2^2-2x_1x_2-4.5x_1-4x_2+4');
xlabel('设计变量\bf x_1');
ylabel('设计变量\bf x_2');
zlabel('目标函数值\bf f');
figure(7);
h = contour(z1,z2,f02,50);
axis equal;
title('\bf f=x_1^4-2x_1^2x_2+x_1^2+2x_2^2-2x_1x_2-4.5x_1-4x_2+4 等值线');
```

```
xlabel('设计变量\bf x_1');
ylabel('设计变量\bf x_2');
figure(8);
h = contour3(z1,z2,f02,50);
title('\bf f = x_1^4 - 2x_1^2x_2 + x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 4.5x_1 - 4x_2 + 4 三维等值线');
xlabel('设计变量\bf x_1');
ylabel('设计变量\bf x_2');
zlabel('目标函数\bf f');
```

借助 MATLAB 中强大的绘图功能，以矢量或矩阵作为输入参数，可以直观地描述二维优化设计数学模型的几何形态，作为理解扩展到 n 维设计空间中复杂超曲面的优化问题的基础。

16.2 人字架结构尺寸的优化设计

运用最优化技术解决工程优化设计问题包括两个方面的内容。首先是针对工程实际问题，建立数学模型，确切地描述设计变量、约束条件和目标函数等基本要素；然后选择合适的优化方法和计算程序对数学模型进行求解，从而得到最优化结果。

16.2.1 人字架的力学分析和优化设计数学模型

例 16–5 图 16–12 所示的人字架的两个杆件之间用活动铰链连接，杆件与机架之间用固定铰链连接。杆件是壁厚 $T = 2.5$ mm、平均直径为 D 的空心钢管，材料的弹性模量 $E = 2.119\times10^5$ MPa，许用压应力 $[\sigma_y] = 690$ MPa。人字架顶端受到一个集中力 $P = 294300$ N 作用。根据结构要求，人字架跨距 $B = 1520$ mm，杆件平均直径的取值范围是 $20\ \text{mm}\leqslant D\leqslant 140\ \text{mm}$，人字架高度的取值范围是 $200\ \text{mm}\leqslant H\leqslant 1200\ \text{mm}$。要求建立在满足人字架强度条件和稳定性条件下，确定人字架杆件平均直径 D 和高度 H，使人字架的用料最省的优化设计数学模型。

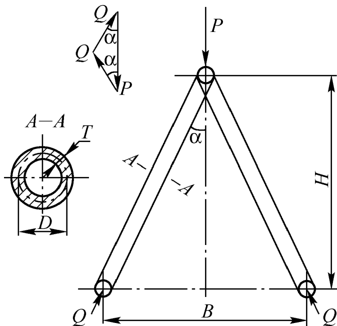


图 16–12 人字架的力学模型

1. 人字架的力学分析

当不计人字架杆件的质量时，它是一个二力杆；人字架顶端有集中力 P 作用时，在两个杆件上各产生轴线方向的支座反力 Q，构成力矢三角形。根据静力平衡条件有

$$Q = \frac{\frac{P}{2}}{\cos\alpha} = \frac{P\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + H^2}}{2H} = \frac{P\sqrt{B^2+4H^2}}{4H}\text{N} \tag{16-1}$$

式中，$\cos\alpha = \frac{H}{\sqrt{(B/2)^2+H^2}} = \frac{2H}{\sqrt{B^2+4H^2}}$。

根据压杆轴向压缩公式，钢管截面上的压应力

$$\sigma = \frac{Q}{\pi DT} = \frac{P\sqrt{B^2+4H^2}}{4\pi DTH}\quad \text{MPa} \tag{16-2}$$

根据压杆轴向压缩稳定性公式，压杆失稳临界应力

$$[\sigma_c]=\frac{\pi^2E(D^2+T^2)}{8[(B/2)^2+H^2]}=\frac{\pi^2E(D^2+T^2)}{2[B^2+4H^2]}\quad \text{MPa} \tag{16-3}$$

2. 建立优化设计的数学模型

（1）设计变量　取需要求解的人字架杆件平均直径 D 和高度 H 作为设计变量。

（2）目标函数　要求用料最省，就是人字架的体积 V 最小，即

$$\min V=2\pi DT\sqrt{(B/2)^2+H^2}=\pi DT\sqrt{B^2+4H^2}\quad \text{mm}$$

（3）约束条件

① 强度条件$[\sigma_y]\geqslant\sigma$，即

$$\frac{P\sqrt{B^2+4H^2}}{4\pi DTH}-[\sigma_y]\leqslant 0$$

② 稳定性条件$[\sigma_c]\geqslant\sigma$，即

$$\frac{P\sqrt{B^2+4H^2}}{4\pi DTH}-\frac{\pi^2E(D^2+T^2)}{2[B^2+4H^2]}\leqslant 0$$

③ 结构条件 20 mm$\leqslant D\leqslant$140 mm 和 20 mm$\leqslant H\leqslant$1200 mm，即

$$D-20\geqslant 0 \quad 和 \quad 140-D\geqslant 0$$

$$H-200\geqslant 0 \quad 和 \quad 1200-H\geqslant 0$$

将设计参数用设计变量 $\boldsymbol{X}=[x_1x_2]$，$T=[D,H]^{\mathrm{T}}$ 表示，代入以上数学表达式，即可得到优化设计的数学模型

$$\left.\begin{aligned}
&\min f(\boldsymbol{X})=\pi Tx_1\sqrt{B^2+4x_2^2}\\
&\text{s. t.}\ \ g_1(\boldsymbol{X})=\frac{P\sqrt{B^2+4x_2^2}}{4\pi Tx_1x_2}-[\sigma_y]\leqslant 0\\
&g_2(\boldsymbol{X})=\frac{P\sqrt{B^2+4x_2^2}}{4\pi Tx_1x_2}-\frac{\pi^2E(x_1^2+T^2)}{2[B^2+4x_2^2]}\leqslant 0\\
&g_3(\boldsymbol{X})=2-x_1\leqslant 0\\
&g_4(\boldsymbol{X})=x_1-140\leqslant 0\\
&g_5(\boldsymbol{X})=200-x_2\leqslant 0\\
&g_6(\boldsymbol{X})=x_2-1200\leqslant 0
\end{aligned}\right\}$$

可见，这是一个有 6 个约束条件的二维非线性优化问题。

16.2.2　M 文件和运算结果

选用求解约束极小值问题的函数 fmincon，在 MATLAB 平台上编制三个 M 文件：

1）调用多维约束优化函数的主程序：包括描述设计变量的初始值和上、下界，线性不等式约束 $g_3(\boldsymbol{X})\sim g_6(\boldsymbol{X})$ 中设计变量系数矩阵和常数项列阵，函数 fmincon 调用命令，以及使用 fprintf 函数输出优化结果和最优解约束函数值命令等。

2）描述目标函数 $f(\boldsymbol{X})$ 的函数文件。

3）描述非线性不等式约束 $g_1(\boldsymbol{X})$（杆件压缩强度条件）和 $g_2(\boldsymbol{X})$（杆件稳定性条件）

的函数文件。

```
%人字架结构尺寸优化设计
% 1 - 主程序
%人字架优化调用两级减速器目标函数文件与非线性约束文件
%设计变量(钢管平均直径 D 和人字架高度 H)的初始值
x0 = [100;800];
%设计变量(钢管平均直径 D 和人字架高度 H)的下界与上界
Lb = [20;200];
Ub = [140;1200];
%调用多维约束优化函数
%线性不等式约束放入约束函数文件,参数 A,b 定义为空矩阵
%没有线性等式约束,参数 Aeq,beq 定义为空矩阵
options = optimset('largescale','off','display','iter');
%'largescale','off' 关闭了大规模方式;
%'display' 用来控制计算过程的显示;
%'iter' 表示显示优化过程的每次计算结果。
[x,fn,exitflag,output] = fmincon(@rzjyh_f,x0,[],[],[],[],Lb,Ub,@rzjyh_g,options);
%返回值 exitflag: >0 表示计算收敛, =0 表示超过了最大的迭代次数, <0 表示计算不收敛;
%返回值 output 有 3 个分量,其中:
% iterations 是优化过程中迭代次数,funcCount 是代入函数值的次数,algorithm 是优化所采用的算法
disp'        ******** 人字架结构尺寸优化设计最优解 ********'
fprintf('       钢管平均直径    D = %3.4f mm\n',x(1))
fprintf('         人字架高度    H = %3.4f mm\n',x(2))
fprintf('         人字架体积    V = %3.4f mm^3\n',fn)
%调用多维约束优化非线性约束函数(jsqyh_g)计算最优点 x* 的性能约束函数值
g = rzjyh_g(x);
disp'        ======== 最优点的性能约束函数值 ========'
fprintf(' 人字架钢管压缩强度    g1 = %3.4f MPa\n',g(1))
fprintf('    人字架钢管稳定性    g2 = %3.4f MPa\n',g(2))

% 2 - 目标函数(rzjyh_f)
function f = rzjyh_f(x);
%人字架跨距 B;钢管厚度 T;
B = 1520;T = 2.5;
f = 2*pi*x(1)*T*sqrt((B/2)^2 + x(2)^2);

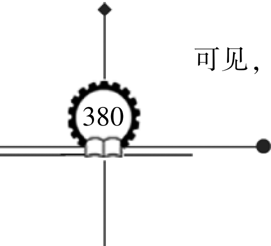
% 3 - 约束函数(rzjyh_g)
function [g,ceq] = rzjyh_g(x);
%人字架跨距 B;钢管厚度 T;载荷 P;弹性模量 E;许用压应力 Cy;
B = 1520;T = 2.5;P = 294300;E = 2.119e5;sigma_y = 690;
%钢管压缩强度条件
Q = 0.5*P*sqrt((B/2)^2 + x(2)^2)/x(2);                          % 钢管轴向压力
sigma = Q/(pi*T*x(1));                                           %钢管压应力
g(1) = sigma - sigma_y;
%钢管稳定性条件
sigma_c = 0.125*pi^2*E*(x(1)^2 + T^2)/((B/2)^2 + x(2)^2);   %稳定临界应力
```

```
g(2) = sigma - sigma_c;
% 钢管平均直径边界条件
g(3) = 200 - x(2);
g(4) = x(1) - 140;
% 人字架高度边界条件
g(5) = 20 - x(1);
g(6) = x(2) - 1200;
% 没有非线性等式约束
ceq = [ ];
```

计算结果：

```
                                  max                    Directional     First - order
Iter  F - count       f(x)      constraint   Step - size  derivative      optimality Procedure
  0       3     1.73329e+006        -40
  1       7           880958      -41.65        0.5     -1.42e+006          4.65e+005
  2      11           778317      -34.75        0.5     -2.04e+005          5.46e+004
  3      15           733855      -27.57        0.5     -8.95e+004           2.8e+004
  4      19           712302      -13.03        0.5     -4.34e+004          1.35e+004
  5      23           701688      -6.281        0.5     -2.13e+004          7.36e+003
  6      27           696432      -3.074        0.5     -1.05e+004          3.72e+003
  7      31           693820      -1.519        0.5     -5.23e+003          1.87e+003
  8      35           692519     -0.7551        0.5     -2.61e+003                935
  9      38           691219    0.004675          1      -1.3e+003               2.25
 10      41           691220   9.639e-008         1           1.27              0.181
 11      44           691220   1.137e-013         1      5.35e-005          5.88e-005
                                                                    Hessian modified
Optimization terminated: first - order optimality measure less than options. TolFun
andmaximum constraint violation is less than options. TolCon.
Active inequalities (to within options. TolCon = 1e - 006):
  lower      upper      ineqlin      ineqnonlin
                                         1
                                         2
        ******** 人字架结构尺寸优化设计最优解 ********
                钢管平均直径        D = 47.5144 mm
                  人字架高度        H = 529.2580 mm
                  人字架体积        V = 691219.9363 mm^3
          ========最优点的性能约束函数值 ========
            人字架钢管压缩强度      g1 = 0.0000 MPa
              人字架钢管稳定性      g2 = 0.0000 MPa
```

可见，得到的优化结果是：



$$X^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D^* \\ H^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 47.5144\ \text{mm} \\ 529.2580\ \text{mm} \end{bmatrix}$$

$$f^* = \min V = 691219.9363\ \text{mm}^3$$

16.2.3　优化问题的几何描述

由于这是一个二维非线性约束优化问题，可以在二维设计平面上进行几何描述，如图 16-13 所示。在程序中使用 contour 函数绘制目标函数等值线和约束边界，使用 clabel 函数标注目标函数值。

```
% 4 - 人字架结构尺寸优化设计的几何描述
% 按等间隔矢量产生二维网格矩阵
xx1 = linspace(20,140,20);                          % D 取值范围 20 - 140
xx2 = linspace(200,1200,200);                       % H 取值范围 200 - 1200
[x1,x2] = meshgrid(xx1,xx2);
% 数学模型
% 人字架跨距 B;钢管厚度 T;载荷 P;弹性模量 E;许用压应力 sigma_y;
B = 1520;T = 2.5;P = 294300;E = 2.119e5;sigma_y = 690;
f = 2 * pi. * x1 * T. * sqrt((B/2)^2 + x2.^2);      % 目标函数 f
% 目标函数值几何描述
fh = contour(x1,x2,f);                              % 目标函数等高线
clabel(fh);                                         % 标注目标函数值
title('\rm 人字架结构尺寸优化的设计平面');
xlabel('钢管平均直径\rm D/mm');
ylabel('人字架高度\rm H/mm');
% 钢管压缩强度条件
Q = 0.5 * P * sqrt((B/2)^2 + x2.^2)./x2;            % 钢管轴向力
sigma = Q./(pi. * x1 * T);                          % 钢管压应力
g1 = sigma - sigma_y;                               % 约束函数 g1
% 钢管稳定性条件
sigma_c = 0.125 * pi^2 * E. * (x1.^2 + T^2)./((B/2)^2 + x2.^2);  % 稳定临界应力
g2 = sigma - sigma_c;                               % 约束函数 g2
% 约束函数几何描述
hold on;
g1h = contour(x1,x2,g1);
g2h = contour(x1,x2,g2);
% 标注图形
gtext('X*');gtext('g_1(X) = 0');gtext('g_2(X) = 0');
```

输出的图形如图 16-13 所示。从图 16-13 可见，在二维设计平面中，由两个性能约束 $g_1(\boldsymbol{X}) \geq 0$、$g_2(\boldsymbol{X}) \geq 0$ 和三个边界约束 $g_4(\boldsymbol{X}) \geq 0$、$g_5(\boldsymbol{X}) \geq 0$ 和 $g_6(\boldsymbol{X}) \geq 0$ 围成优化设计的可行域，边界约束 $g_3(\boldsymbol{X}) \geq 0$ 是不作用的约束条件。

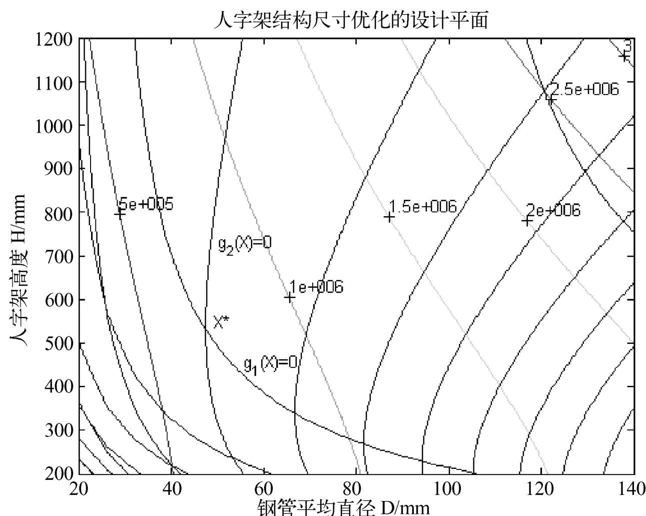


图 16-13　人字架结构尺寸优化问题的设计平面

16.3　梯形截面管道结构尺寸的优化设计

工程上常常遇到采用非圆形截面管道（如梯形、矩形和变截面形管道等）输送流体的情况，根据流体力学原理，管道内液体的流速与管道截面的周长的倒数成正比。因此，在满足一定梯形管道横截面积的条件下，为使流体在梯形截面管道内流速最快，就要合理选择梯形截面尺寸，使得其周长为最短。

16.3.1　计算实例和优化设计数学模型

例 16-6　已知梯形截面管道的参数是：底边长度是 c，高度是 h，斜边与底边的夹角是 θ，横截面积是 $A=64516\ \text{mm}^2$，如图 16-14 所示。试按照使液体流速最大为设计目标，确定该管道结构尺寸的最佳参数。

建立优化设计的数学模型：

根据梯形截面管道的几何关系，可得到它的两腰与底边长度之和

$$s=c+\frac{2h}{\sin\theta} \tag{16-4}$$

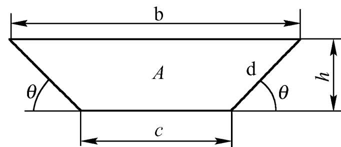


图 16-14　梯形截面管道的结构尺寸

由管道横截面面积计算式

$$A=ch+h^2\cot\theta \tag{16-5}$$

可得到底边长度 c 的关系式（与 h 和 θ 相关）

$$c=\frac{A-h^2\cot\theta}{h}=\frac{A}{h}-\frac{h}{\tan\theta} \tag{16-6}$$

将式（16-6）代入式（16-4）中，即可得到管道腰底长 s 的表达式

$$s=\frac{A}{h}-\frac{h}{\tan\theta}+\frac{2h}{\sin\theta} \tag{16-7}$$

给定高度 h、斜角 θ 和横截面积 A 这 3 个参数后，图 16-14 所示的等腰梯形顶边长度为

$$b = c + \frac{2h}{\tan\theta} = \left(\frac{A}{h} - \frac{h}{\tan\theta}\right) + \frac{2h}{\tan\theta} = \frac{A}{h} + \frac{h}{\tan\theta} \tag{16-8}$$

式（16-7）中管道横截面面积 A 是已知数，取与腰底长 s 有关的独立参数 h 和 θ 作为设计变量，即

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h \\ \theta \end{bmatrix}$$

为使液体流速最大，应取管道截面腰底长 s 最小作为目标函数，即

$$\min f(\boldsymbol{X}) = \min s = \frac{A}{A} - \frac{h}{\tan\theta} + \frac{2h}{\sin\theta} = \frac{A}{x_1} - \frac{x_1}{\tan x_2} + \frac{2x_1}{\sin x_2}$$

这是一个二维无约束非线性优化问题。

16.3.2　无约束非线性优化函数的运用

fminunc 是基于梯度搜索法求解无约束非线性优化问题的优化工具函数，在使用时需要建立目标函数和调用 fminunc 函数的 M 文件，输入初始点 x0 等已知参数。程序运行后输出参数有：目标函数最优解 $\boldsymbol{X}^*$ 点及其函数值。如果需要，还可以返回目标函数获得在最优点的梯度 grad 和 hessian 矩阵值等信息。

编制目标函数文件和调用无约束优化工具函数 fminunc 文件。

编制绘制目标函数等值线和曲面图的 M 文件。

应当指出，对于某些目标函数形态比较复杂的优化问题，在使用基于梯度搜索法的优化工具箱函数迭代时，目标函数的梯度不是通过解析方法，而是采用有限差分方法计算的。由于截断误差影响，优化算法在接近最优解附近时的收敛速度变慢，这个问题可以通过适当放宽迭代的终止条件来解决。

16.3.3　M 文件运算结果分析和几何描述

梯形槽无约束优化的 M 文件如下。

```
%梯形槽定截面时腰底长最小的二维无约束优化
% 1 - 无约束优化函数命令程序
%初始点
x0 = [25;45];
A = 64516;hd = pi/180;
%调用梯度法搜索
[x,Fmin] = fminunc('sc_wysyh',x0);
disp'          ********    输出无约束最优解      *******'
fprintf('        截面高度         h* = %3.4f mm\n',x(1))
fprintf('        斜边夹角     theta* = %3.4f °\n',x(2))
fprintf('        截面腰底长       s* = %3.4f mm\n',Fmin)
%计算梯形几何尺寸
c = A/x(1) - x(1)/tan(x(2)*hd);
b = A/x(1) + x(1)/tan(x(2)*hd);
```

```
d = x(1)/sin(x(2) * hd);
L = c + b + 2 * d;
disp('        ########    梯形截面几何尺寸      ########')
fprintf('       下底长度           c = %3.4f mm\n',c)
fprintf('       顶边长度           b = %3.4f mm\n',b)
fprintf('       侧腰长度           d = %3.4f mm\n',d)
fprintf('       截面周长           L = %3.4f mm\n',L)

% 2 - 二维无约束优化目标函数文件(sc_wysyh.m)
function f = sc_wysyh(x)
A = 64516;hd = pi/180;
f = A/x(1) - x(1)/tan(x(2) * hd) + 2 * x(1)/sin(x(2) * hd);

% 3 - 绘制梯形截面管道周长等高线和曲面图的程序
%按(初值,终值,等分数)产生等间隔向量 xx1,xx2
xx1 = linspace(100,300,25);
xx2 = linspace(30,120,25);
%产生两个[5x10]的网格矩阵 x1,x2
[x1,x2] = meshgrid(xx1,xx2);
%定义目标函数
A = 64516;hd = pi/180;
f = A./x1 - x1./tan(x2 * hd) + 2 * x1./sin(x2 * hd);
%将整个图形窗口分隔成 2 个子窗口,取左边窗口
subplot(1,2,1);
%绘制等值线并标注函数值
h = contour(x1,x2,f);
clabel(h);
%定义左边窗口坐标轴刻度范围
axis([100 300 30 120])
%标注左边窗口和坐标轴
xlabel('高度 h (mm)')
ylabel('倾斜角\theta (°)')
title('目标函数(截面腰底长)等值线')
gtext('X*')
%将整个图形窗口分隔成 2 个子窗口,取右边窗口
subplot(1,2,2);
%绘制曲面图
surfc(x1,x2,f);
%定义右边窗口坐标轴刻度范围
axis([100 300 30 120 600 1200])
%标注右边窗口
title('目标函数(截面腰底长)曲面图')
```

计算结果：

```
******** 输出无约束最优解        ********
    截面高度          h * = 192.9958 mm
    斜边夹角      theta * = 60.0005 °
    截面腰底长        s * = 668.5656 mm
######## 梯形截面几何尺寸      ########
    下底长度            c = 222.8629 mm
    顶边长度            b = 445.7112 mm
    侧腰长度            d = 222.8514 mm
    截面周长            L = 1114.2768 mm
```

经过运算得到的最优解是

$$f(\boldsymbol{X}^*) = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^* \\ \theta^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 192.9958\ \text{mm} \\ 60° \end{bmatrix}$$

根据式（16-6）计算梯形的底边长度

$$c = \frac{A}{h} = \frac{h}{\tan\theta} = \frac{64516}{192.9958} - \frac{192.9958}{\tan 60°} = 222.8629\ \text{mm}$$

根据式（16-8）计算梯形的顶边长度

$$b = \frac{A}{h} + \frac{h}{\tan\theta} = \frac{64516}{192.9958} + \frac{192.9958}{\tan 60°} = 445.7112\ \text{mm}$$

根据图 16-14 计算梯形的侧腰长度

$$d = \frac{h}{\sin\theta} = \frac{192.9958}{\sin 60°} = 222.8514$$

从以上计算结果可见，由于图 16-14 所示梯形的底边长度 c 与侧腰长度 d 相等，而且它们之间所夹的钝角为 $180° - \theta = 120°$，因此该梯形是一个正六边形的一半。

梯形截面管道参数优化的几何描述如图 16-15 所示。从图 16-15 中可以清楚地看到目标函数等值线的分布规律，以及目标函数极小点的位置。

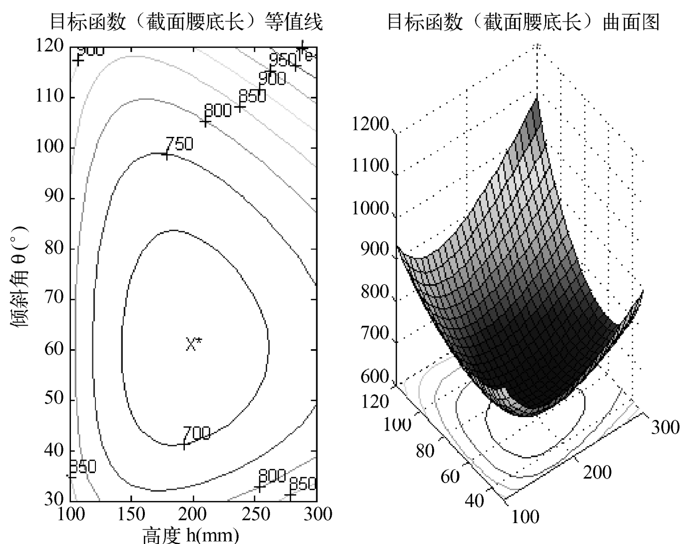


图 16-15　梯形截面管道参数优化的几何描述

16.4 多目标优化问题的理想有效解

对于单目标优化问题，任何两个解都可以用其目标函数值来比较方案的优劣。因此，最优解序列$\{X^{*(K)}(K=1,2,\cdots)\}$是完全有序的。而对于多目标优化问题

$$\left.\begin{array}{l}\min\ \{f_1(X),f_2(X),\cdots,f_1(X)\}\\ \text{s. t.}\quad g_u(X)\leqslant 0\qquad (u=1,2,3,\cdots,m)\\ h_v(X)=0\qquad (v=1,2,3,\cdots,p<t)\end{array}\right\}\qquad(16\text{-}9)$$

任何两个解不一定能够用其目标函数值比较方案的优劣，只能是半有序的。假设 t 个设计目标中有两个设计方案 $X^{(H)}$、$X^{(L)}$，若它们各个分目标的函数值都满足条件

$$f_f(X^{(L)})\leqslant f_j(X^{(H)})\qquad (j=1,2,\cdots,t)$$

则方案 $X^{(L)}$ 比 $X^{(H)}$ 好，$X^{(H)}$ 称为劣解。

获得使各分目标同时达到最优的绝对最优解是很困难的，目前在理论和算法上还没有完善的处理多目标优化方法。因为由于多目标优化问题的内在属性，使得一个分目标的优化往往会引起另外一些分目标的变化，它们的优化甚至是矛盾和对立的。因此，需要在各个分目标函数最优值之间进行协调，以便取得对各个分目标来说都算是比较好的方案，将它们称为多目标优化的有效解或非劣解（Noninferior Solution）。

16.4.1 多目标优化的策略

多目标优化问题本身的复杂性，决定了求解多目标优化问题的困难性。处理单目标优化问题已经有许多有效的优化方法，因此可以将多目标优化问题转化为单目标优化问题，使多目标优化问题解的半有序性转化为单目标优化问题解的完全有序性。应当指出，这种转化后问题的解往往是原多目标优化问题的一个或部分非劣解，不是全部的有效解。如何得到一个能够接受的最好有效解，关键在于选择某种形式的折中。

求解多目标优化问题的基本思想是将各个分目标函数构造成一个评价函数

$$f(X)=\{f_1(X),f_2(X),\cdots,f_t(X)\}\qquad(16\text{-}10)$$

从而将多目标（向量）优化问题转化为求解评价函数的单目标（标量）优化问题来处理。

构造评价函数的方法主要有：线性加权法、规格化加权法、功效系数法、乘除法和主要目标法等。采用稳妥的保守策略时，可使用 MATLAB 的优化工具箱最小最大化函数 fminimax 求解多目标约束优化问题

$$\left.\begin{array}{c}\min\limits_{x}\max\limits_{f}\{f_1,f_2,\cdots,f_t\}\\ \text{s. t.}\qquad AX\leqslant b\\ Aeq(X)=beq\\ C(X)\leqslant 0\\ Ceq(X)=0\\ Lb\leqslant X\leqslant Ub\end{array}\right\}\qquad(16\text{-}11)$$

其中，$AX\leqslant b$ 和 $Aeq(X)=beq$ 是线性不等式和等式约束；$C(X)\leqslant 0$ 和 $Ceq(X)=0$ 是非线性

不等式和等式约束；$Lb \leqslant \boldsymbol{X} \leqslant Ub$ 是设计变量的下限和上限。

最小最大化函数 fminimax 求解多目标优化问题的方法，是将各个分目标的权重视为相同，其功能是使约束各个分目标函数$\{f_1, f_2, \cdots, f_t\}$的最劣解 x 逐次变小，也就是在最坏的情况下寻求最好的结果。

16.4.2　计算实例和优化设计数学模型

例 16-7　要求设计一个内燃机用气门弹簧，工作载荷 $F=680$ N，工作行程 $h=16.59$ mm，工作频率 $f_r=25$ Hz，要求工作寿命 $N \geqslant 10^6$ 循环次数。弹簧丝材料采用 50CrVA，许用应力 $[\tau]=450$ MPa。如图 16-16 所示弹簧的结构要求：弹簧丝直径 $2.5\ \text{mm} \leqslant d \leqslant 9\ \text{mm}$，弹簧外径 $30\ \text{mm} \leqslant D \leqslant 60\ \text{mm}$，工作圈数 $3 \leqslant n \leqslant 6$，支承圈数 $n_2=1.8$（采用 YI 型端部结构），弹簧指数 $C \geqslant 6$，弹簧压并高度 $\lambda_b=1.1h=18.25$ mm。试在满足弹簧的强度条件、刚度条件、稳定性条件、旋绕比条件和结构尺寸边界条件等约束条件下，确定弹簧的弹簧丝直径 d、中径 D_2 和工作圈数 n 等三个设计参数，使它质量最轻、自由高度最小和自振频率最高。

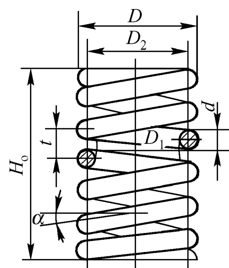


图 16-16　圆柱螺旋弹簧的结构参数

有关设计资料：弹簧钢的材料密度 $\rho=7.5\times10^{-6}\ \text{kg/mm}^3$，循环次数 $N \geqslant 10^3$ 时弹簧的曲度系数 $K=1.6/C^{0.14}$，重力加速度 $g=9.80665\ \text{m/s}^2$。

由于需要同时考虑结构质量最轻、弹簧自由高度最小和自振频率最高三个设计目标，所以属于多目标优化问题。

1. 确定设计变量

按照题意取弹簧丝直径 d、中径 D_2 和工作圈数 n 三个独立设计参数为设计变量

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d \\ D_2 \\ n \end{bmatrix}$$

2. 建立分目标函数

1）弹簧的结构质量最轻

$$f_1(\boldsymbol{X})=1.8148\times10^{-4}x_1^2x_2(x_3+1.8)$$

2）弹簧的自由高度最小

$$f_2(\boldsymbol{X})=x_1(x_3+1.3)+18.25$$

3）弹簧的自振频率最高（取其倒数作为分目标函数，追求它的最小）

$$f_3(\boldsymbol{X})=f_r^{-1}=2.809\times10^{-6}x_2^2x_3/x_1$$

为了使三个分目标函数有相同的数量级，对它们进行换算

$$f_i'(\boldsymbol{X})=\frac{f_i(\boldsymbol{X})-L_i}{H_i-L_i} \qquad (i=1,2,3)$$

式中，$f_i(\boldsymbol{X})$是各个分目标函数的实际值；L_i 和 H_i 分别是各个分目标函数的理想值和非理想值，当$f_i(\boldsymbol{X})=L_i$ 时，换算值$f_i'(\boldsymbol{X})=0$；当$f_i(\boldsymbol{X})=H_i$ 时，换算值$f_i'(\boldsymbol{X})=1$。

3. 建立约束条件

$$\left.\begin{aligned}
&g_1(\boldsymbol{X})=2.7706\times10^3x_2^{0.86}/x_1^{2.86}-405\leqslant0(\text{强度条件})\\
&g_2(\boldsymbol{X})=6-x_2/x_1\leqslant0(\text{弹簧指数条件})\\
&g_3(\boldsymbol{X})=(x_3+1.3)x_1+18.25-5.3x_2\leqslant0(\text{弹簧稳定性条件})\\
&g_4(\boldsymbol{X})=250-3.56\times10^5x_1/(x_2^2x_3)\leqslant0(\text{弹簧防止共振条件})\\
&g_5(\boldsymbol{X})=680-1.659\times10^5x_1^4/(x_2^3x_3)\leqslant0(\text{弹簧刚度条件})\\
&g_6(\boldsymbol{X})=2.5-x_1\leqslant0(\text{弹簧丝直径下限})\\
&g_7(\boldsymbol{X})=x_1-9.5\leqslant0(\text{弹簧外径下限})\\
&g_8(\boldsymbol{X})=30-x_1-x_2\leqslant0(\text{弹簧外径下限})\\
&g_9(\boldsymbol{X})=x_1+x_2-60\leqslant0(\text{弹簧外径上限})\\
&g_{10}(\boldsymbol{X})=3-x_3\leqslant0(\text{弹簧工作圈数下限})\\
&g_{11}(\boldsymbol{X})=x_3-6\leqslant0(\text{弹簧工作圈数上限})
\end{aligned}\right\}$$

其中，前面5个是性能约束条件，后面6个是边界约束条件。这是一个有11个约束条件的三维非线性3目标优化设计问题。

16.4.3 M文件的主要特点

在MATLAB平台上编制如下M文件：

1）关于$f_1(\boldsymbol{X})$、$f_2(\boldsymbol{X})$、$f_3(\boldsymbol{X})$的多目标函数文件，定义评价函数用向量形式“[f]”。

2）关于$g_1(\boldsymbol{X})\sim g_5(\boldsymbol{X})$的五个非线性性能约束函数文件，由于没有等式约束，参数Aeq、beq和Ceq定义为空矩阵形式“[ ]”。

3）在M文件中使用函数fminimax调用多目标函数文件和约束函数文件求优，必须完整描述$g_6(\boldsymbol{X})\sim g_{11}(\boldsymbol{X})$六个线性边界约束函数的系数矩阵、常数向量和边界要求。

在极小化极大值过程中，输入各个分目标函数的不同的非理想值$H_i(i=1,2,\cdots)$，得到各个极值点1、2、…。在三维目标函数设计空间(f_1,f_2,f_3)中，描绘出这些极值点的位置（图16-17a），并且绘制出理想极小点平面（图16-17b）。

编制M文件如下：

```
%圆柱螺旋弹簧的多目标优化设计
%设计变量:簧丝直径 x(1) = d,中径 x(2) = D2,圈数 x(3) = n
% 1 - 主程序(极小极大值函数 fminimax)
%设计变量的初始值
x0 = [6.2;39;5];
%设计变量的下限与上限
lb = [2.5;27.5;3];
ub = [9;51;6];
%线性不等式约束(g6(x) - g11(x))中设计变量的系数矩阵(非零元素)
a = zeros(6,3);
a(1,1) = -1;
```

```
a(2,1) =1;
a(3,1) = -1;a(3,2) = -1;
a(4,1) =1;a(4,2) =1;
              a(5,3) = -1;
              a(6,3) =1;
%线性不等式约束(g6(x) - g11(x))中的常数项列阵
b =[ -2.5;9; -30;60; -3;6];
%没有等式约束,参数 Aeq 和 beq 定义为空矩阵符号“[ ]”
L =[0.9434 42.5514 1.709e -3];
%多目标优化函数 fminimax(调目标函数 TH_dmbyh_fTS 和非线性约束函数 TH_dmbyh_gTS)
for i =1:4
   H =[11 * L(1) - i * L(1) 11.5 * L(2) - i * L(2) 13.5 * L(3) - i * L(3)];
   [x,fn] =fminimax('TH_dmbyh_fTS',x0,a,b,[],[],lb,ub,'TH_dmbyh_gTS',[],L,H);
   for j =1:3
      ff(j) =fn(j) * (H(j) - L(j)) + L(j);          %将各分目标函数还原成实际值
   end
   f1(i) =ff(1);f2(i) =ff(2);f3(i) =1./ff(3);       %将各分目标最优值赋给各数组
end
disp '      ********  圆柱螺旋弹簧多目标优化设计最优解   ********'
fprintf('       簧丝直径 x(1) *        d =%3.4f mm\n',x(1))
fprintf('       弹簧中径 x(2) *     D2 =%3.4f mm\n',x(2))
fprintf('       弹簧圈数 x(3) *       n =%3.4f 圈\n',x(3))
fprintf('       弹簧结构质量 f1 *   W =%3.4f N   \n',ff(1))
fprintf('       弹簧自由高度 f2 *  H0 =%3.4f mm\n',ff(2))
fprintf('       弹簧自振频率 f3 *   fr =%3.4f Hz\n',1/ff(3))
%调用多维约束优化非线性约束函数(TH_dmbyh_gTS)计算最优点 x * 的性能约束函数值
g =TH_dmbyh_gTS(x,L,H);
disp '       ########     最优点的性能约束函数值     ########'
fprintf('       弹簧强度约束函数值      g1 * =%3.4f\n',g(1))
fprintf('       弹簧指数约束函数值      g2 * =%3.4f\n',g(2))
fprintf('       弹簧稳定性约束函数值    g3 * =%3.4f\n',g(3))
fprintf('       弹簧无共振约束函数值    g4 * =%3.4f\n',g(4))
fprintf('       弹簧刚度约束函数值      g5 * =%3.4f\n',g(5))
disp '        ========     最优点的边界约束函数值     ========'
fprintf('       簧丝直径下限约束函数值   g6 * =%3.4f\n', - b(1) - x(1))
fprintf('               上限约束函数值   g7 * =%3.4f\n',x(1) - b(2))
fprintf('       弹簧外径下限约束函数值   g8 * =%3.4f\n', - b(3) - x(2))
fprintf('               上限约束函数值   g9 * =%3.4f\n',x(2) - b(4))
fprintf('       工作圈数下限约束函数值  g10 * =%3.4f\n', - b(5) - x(3))
fprintf('               上限约束函数值  g11 * =%3.4f\n',x(3) - b(6))

%描述多目标优化决策的极小极大值和理想平面
```

```
[fsort] = sort([f1;f2;f3]);                 % 对数组 f1,f2,f3 元素按升序进行排序
disp' &&&&&&&&  多目标的极小极大值矩阵  &&&&&&&&'
disp (fsort)
subplot(1,2,1);
plot3([fsort(1,1)],[fsort(2,1)],[fsort(3,1)],'go' );
hold on;
plot3([fsort(1,2)],[fsort(2,2)],[fsort(3,2)],'ro' );
plot3([fsort(1,3)],[fsort(2,3)],[fsort(3,3)],'co' );
plot3([fsort(1,4)],[fsort(2,4)],[fsort(3,4)],'b*' );
grid;
title('多目标函数的极小极大值');
xlabel('结构质量 f1 (N)');
ylabel('自由高度 f2 (mm)');
zlabel('自振频率 f3 (Hz)');
rotate3d;
subplot(1,2,2);
plot3([ff(1),0,0],[0,ff(2),0],[0,0,1/ff(3)],'r*-' );
grid;
title('多目标函数的理想平面')
xlabel('结构质量 f1 (N)');
ylabel('自由高度 f2 (mm)');
zlabel('自振频率 f3 (Hz)');
rotate3d;              % 鼠标控制三维视角变化的函数
```

```
% 2 - 圆柱螺旋弹簧的多目标优化设计的目标函数(TH_dmbyh_fTS)
function [f] = TH_dmbyh_fTS(x,L,H);
% 钢的密度 7.5e-6kg/mm^3;重力加速度 9.80665m/s^2
p=7.5e-6;gl=9.80665;
% 对各分目标函数进行相同数量级的变换 ff=(f-L)/(H-L)
f1=p*gl*pi^2*x(1)^2*x(2)*(x(3)+1.8)/4;      % 弹簧质量
f(1)=(f1-L(1))/(H(1)-L(1));
f2=x(1)*(x(3)+1.3)+18.25;                   % 弹簧自由高度
f(2)=(f2-L(2))/(H(2)-L(2));
f3=2.809e-6*x(2)^2*x(3)/x(1);               % 弹簧自振频率的倒数
f(3)=(f3-L(3))/(H(3)-L(3));
```

```
% 3 - 圆柱螺旋弹簧的多目标优化设计的非线性不等式约束函数(TH_dmbyh_gTS)
function [g,ceq] = TH_dmbyh_gTS(x,L,H);
% 载荷 F=680N;许用应力 τ=450MPa;工作频率 fr=25;工作行程 h=16.59
% 弹簧曲度系数 K=1.6/C^0.14(当工作循环次数 N>1e3 时);稳定临界高径比 HD=5.3
F=680;τ=450;K=1.6;HD=5.3;fr=25;h=16.59;G=8e4;
g(1)=8*K*F/pi*x(2)^0.86/x(1)^2.86-t;
```

```
g(2) = 6 - x(2)/x(1);
g(3) = (x(3) + 1.3) * x(1) + 18.25 - HD * x(2);
g(4) = 10 * fr - 3.56e5 * x(1)/x(2)^2/x(3);
g(5) = F - h * G/8 * x(1)^4/x(2)^3/x(3);
ceq = [];
```

计算结果：

```
********圆柱螺旋弹簧多目标优化设计最优解    ********
          簧丝直径 x(1) *        d = 5.6515 mm
          弹簧中径 x(2) *       D2 = 33.9089 mm
          弹簧圈数 x(3) *        n = 3.0000 圈
          弹簧结构质量 f1 *      W = 0.9434 N
          弹簧自由高度 f2 *     H0 = 42.5514 mm
          弹簧自振频率 f3 *     fr = 583.2604 Hz
########最优点的性能约束函数值      ########
        弹簧强度约束函数值      g1 * = -0.0000
        弹簧指数约束函数值      g2 * = 0.0000
        弹簧稳定性约束函数值    g3 * = -137.1656
        弹簧无共振约束函数值    g4 * = -333.2627
        弹簧刚度约束函数值      g5 * = -766.8830
========最优点的边界约束函数值        ========
      簧丝直径下限约束函数值    g6 * = -3.1515
              上限约束函数值    g7 * = -3.3485
      弹簧外径下限约束函数值    g8 * = -3.9089
              上限约束函数值    g9 * = -26.0911
      工作圈数下限约束函数值   g10 * = 0.0000
              上限约束函数值   g11 * = -3.0000
```

16.4.4　运算结果分析

M 文件输出的三目标优化问题的设计空间如图 16-17 所示。由图可见，圆柱螺旋弹簧多目标优化设计的优化解位于弹簧强度、弹簧指数和工作圈数下限等三个约束超曲面的交集上。

从多目标极小极大值矩阵和图 16-17a 可知，极值点 2 与 4 重合，而且是理想极小点。

多目标优化问题如果存在非劣解，则往往有无穷多个，构成非劣解集（Noninferior Set）。多目标优化的最终目的是，决策者从非劣解集中选择一个令人满意的非劣解，即理想有效解。

多目标优化的决策包括设计目标、设计方案和决策者三个要素。在三维目标函数设计空间(f_1,f_2,f_3)中，目标函数的可行域是由设计变量可行域曲面映射得到的，其中多目标问题的有效解集合形成有效解曲面，多目标优化问题的理想解将从极小极大过程的有效解集中确定。

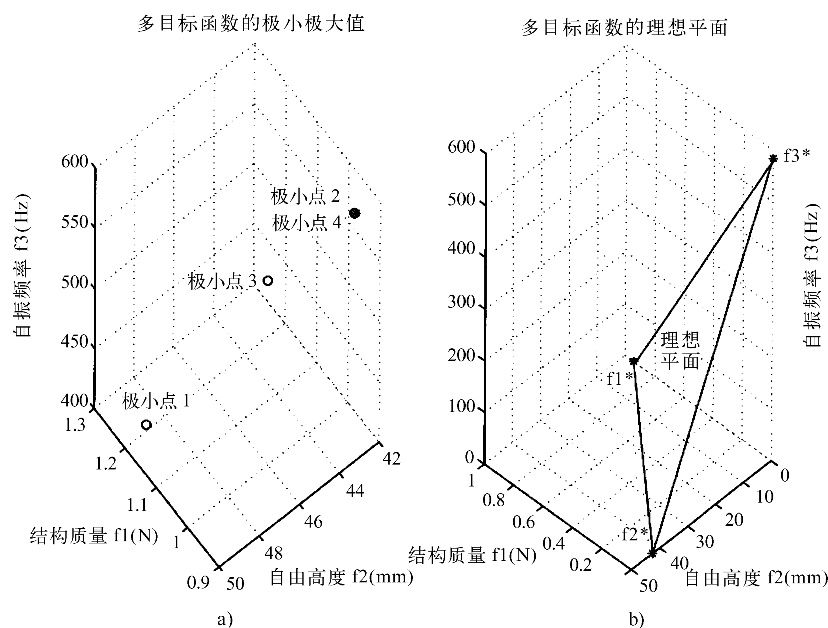


图 16-17　三目标优化问题的设计空间

16.5　无心磨削工艺参数的优化

切削工艺参数优化问题，是在满足产品技术要求（形位尺寸、表面质量和表面层性质等）和切削加工条件（机床电动机功率及其允许的最大切削力，要求的切削速度范围和切削深度范围、要求的刀具耐用度、避免产生切削自激振动的稳定切削区，机床、刀具与工件系统的刚度等）等设计约束的条件下，选择最佳工艺参数（如刀具的材料和切削部分的几何参数，以及切削用量等），达到最佳的生产经济性目标（如以机械加工成本最小化或单位时间内金属切除率最大作为决策目标）。

16.5.1　无心磨削工艺参数分析

无心磨削的工艺参数如图 16-18 所示。在无心磨削中，工件线速度 v_w、轴向速度 v_a 与导轮转速 n_r 的关系为

$$v_w = 10^{-3}\pi d_r n_r \cos\alpha \qquad (\text{m/min}) \qquad (16\text{-}12)$$

$$v_a = \pi d_r n_r \sin\alpha \qquad (\text{m/min}) \qquad (16\text{-}13)$$

式中，n_r 是导轮转速，单位为 r/min，（不考虑工件与导轮之间的相对滑动时，与工件转速相同）；d_r 是导轮直径，单位为 mm；α 是导轮偏角，精磨时一般 $\alpha = 1° \sim 2.5°$；工件的轴向进给量 $f_a = \pi d_w \tan\alpha$，单位为 mm/r，d_w 是工件直径，单位为 mm。

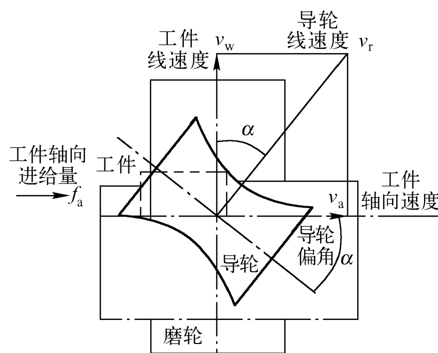


图 16-18　无心磨削的工艺参数

因此，工件的轴向速度 v_a 与线速度 v_w 和轴向进给量 f_a 的关系为

$$v_a = 10^3 v_w \tan\alpha = \frac{10^3 v_w f_a}{\pi d_w} \quad (\text{mm/min}) \tag{16-14}$$

16.5.2　建立工艺参数优化的数学模型

例 16-8　在 M1080 无心磨床上磨削轴瓦 492Q 外圆 $\phi 55.56^{+0.002}_{-0.008}$，表面粗糙度 $R_Z = 2\ \mu\text{m}$，机床主电动机功率 $P_C = 13\ \text{kW}$。按磨削效率最高的要求，选择精磨工序最佳工艺参数。

1. 确定设计变量

磨轮转速 $n = 1300$ r/min，磨轮型号为 GB60# ZR_2A · P500 × 150 × 305，导轮型号为 GB60# ZR_2X · PSA300 × 150 × 127，有八级转速 $n_r = 13$ r/min、17 r/min、23 r/min、30 r/min、40 r/min、53 r/min、71 r/min、94 r/min。

可以参加优化的独立设计变量为

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_w \\ f_a \\ t \end{bmatrix}$$

其中，t 为磨削深度，单位为 mm。

2. 建立目标函数

以每分钟金属切除率最大化，即其负值最小化作为设计目标

$$\min f(\boldsymbol{X}) = 10^3/(x_1 x_2 x_3) \quad (\text{mm}^3/\text{min})$$

3. 确定约束条件

1）为了限制工件的表面粗糙度，工件磨削表面最大高度 H_{max} 不超过 R_Z，即

$$1.36 K_h u^{1.2} \left(\frac{v_w f_a}{v B_w \tan\lambda}\right)^{0.4} \left(\frac{1}{d_r} + \frac{1}{d_w}\right)^{0.2} - R_Z \leqslant 0 \tag{16-15}$$

式中，u 是由砂轮特性决定的切削刃平均间隔，对某种砂轮用插值法求出 $u = 0.22$ mm；λ 是磨轮磨刃半顶角，取 $\lambda = 53°$；d_r 是导轮直径，$d_r = 500$ mm；B_w 是工件宽度，$B_w = 28$ mm；v 是磨轮线速度，$v = 10^{-3}\pi 500 \times 1300 = 2042$ m/min；v_w 是工件线速度，根据机床导轮有八级转速的变化范围 $n_r = 13 \sim 94$ r/min，得到 $v_w = 12.241 \sim 88.579$ m/min；K_h 是表面粗糙度系数，用以考虑由于磨削振动、磨轮磨粒磨损和堵塞等因素造成工件的磨削表面最大高度 H_{max} 的实际值是计算值的几十倍，一般取 $K_h = 40 \sim 100$，这里根据实验统计资料取 $K_h = 80$。

经过整理，得到约束方程

$$g_1(\boldsymbol{X}) = 1.36 K_h u^{1.2} \left(\frac{x_1 x_2}{v B_w \tan\lambda}\right)^{0.4} \left(\frac{1}{d_r} + \frac{1}{d_w}\right)^{0.2} - R_Z \leqslant 0$$

2）防止磨削烧伤的约束条件

$$(v - v_w) t^{0.5} \left(\frac{d_r d_w}{d_r + d_w}\right)^{0.5} - C_b \leqslant 0 \tag{16-16}$$

式中，C_b 是由工件材料和磨轮种类决定的磨削烧伤临界系数，$C_b = 1920$ m · mm/min；t 是磨削深度，$t = 0.002 \sim 0.03$ mm。

经过整理，得到约束方程

$$g_2(\boldsymbol{X}) = (v - x_1) \left(\frac{x_3 d_r d_w}{d_r + d_w}\right)^{0.5} - C_b \leqslant 0$$

3）在保证工件不产生磨削烧伤的前提下，磨轮有一定的耐用度

$$T_b - \frac{C_T d_w^{0.6}}{(v_w f_a)^{1.82} t^{1.1}} \leqslant 0 \tag{16-17}$$

式中，C_T 是工件材料系数，对于末淬硬钢 $C_T = 2550$，淬硬钢 $C_T = 2260$；T_b 是磨轮耐用度的适用值，按照精磨技术条件取 $T_b = 30$ min。

经过整理，得到约束方程

$$g_3(\boldsymbol{X}) = T_b - \frac{C_T d_w^{0.6}}{(x_1 x_2)^{1.82} x_3^{1.1}} \leqslant 0$$

4）切削动力不能超过磨床主电动机的额定功率

$$0.0358(d_w v_\alpha t)^{0.7} - \eta P_C \leqslant 0 \tag{16-18}$$

式中，η 是磨床主电动机到主轴之间的传动效率，$\eta \approx 0.95$。

经过整理，得到约束方程

$$g_4(\boldsymbol{X}) = 0.0358\left(\frac{1\text{e}3 x_1 x_2 x_3}{\pi}\right)^{0.7} - \eta P_C \leqslant 0$$

5）按照精磨技术条件，工件的轴向速度 $v_a \leqslant 2000$ mm/min，即

$$g_5(\boldsymbol{X}) = \frac{1\text{e}3 x_1 x_2}{\pi d_w} - v_{am} \leqslant 0$$

6）切削加工前工艺参数的边界条件。工件的形状精度（如圆度和圆柱度等）由磨床本身的设计要求、对托板形状与尺寸的选择、导板的调整、磨轮和导轮的修整等来保证。

工件的尺寸精度要根据具体磨削系统刚度，每磨削一批工件时磨轮的径向磨损量的情况，及时修整磨轮，并且改变最终加工位置，以使工件磨削尺寸重新位于公差带中心来保证。因此，边界约束条件是：

$$\left.\begin{aligned} g_6(\boldsymbol{X}) &= 12.241 - x_1 \leqslant 0 \\ g_7(\boldsymbol{X}) &= x_1 - 88.579 \leqslant 0 \\ g_8(\boldsymbol{X}) &= 3.047 - x_2 \leqslant 0 \\ g_9(\boldsymbol{X}) &= x_2 - 7.621 \leqslant 0 \\ g_{10}(\boldsymbol{X}) &= 0.002 - x_3 \leqslant 0 \\ g_{11}(\boldsymbol{X}) &= x_3 - 0.030 \leqslant 0 \end{aligned}\right\}$$

这是一个有 11 个约束条件（其中，$g_1(\boldsymbol{X}) \sim g_5(\boldsymbol{X})$是性能不等式约束，$g_6(\boldsymbol{X}) \sim g_{11}(\boldsymbol{X})$是边界不等式约束）的三维非线性优化设计问题。

16.5.3 M 文件和运算结果

编制 M 文件如下：

```
%无心磨削工艺参数优化
% 1 - 主程序
%设计变量
% x(1) - 工件线速度(m/min);
% x(2) - 工件轴向进给量(mm/r);
% x(3) - 磨削深度(mm).
%设计变量的初始值
```

```
x0 = [60;5.3;0.016];
%设计变量的下界与上界
vlb = [12.241;3.047;0.002];
vub = [88.579;7.621;0.030];
%如果没有设计变量边界限制,则边界参数 lb,ub 定义为空矩阵符号"[ ]"
%六个线性不等式约束(g6、g7、g8、g9、g10、g11)中设计变量的系数矩阵
a = zeros(6,2);
a(1,1) = -1;a(2,1) =1;
a(3,2) = -1;a(4,2) =1;
a(5,3) = -1;a(6,3) =1;
%六个线性不等式约束中常数项列阵
b = [ -12.241;88.579; -3.047;7.621; -0.002;0.030];
%调用多维约束优化函数
%等式约束参数 Aeq,beq 定义为空矩阵符号"[ ]"
[x,fn] = fmincon(@wxmx_f,x0,a,b,[],[],vlb,vub,@wxmx_g);
fmax = 1e3 * x(1) * x(2) * x(3);
disp''
disp'            ********  计 算 结 果   ********'
disp''
disp'          ********  无心磨削工艺参数的最优解    ********'
fprintf('          工件线速度          vw = %3.4f m/min\n' ,x(1))
fprintf('     工件轴向进给量          fa = %3.4f mm/r\n' ,x(2))
fprintf('             磨削深度           t = %3.4f mm\n' ,x(3))
fprintf('          金属切除率       fmax = %3.4f mm^3/min\n' ,fmax)
disp''
%调用三维约束优化非线性约束函数(wxmx_g)计算最优点 x * 的性能约束函数值
g = wxmx_g(x);
disp'          ========      最优点的性能约束函数值        ========'
fprintf('             表面粗糙度限制条件          g1 = %3.4f\n' ,g(1))
fprintf('          防止磨削烧伤限制条件          g2 = %3.4f\n' ,g(2))
fprintf('             磨轮耐用度限制条件          g3 = %3.4f\n' ,g(3))
fprintf('     磨床主电动机功率限制条件          g4 = %3.4f\n' ,g(4))
fprintf('          工件轴向速度限制条件          g5 = %3.4f\n' ,g(5))
disp''
disp'          ========      最优点的边界约束函数值        ========'
fprintf('          工件线速度最小值          g6 = %3.4f\n' ,12.241 - x(1))
fprintf('                          最大值          g7 = %3.4f\n' ,x(1) -88.579)
fprintf('     工件轴向进给量最小值          g8 = %3.4f\n' ,3.047 - x(2))
fprintf('                          最大值          g9 = %3.4f\n' ,x(2) -7.621)
fprintf('             磨削深度最小值        g10 = %3.4f\n' ,0.002 - x(3))
fprintf('                          最大值        g11 = %3.4f\n' ,x(3) -0.03)

% 2 - 目标函数(wxmx_f)
function f = wxmx_f(x);
%金属切除率(mm^3/min)最大化
```

```
f = 1e3/(x(1) * x(2) * x(3));

% 3 - 非线性不等式约束函数(wxmx_g)
function [g,ceq] = wxmx_g(x);
hd = pi/180;
%约束条件1 - 工件表面最大高度不超过表面粗糙度要求限制条件
Bw = 28;                                  %工件宽度(mm);
dw = 55.56;                               %工件直径(mm);
dr = 500;                                 %导轮直径(mm);
Rz = 2;                                   %表面粗糙度(微米);
Kh = 80;                                  %表面粗糙度系数;
u = 0.22;                                 %磨轮切削刃平均间隔(mm);
Lmd = 53;                                 % 磨轮磨刃半顶角(度);
n = 1300;                                 %磨轮转速(r/min);
v = 1e - 3 * pi * dr * n;                 %磨轮线速度(m/min);
g(1) = 1.36 * Kh * u^1.2 * (x(1) * x(2)/(tan(Lmd * hd) * v * Bw))^0.4 * (1/dr + 1/dw)^0.2
 - Rz;
%约束条件2 - 防止磨削烧伤限制条件
Cb = 1920;                                %磨削烧伤临界系数(m. mm/min);
g(2) = (v - x(1)) * x(3)^0.5 * (dr * dw/(dr + dw))^0.5 - Cb;
%约束条件3 - 磨轮耐用度限制条件
Ct = 2550;                                %工件材料系数;
Tb = 30;                                  %磨轮耐用度适用值(min);
g(3) = Tb - Ct * dw^0.6/(x(1) * x(2))^1.82/x(3)^1.1;
%约束条件4 - 磨床主电动机功率限制条件
Pc = 13;                                  %磨床主电动机功率(kW);
nu = 0.95;                                %磨床主电动机到主轴之间的传动效率;
Tb = 30;           V%磨轮耐用度适用值(min);
g(4) = 0.0358 * (1e3 * x(1) * x(2) * x(3)/pi)^0.7 - nu * Pc;
%约束条件5 - 工件轴向速度限制条件
vam = 2000;           % 工件轴向速度最大值(mm/min);
g(5) = 1e3 * (x(1) * x(2))/(pi * dw) - vam;
%没有非线性等式约束条件
ceq = [ ];

% 4 - 计算结果分析
disp'        ********  磨削工艺参数的凑整解   ********'
dw = 55.56;                                              %工件直径(mm);
dr = 500;                                                %导轮直径(mm);
hd = pi/180;
alf = atan(x(2)/(pi * dw));                              % 导轮偏角(rad)
nr = 1e3 * x(1)/(pi * dr * cos(alf));                    %导轮转速(r/min)
nrj = [13 17 23 30 40 53 71 94];                         % 磨床导轮的八级转速
for i = 1:8
    if nr < = nrj(i)
```

```
nrd = nrj(i-1);break                                         % 确定导轮转速
    end
end
vwz = 1e-3*pi*dr*nrd*cos(alf);                              % 工件线速度凑整解(m/min)
fnz = (pi*dr*nrd*cos(alf))*(pi*dw*tan(alf))*x(3);         % 金属切除率凑整解
alfy = 2.50;nry = 30;ty = 0.01;                              % 原精磨工艺参数
fay = pi*dw*tan(alfy*hd);                                    % 原工件轴向进给量(mm/r)
vwy = 1e-3*pi*dr*nry*cos(alfy*hd);                          % 原工件线速度(m/min)
fny = 1e3*vwy*fay*ty;                                        % 原金属切除率(mm^3/min)
fprintf('          磨床导轮偏角     alf = %3.4f 度\n',alf/hd)
fprintf('              导轮转速     nr = %3.0f r/min\n',nrd)
fprintf('            工件线速度    vwz = %3.4f m/min\n',vwz)
fprintf('        金属切除率凑整解  fnz = %3.4f mm^3/min\n',fnz)
disp''
disp'        ********  原磨削工艺参数   ********'
fprintf('        原磨床导轮偏角    alfy = %3.4f 度\n',alfy)
fprintf('            原导轮转速    nry = %3.0f r/min\n',nry)
fprintf('          原工件线速度    vwy = %3.4f m/min\n',vwy)
fprintf('      原工件轴向进给量    fay = %3.4f mm/r\n',fay)
fprintf('        原工件磨削深度     ty = %3.4f mm\n',ty)
fprintf('          原金属切除率    fny = %3.4f mm^3/min\n',fny)
disp''
fprintf('   新旧工艺金属切除率之比  fnb = %3.4f\n',fnz/fny)
fprintf('        金属切除率提高率  fnv = %3.4f\n',(fnz-fny)/fny)
```

计算结果：

```
        ********计 算 结 果   ********

     ********无心磨削工艺参数的最优解   ********
                  工件线速度      vw = 88.5790 m/min
              工件轴向进给量      fa = 3.9410 mm/r
                    磨削深度       t = 0.0193 mm
                  金属切除率    fmax = 6744.2851 mm^3/min

     ========最优点的性能约束函数值      ========
            表面粗糙度限制条件      g1 = -1.0606
          防止磨削烧伤限制条件      g2 = 0.0000
            磨轮耐用度限制条件      g3 = -21.3629
      磨床主电动机功率限制条件      g4 = -4.6563
          工件轴向速度限制条件      g5 = 0.0000

     ========最优点的边界约束函数值      ========
              工件线速度最小值      g6 = -76.3380
                        最大值      g7 = 0.0000
          工件轴向进给量最小值      g8 = -0.8940
                        最大值      g9 = -3.6800
```

```
              磨削深度最小值        g10 = -0.0173
                      最大值        g11 = -0.0107

  ********磨削工艺参数的凑整解   ********
                磨床导轮偏角         alf = 1.2934 度
                    导轮转速         nr = 53 r/min
                  工件线速度        vwz = 83.2310 m/min
              金属切除率凑整解       fnz = 6337.0951 mm^3/min

   ********原磨削工艺参数   ********
              原磨床导轮偏角        alfy = 2.5000 度
                  原导轮转速         nry = 30 r/min
                原工件线速度        vwy = 47.0790 m/min
              原工件轴向进给量       fay = 7.6209 mm/r
                原工件磨削深度        ty = 0.0100 mm
                  原金属切除率       fny = 3587.8378 mm^3/min

          新旧工艺金属切除率之比      fnb = 1.7663
              金属切除率提高率       fnv = 0.7663
```

16.5.4 优化结果的分析和处理

工艺参数最优解为：

$$X^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_w^* \\ f_a^* \\ t^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 88.5790 \text{ m/min} \\ 3.9410 \text{ mm/r} \\ 0.0193 \text{ mm} \end{bmatrix}$$

$$f_{\max} = 6744.2851 \text{ mm}^3/\text{min}$$

经检验，X^* 位于约束面磨削烧伤限制条件 $g_2(X^*)=0$、工件轴向速度限制条件 $g_5(X^*)=0$ 和工件线速度最大值限制条件 $g_7(X^*)=0$ 的交集上。

将 $f_a = x_2^*$ 代入计算式，即可求出磨床导轮偏角应该调整值 $\alpha = 1°17'36''$。再将 α 和 $v_w = x_1^*$ 代入计算式，即可求出磨床导轮转速 $n_r = 56.4$ r/min。由于 M1080 无心磨床的导轮只有八级转速，为了避免凑整解落到可行域之外，应该将导轮转速凑整到磨床较低的转速级上，取 $n_r = 53$ r/min，这样会对优化结果产生一定削弱。对应的凑整解是：工件线速度 $v_w = 83.231$ m/min，金属切除率 $f^* = 6337.0951$ mm^3/min。

与原来精磨规范工艺参数（$\alpha = 2°30'$、$n_r = 30$ r/min、$t = 001$ mm，则 $f_a = 7.621$ mm/r，$v_w = 47.08$ m/min）相比，优化后的金属切除率提高约 76.6%。金属切除率的提高，主要是在满足一定的技术条件和工艺条件下，提高了磨削深度 t，适当调整了导轮偏角 α 与转速 n_r 之比，使工件的轴向速度 v_a 尽可能增大。

16.6 曲线拟合和多项式拟合

一些变量共处在一个统一体中，通过试验获取一组数据，可以采用散点图、表格、曲线等表示它们之间的内在相依关系。利用回归分析将它们拟合成经验公式，可以函数关系的形

式比较客观地反映事物的内部规律，并且形式紧凑，便于在数学分析中使用。

回归分析是处理变量相关关系的一种数理统计方法，其主要内容是：确定一组数据之间的数学表达式；对函数关系的可信程度进行统计检验；根据变量的取值预测或控制另外变量的取值和确定精度。

16.6.1　直线拟合

（1）按照最小二乘法获得回归方程

$$\hat{y} = b_0 + bx \tag{16-19}$$

式中，回归系数 $b = l_{xy}/l_{xx}$，$b_0 = \bar{y} - b\bar{x}$；x 离差的平方和 $l_{xx} = \sum(x-\bar{x})^2 = \sum x^2 - (\sum x)^2/N$；$y$ 离差的平方和 $l_{yy} = \sum(y-\bar{y})^2 = \sum y^2 - (\sum y)^2/N$，即是总离差平方和 S；x 和 y 离差乘积的和 $l_{xy} = \sum(x-\bar{x})(y-\bar{y}) = \sum xy - \sum x \sum y/N$；$x$ 和 y 是观察值，$\bar{x} = \sum x/N$ 和$\bar{y} = \sum y/N$ 是其均值，$\hat{y}$ 是拟合值。

（2）方差分析　总离差平方和

$$S = \sum(y-\bar{y})^2 = l_{yy} = \sum(\hat{y}-\bar{y})^2 - \sum(y-\hat{y})^2 = U + Q \tag{16-20}$$

式中，回归平方和 $U = \sum(\hat{y}-\bar{y})^2 = bl_{xy}$，反映观察值 x 和 y 线性相关对 y 的变差的影响；剩余平方和 $Q = \sum(y-\hat{y})^2 = l_{yy} - bl_{xy}$，反映试验误差等其他因素对 y 的变差的影响。

（3）显著性检验　统计量

$$F = \frac{U(N-2)}{Q} \tag{16-21}$$

如果 $F \geqslant F_{0.01}(1,N-2)$，认为回归是高度显著的（在 0.01 的水平上显著）；如果 $F \geqslant F_{0.05}(1,N-2)$，认为回归是显著的（在 0.05 的水平上显著）；如果 $F \geqslant F_{0.01}(1,N-2)$，认为回归是不显著的（在 0.10 的水平上显著，可信赖程度为 90%），y 对 x 线性关系不密切。

利用回归方程，可以在一定显著性水平上确定与 x 对应的 y 的取值范围。

（4）剩余方差和剩余标准误差

1）相关系数

$$r = \frac{l_{xy}}{\sqrt{l_{xx}l_{yy}}} \tag{16-22}$$

2）剩余方差（剩余均方差）

$$\sigma^2 = \frac{Q}{N-2} \tag{16-23}$$

它反映了排除 x 对 y 的线性影响后（或者当 x 固定时），衡量 y 随机波动大小的一个估计值。

3）剩余标准误差（剩余标准偏差、剩余标准离差）

$$\sigma = \sqrt{\frac{Q}{N-2}} \tag{16-24}$$

它用来衡量所有随机因素对 y 的一次性观测平均变差的大小，σ 越小回归直线精度越高。

应当指出，在大多数工程实际问题中，若变量之间的关系是某种曲线关系，就需要进行实验数据的曲线拟合。一般首先确定函数类型，然后通过变量代换将其转换为直线拟合问题；或将曲线拟合问题转化为多项式回归的问题。

16.6.2 曲线拟合

1. 确定函数的类型

将实验观测数据作图与图16–19中所示的六种典型曲线比较后，根据观测数据变化规律，判定其所属的曲线类型。

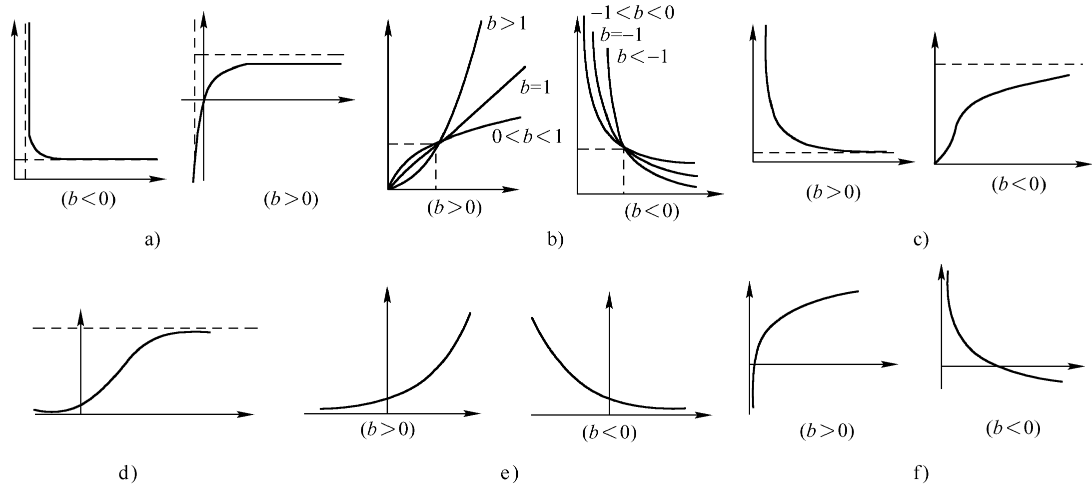


图16–19 六种典型曲线的形态与方程

a）双曲线 $1/y=a+b/x$ b）幂函数 $y=ax^b$ 的曲线 c）指数曲线 $y=ae^{b/x}$

d）S型曲线 $y=1/a+be^{-x}$ e）指数曲线 $y=ae^{bx}$ f）对数曲线 $y=a+b\ln x$

2. 通过变量代换将回归曲线转换成回归直线

六种典型曲线方程与对应的变量代换见表16–1。

表16–1 曲线方程与变量代换

序	曲线类型	函数表达式	变量代换		拟合系数代换	
1	双曲线	$\frac{1}{y}=a+\frac{b}{x}$	$x'=\frac{1}{x}$	$y'=\frac{1}{y}$	$b=b'=\frac{l_{x'y'}}{l_{x'x'}}=\frac{\sum x'y'-\frac{\sum x'\sum y'}{N}}{\sum x'^2-\frac{(\sum x')^2}{N}}$ $a'=\bar{y}'-b'\bar{x}'=\frac{\sum y'-b'\sum x'}{N}$	$a=a'$
2	幂函数曲线	$y=ax^b$	$x'=\ln x$	$y'=\ln y$		$a=e^{a'}$
3	负指数曲线	$y=ae^{\frac{b}{x}}$	$x'=\frac{1}{x}$			
4	S型曲线	$y=\frac{1}{a+be^{-x}}$	$x'=e^{-x}$			$a=a'$
5	指数曲线	$y=ae^{bx}$	$x'=x$			$a=e^{a'}$
6	对数曲线	$y=a+b\log x$	$x'=\frac{\ln x}{\ln 10}$	$y'=y$		$a=a'$

3. 回归方程的效果与精度检验

1）剩余平方和

$$Q=\sum(y-\hat{y})^2 \qquad (16\text{–}25)$$

注意：式中 Q 不能用变量代换后的 y'、$\hat{y}'$ 和式 $Q=l_{yy}-bl_{xy}$ 进行计算。

2）剩余标准误差

$$\sigma = \sqrt{\frac{Q}{N-2}} \tag{16-26}$$

它可以作为根据回归方程预报 y 值精度的标准。

3）相关指数

$$R^2 = 1 - \frac{Q}{\sum (y - \bar{y})^2} \tag{16-27}$$

剩余平方和 Q 及剩余标准误差 σ 越小，相关指数 R^2 就越大（越接近 1），拟合效果就越好。

16.6.3 多项式拟合

1）根据微积分知识，任一函数都可以分段用多项式来逼近，因此多项式拟合可以处理许多非线性问题。多项式拟合方程形式为

$$\hat{y} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \tag{16-28}$$

根据最小二乘法，应使观察值 y 与拟合值 $\hat{y}$ 在 N 个结点上的误差平方和 $\sum_{i=1}^{N} (\hat{y} - y)^2$ 最小。

2）n 个数据可以拟合（$n-1$）阶多项式，但是高阶多项式需要多次求导，使数值特性变差。利用 MATLAB 中的交互式函数 polytool(x,y,1)，在图形上方［Degree］框中输入阶数，右击左下角的［Export］输出图形。然后观察各阶多项式拟合的图形，选择置信区间最小、拟合效果好的图形，确定多项式拟合的阶数。

3）使用 MATLAB 中提供的多项式拟合函数[p,S] = polyfit(x,y,m)，可直接求出 m 阶多项式的系数向量 $\boldsymbol{p} = [a_0 \quad a_1 \quad \cdots \quad a_m]$和多项式的有关信息 S。

4）使用多项式拟合函数[yh,delta] = polyconf(p,x,S)求出各结点的拟合函数值 yh（即 $\hat{y}$）。或者使用函数 yh = polyval(p,x)可根据自变量 x 值计算多项式的拟合函数值。

5）进行拟合效果和精度检验时，使用：

① 剩余平方和

$$Q = \sum (y - \hat{y})^2 \tag{16-29}$$

② 剩余标准误差

$$\sigma = \sqrt{\frac{Q}{N-2}} \tag{16-30}$$

③ 相关指数

$$R^2 = \frac{\sum (\hat{y} - \bar{y})^2}{\sum (y - \bar{y})^2} \tag{16-31}$$

剩余平方和 Q 及剩余标准误差 σ 越小，相关指数 R^2 就越大，拟合效果就越好。

16.6.4 计算实例和 M 文件

1. 编制绘制 6 种典型曲线的 M 文件

```
% 1 - 绘制 6 种典型曲线
a = 5;
```

```
lx = input('选择曲线类型:1 - 双曲线;2 - 幂函数;3 - 负指数;4 - S 型;5 - 指数;6 - 对数;7 - 直线 =');
b = input('输入正系数或负系数:b =');
fprintf('             常数 a = %3.6f\n',a)
fprintf('             系数 b = %3.6f\n',b)
xx = 1:0.1:10;
switch lx
    case 1
        yy = xx./(a.*xx + b);
    case 2
        yy = a*xx.^b;
    case 3
        yy = a*exp(b./xx);
    case 4
        yy = 1./(a + b.*exp(-xx));
    case 5
        yy = a*exp(b.*xx);
    case 6
        yy = a + b.*log(xx)/log(10);
    case 7
        yy = a + b.*xx;
end
subplot(3,2,lx)
plot(xx,yy,'b-')
grid
% 图形标题 - 曲线类型和公式(字符黑体,公式斜体)
switch lx
    case 1
        title('\bf 双曲线\it y = x/(ax + b)')
    case 2
        title('\bf 幂函数曲线\it y = ax^b')
    case 3
        title('\bf 负指数曲线\it y = ae^{b/x}')
    case 4
        title('\bf   S 型曲线\it y = 1/(a + be^{-x})')
    case 5
        title('\bf 指数曲线\it y = ae^{bx}')
    case 6
        title('\bf 对数曲线\it y = a + bln(x)')
    case 7
        title('\bf 直线\it y = a + bx')
end
```

运算过程:

```
选择曲线类型:1 - 双曲线;2 - 幂函数;3 - 负指数;4 - S 型;5 - 指数;6 - 对数;7 - 直线 = 1
输入正系数或负系数:b = -2
常数 a = 5.000000
```

系数 b = -2.000000

输出的双曲线 $y=\dfrac{x}{ax+b}=\dfrac{x}{5x-2}$ 图形如图 16-20 所示。其他运算过程省略。输出的六种典型曲线形态如图 16-20 和图 16-21 所示。

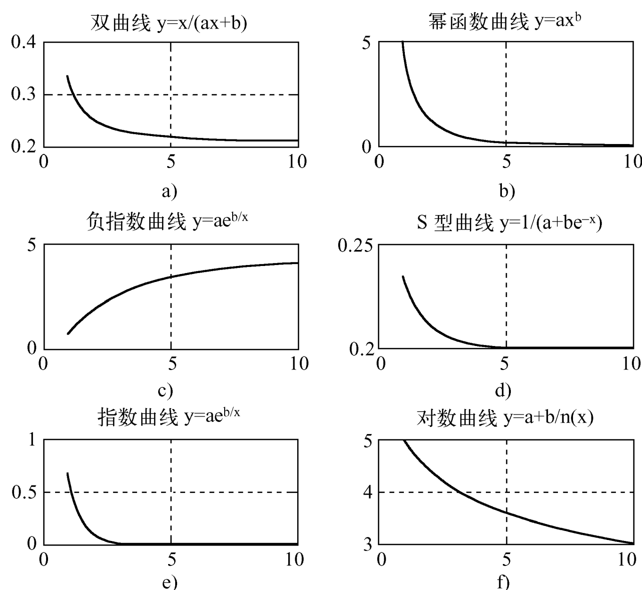


图 16-20　$b<0$ 时六种典型曲线形态

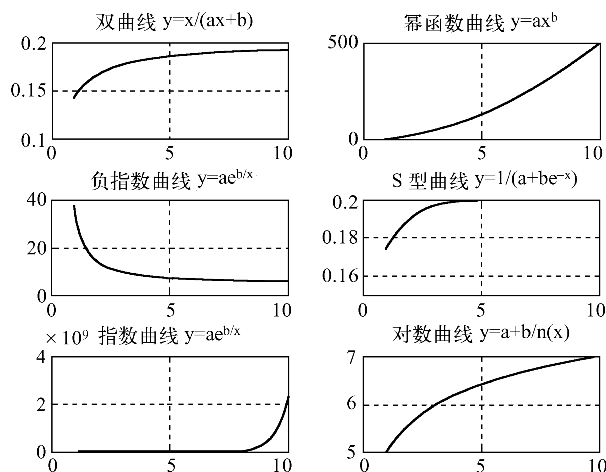


图 16-21　$b>0$ 时六种典型曲线形态

2. 编制典型曲线拟合的 M 文件

1）利用“switch-case-end”分支结构语句，绘制六种典型曲线与试验观测数据图形对比，从而判定曲线类型。

2）根据曲线类型进行变量代换。

3）通过计算变量的均值、离差平方和、乘积平方和，确定回归系数。

4）根据曲线类型进行拟合系数代换。

5）通过计算剩余平方和、剩余标准误差和相关指数进行拟合效果与精度的检验。

6）利用“plot”语句绘制拟合曲线，并且与实验观测数据离散点图进行直观比较。

例 16-9 已知标准圆柱齿轮复合齿形系数 Y_{FS} 与齿数（当量齿数）$z(z_v)$ 的关系，见表 16-2。

表 16-2 标准渐开线外齿轮（$\alpha_n=20°$、$h_{an}^*=1.0$）的复合齿形系数

$z(z_v)$	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Y_{FS}	5.05	4.91	4.79	4.70	4.61	4.55	4.48	4.43	4.38
$z(z_v)$	25	30	35	40	45	50	60	70	80
Y_{FS}	4.22	4.13	4.08	4.05	4.02	4.01	3.88	3.88	3.88

试将其拟合为函数曲线 $Y_{FS}=f(z_v)$。

表 16-2 的数据图形如图 16-22 所示。经过与图 16-19 所示的典型曲线形态比较可知，应将其拟合为双曲线（$b<0$）。拟合计算结果得到曲线方程

$$Y_{FS}=\frac{z_v}{0.269118z_v-0.840687} \tag{16-32}$$

经检验，拟合的标准误差是 $\sigma=0.022984$，相关指数是 $R^2=0.996424$，这说明拟合效果好，精度高。

```
% 2 - 典型曲线拟合
disp' ***** 圆柱齿轮复合齿形系数 Yfs 与当量齿数 Zv 的关系   ******'
lx = input('选择曲线类型:1 - 双曲线;2 - 幂函数;3 - 负指数;4 - S 型;5 - 指数;6 - 对数;7 - 直线 = ');
x0 = input('输入插值点:x0 = ');
n = 18;
x = zeros(n);y = zeros(n);ys = zeros(n);ya = zeros(n);s = zeros(n);
x = [12 13 14 15 16 17 18 19 20 25 30 35 40 45 50 60 70 80];
y = [5.05 4.91 4.79 4.70 4.61 4.55 4.48 4.43 4.38 4.22 4.13 4.08 4.05 4.02 4.01 3.88 3.88 3.88];
x1 = x(1);xn = x(n);
for i = 1:n
    ya(i) = y(i);
end
disp'     Zv          Yfs'
for i = 1:n
    zy = [x(i) y(i)];
  disp(zy)
end
%绘制实验数据列表离散点图(红色,圆点,栅格,保持图形)
plot(x,y,'r.')
grid
hold on;
%根据曲线类型进行变量代换
for i = 1:n
    switch lx
        case 1
            x(i) = 1/x(i);y(i) = 1/y(i);
```

```
        case 2
            x(i) = log(x(i));y(i) = log(y(i));
        case 3
            x(i) = 1/x(i);y(i) = log(y(i));
        case 4
            x(i) = exp(-x(i));y(i) = log(y(i));
        case 5
            y(i) = log(y(i));
        case 6
            x(i) = log(x(i))/log(10);
        case 7
    end
end
disp'    *****计算代换变量的累加与平方和 *****'
c = 0;d = 0;xc = 0;yc = 0;xy = 0;
for i = 1:n
    c = c + x(i);d = d + y(i);
    xc = xc + x(i)^2;yc = yc + y(i)^2;
    xy = xy + x(i) * y(i);
end
cxy = [c d xc yc xy];
disp'      C - X          C - Y      C - X^2        C - Y^2   C - (XY)^2'
disp (cxy)
dx = xc - c^2/n;
dy = yc - d^2/n;
dc = xy - c * d/n;
lxy = [dx dy dc];
disp'      Lxx           Lyy          Lxy'
disp (lxy)
disp'    *****计算拟合系数和常数 *****'
b = dc/dx;
fprintf('          拟合系数 b    = %3.6f\n' ,b)
a = (d - b * c)/n;
fprintf('          代换常数 a    = %3.6f\n' ,a)
switch lx
    case 1
        fprintf('          拟合常数 a    = %3.6f\n' ,a)
    case 2
        g = exp(a);
        fprintf('          拟合常数 a    = %3.6f\n' ,g)
    case 3
        g = exp(a);
        fprintf('          拟合常数 a    = %3.6f\n' ,g)
    case 4
        fprintf('          拟合常数 a    = %3.6f\n' ,a)
    case 5
```

```
            g = exp(a);
            fprintf('            拟合常数 a     = %3.6f\n',g)
        case 6
            fprintf('            拟合常数 a     = %3.6f\n',a)
        case 7
            fprintf('            拟合常数 a     = %3.6f\n',a)
end
disp('      *****拟合效果和精度检验 *****')
r = dc/sqrt(dx * dy);
fprintf('            相关系数 r     = %3.6f\n',r)
d = 0;q = 0;yc = 0;
for i = 1:n
    ys(i) = a + b * x(i);
    switch lx
        case 1
            ys(i) = 1/ys(i);
        case 2
            ys(i) = exp(ys(i));
        case 3
            ys(i) = exp(ys(i));
        case 4
            ys(i) = 1/ys(i);
        case 5
            ys(i) = exp(ys(i));
        otherwise
    end
    s(i) = (ya(i) - ys(i))^2;
    d = d + ya(i);
    q = q + s(i);
    yc = yc + ya(i)^2;
end
dy = yc - d * d/n;
sgm = sqrt(q/(n - 2));
rr = 1 - q/dy;
fprintf('         剩余平方和 Q  = %3.6f\n',q)
fprintf('            标准误差 s  =  %3.6f\n',sgm)
fprintf('            相关指数 R2 = %3.6f\n',rr)
switch lx
    case 7
        f = (dy - q) * (n - 2)/q;
        fprintf('              统计量 F     = %3.6f\n',f)
    otherwise
end
%计算插值点函数值,根据选择的曲线类型绘制拟合曲线(蓝色,实线)
xx = x1:1:xn;
switch lx
```

```
        case 1
            y0 = x0/(a * x0 + b);
            yy = xx ./(a. * xx + b);
        case 2
            y0 = g * x0^b;
            yy = g * xx .^b;
        case 3
            y0 = g * exp(b/x0);
            yy = g * exp(b ./xx);
        case 4
            y0 = 1/(a + b * exp( - x0));
            yy = 1 ./(a + b. * exp( - xx));
        case 5
            y0 = g * exp(b * x0);
            yy = g * exp(b. * xx);
        case 6
            y0 = a + b * log(x0)/log(10);
            yy = a + b. * log(xx)/log(10);
        case 7
            y0 = a + b * x0;
            yy = a + b. * xx;
    end
    fprintf('插值点函数值 y0 = %3.4f\n',y0)
    plot(xx,yy,'b-')
    %图形标题-拟合曲线类型和公式(字符黑体,公式斜体)
    switch lx
        case 1
            title('\bf 实验数据离散点图 / 双曲线\it y = x/(ax + b)')
        case 2
            title('\bf 实验数据离散点图 / 幂函数曲线\it y = ax^b')
        case 3
            title('\bf 实验数据离散点图 / 负指数曲线\it y = ae^{b/x}')
        case 4
            title('\bf 实验数据离散点图 / S 型曲线\it y = 1/(a + be^{ - x})')
        case 5
            title('\bf 实验数据离散点图 / 指数曲线\it y = ae^{bx}')
        case 6
            title('\bf 实验数据离散点图 / 对数曲线\it y = a + bln(x)')
        case 7
            title('\bf 实验数据离散点图 / 直线\it y = a + bx')
    end
```

运算结果：

```
*****圆柱齿轮复合齿形系数 Yfs与当量齿数 Zv 的关系 ******
选择曲线类型:1-双曲线;2-幂函数;3-负指数;4-S 型;5-指数;6-对数;7-直线 =1
输入插值点:x0 =35
```

```
     Zv          Yfs
   12.0000      5.0500
   13.0000      4.9100
   14.0000      4.7900
   15.0000      4.7000
   16.0000      4.6100
   17.0000      4.5500
   18.0000      4.4800
   19.0000      4.4300
   20.0000      4.3800
   25.0000      4.2200
   30.0000      4.1300
   35.0000      4.0800
   40.0000      4.0500
   45.0000      4.0200
   50.0000      4.0100
   60.0000      3.8800
   70.0000      3.8800
   80.0000      3.8800

 *****计算代换变量的累加与平方和 *****
 C-X     C-Y     C-X^2    C-Y^2   C-(XY)^2
0.7904  4.1796  0.0438   0.9770   0.1759
  Lxx     Lyy      Lxy
0.0091  0.0065  -0.0077
 *****计算拟合系数和常数 *****
    拟合系数   b = -0.840687
    代换常数   a =0.269118
    拟合常数   a =0.269118
 *****拟合效果和精度检验 *****
    相关系数   r = -0.997753
  剩余平方和   Q =0.008452
    标准误差   s =0.022984
    相关指数  R2 =0.996424
插值点函数值  y0 =4.0800
```

输出圆柱齿轮复合齿形系数 Y_{FS} 与当量齿数 Z_V 的关系线图是双曲线［式（16-32）］，如图16-22所示。

3. 编制多项式拟合的M文件

1）利用交互式函数polytool(x,y,1)，确定多项式拟合的阶数。

2）利用函数[p,S] = polyfit(x,y,m)可直接求出 m 阶多项式的系数向量 $\boldsymbol{p}$ 有关信息 S。

3）利用函数[yh,delta] = polyconf(p,x,S)或yh = polyval(p,x)求出拟合函数值 yh。

4）进行拟合效果与精度的检验。

5）绘制拟合多项式曲线。

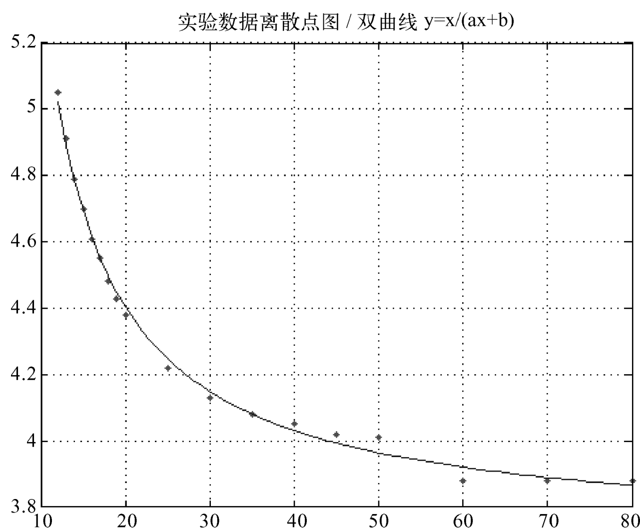


图 16-22　圆柱齿轮复合齿形系数与当量齿数的关系

例 16-10　已知螺旋副的效率 η 与导程角 λ 的关系，见表 16-3。

表 16-3　螺旋副的效率 η 与导程角 λ 的关系

λ	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°
η	0. 63	0. 76	0. 80	0. 82	0. 82	0. 80	0. 70

试将其拟合为多项式曲线 $\eta = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3 + \cdots$。

表 16-3 的数据图形如图 16-24 所示，在拟合动态过程中观察拟合图形。当取四阶多项式时，置信区间最小，得到相应的多项式方程是（数据只保留 7 位小数）

$$\eta = -0.0000001 + 0.0000239\lambda - 0.0014875\lambda^2 + 0.0429430\lambda^3 + 0.3271429\lambda^4 \quad (16-33)$$

经检验，拟合的标准误差是 $\alpha = 0.001974$，相关指数是 $R^2 = 0.999369$，这说明拟合效果好，精度高。

```
% 3 - 最小二乘法多项式拟合
% ********螺旋副效率 y 与螺纹导程角 x 的关系    ********
% (1) - 选择拟合多项式的阶数
x = [10 20 30 40 50 60 70];
y = [0.63 0.76 0.80 0.82 0.82 0.80 0.70];
n = 7;x1 = x(1);xn = x(n);
% n 个数据可以拟合(n - 1)阶多项式,高阶多项式多次求导,数值特性变差
% polytool()是交互式函数,在图形上方[Degree]框中输入阶数,右击左下角的[Export]输出图形
polytool(x,y,1)
% 观察多项式拟合的图形,选择置信区间最小的多项式阶数
% (2) - 计算多项式的各项系数和拟合值
m = input('           输入多项式拟合的阶数    m = ');
[p,S] = polyfit(x,y,m);
disp'           输出多项式的各项系数
fprintf (1',              a = %3.16f\n'  ,p)
disp'           输出多项式的有关信息 S
```

```
disp (S)
[yh,delta] = polyconf(p,x,S);
disp('        观测数据      拟合数据')
disp('    x          y          yh')
for i = 1:n
    xy = [x(i) y(i) yh(i)];
    disp (xy)
end
% (3) - 绘制观测数据离散点图和多项式曲线
plot(x,y','r.')
title('\bf 实验数据离散点图 / 多项式曲线\it y = a0 + a1x + a2x^2 + a3x^3 + ...')
grid
hold on;
xi = [x1:0.1:xn];
yi = polyval(p,xi);
plot(xi,yi','k-')
% (4) - 拟合效果和精度检验
Q = sum((y - yh).^2);
SGM = sqrt(Q/(n - 2));
RR = sum((yh - mean(y)).^2)/sum((y - mean(y)).^2);
fprintf('          剩余平方和       Q = %3.6f\n',Q)
fprintf('            标准误差    Sigma = %3.6f\n',SGM)
fprintf('            相关指数       RR = %3.6f\n',RR)
x0 = input('          输入插值点        x0 = ');
y0 = polyval(p,x0);
fprintf('   输出插值点拟合函数值        y0 = %3.4f\n',y0)
```

运算结果：

```
输入多项式拟合的阶数   m = 4
  输出多项式的各项系数
    a = -0.0000001477272727
    a = 0.0000239141414141
    a = -0.0014875000000000
    a = 0.0429430014430019
    a = 0.3271428571428540
  输出多项式的有关信息 S
    R: [5x5 double]
    df: 2
 normr: 0.0044
        观测数据      拟合数据
    x          y          yh
  10.0000   0.6300   0.6303
  20.0000   0.7600   0.7587
  30.0000   0.8000   0.8027
  40.0000   0.8200   0.8172
  50.0000   0.8200   0.8215
  60.0000   0.8000   0.7996
  70.0000   0.7000   0.7000
```

剩余平方和　　Q = 0.000019
标准误差　　Sigma = 0.001974
相关指数　　RR = 0.999369
输入插值点　　x0 = 45
输出插值点拟合函数值　y0 = 0.8208

输出螺旋副效率 η 与导程角 λ 关系的多项式线图［式（16-33）］，如图 16-23 和图 16-24 所示。

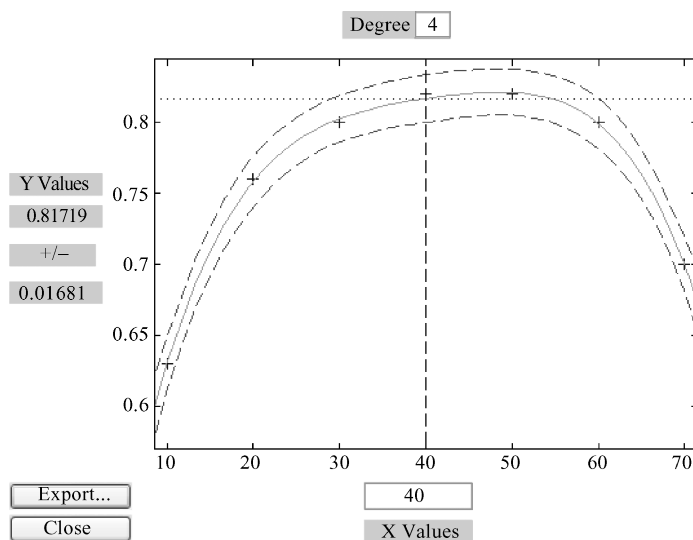


图 16-23　螺旋副效率与导程角关系的多项式拟合

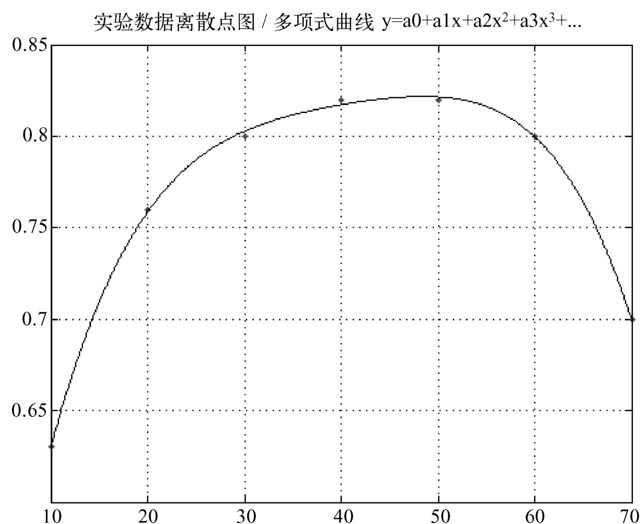


图 16-24　螺旋副效率与导程角关系的拟合曲线

参 考 文 献

[1] 郭仁生，魏宣燕，等．机械设计基础［M］．4 版．北京：清华大学出版社，2014.
[2] 郭仁生．基于 MATLAB 和 Pro/ENGINEER 的优化设计实例解析［M］．北京：机械工业出版社，2007.
[3] 郭仁生．多目标优化问题的理想有效解［J］．现代制造工程，2006（2）：63－65.
[4] 郭仁生．基于 MATLAB 的连杆机构运动综合［J］．现代机械，2006（1）：31－32.
[5] 郭仁生．齿轮传动设计与 MATLAB 实现［J］．机械，2005（7）：26－28.
[6] 郭仁生．齿轮传动的几何规划［J］．机械设计，2005（5）：49－51.
[7] 郭仁生．基于 MATLAB 的优化模型几何描述［J］．机械，2005（3）：38－39.
[8] 郭仁生．实现空间对称旋轮轨迹行星机构的分析和设计［J］．机械设计与制造，2005（1）：38－39.
[9] 郭仁生．基于 MATLAB 的凸轮机构设计［J］．顺德职业技术学院学报，2005（1）：20－22.
[10] 郭仁生．基于 MATLAB 的优化分析与计算［J］．机械设计与制造，2004（2）：60－62.
[11] 郭仁生，苏君，卢洪胜．优化设计应用［M］．北京：电子工业出版社，2003.
[12] 郭仁生．主轴支承静不定结构的计算［J］．机械，2002（5）：18－20.
[13] 郭仁生．多目标优化的规格化加权［J］．机械设计，1990（1）：14－16.
[14] 郭仁生．无心磨削工艺参数的优化［J］．机械设计与制造，1988（3）：5－8.
[15] 郭仁生．对心直动从动件盘形凸轮压力角的校核［J］．机械设计，1985（1）：53－56.
[16] 成大先．机械设计手册（机构）［M］．5 版．北京：化学工业出版社，2010.
[17] 成大先．机械设计手册（机械传动）［M］．5 版．北京：化学工业出版社，2010.
[18] 邹慧君，殷鸿梁．间歇运动机构设计与运动创新［M］．北京：机械工业出版社，2008.
[19] 李华敏，李瑰贤，等．齿轮机构设计与应用［M］．北京：机械工业出版社，2007.
[20] 于惠力，冯新敏，张海龙，等．传动零部件设计实例精解［M］．北京：机械工业出版社，2009.
[21] 约翰·F·加德纳．机构动态仿真［M］．西安：交通大学出版社，2002.
[22] 牟致忠．可靠性设计［M］．北京：机械工业出版社，1993.
[23] 罗延科，苏启棠，陈伦军．机构的概率法计算及电算程序［M］．重庆：重庆大学出版社，1988.
[24] 费业泰．误差理论与数据处理［M］．北京：机械工业出版社，1981.

在线互动交流平台

官方微博：http://weibo.com/cmpjsj
官方博客：http://blog.sina.com.cn/cmpbookjsj
读者信箱：cmp_itbook@163.com

机械工程设计分析和MATLAB应用 第4版






- SolidWorks系列
- AutoCAD系列
- Creo系列
- UG系列
- CATIA系列
- MATLAB系列
- ANSYS系列
- Mastercam系列

MATLAB系列已出版

- 机械工程设计分析和MATLAB应用 第4版
- 机械工程设计分析和MATLAB应用 第3版
- 机械工程设计分析和MATLAB应用 第2版
- 基于MATLAB和Pro/ENGINEER优化设计实例解析

地址：北京市百万庄大街22号
邮政编码：100037
电话服务
社服务中心：010-88361066
销售一部：010-68326294
销售二部：010-88379649
读者购书热线：010-88379203
网络服务
教材网：http://www.cmpedu.com
机工官网：http://www.cmpbook.com
机工官博：http://weibo.com/cmp1952
封面无防伪标均为盗版

上架指导 计算机/辅助设计
ISBN 978-7-111-48334-2
策划编辑◎ 张淑谦 / 封面设计◎



扫一扫加入微信公众平台
更多、更快获取最新图书资讯



ISBN 978-7-111-48334-2



定价：68.00元